量子カオスにおける位相回復

京都大学理学部　　戸田幹人

量子カオスをどう特徴付けるか（特にそのダイナミックスの特徴付け）という問題には、まだ回答はないといって良い。これまでの研究では、アンダーソン局在が起こるかどうか、即ちスペクトルが連続か離散的かという問題に焦点が当てられてきた。しかし、規則格子系におけるブロッホ状態を考えれば明らかなように、連続スペクトルを持っていても量子カオスとは呼び得ない系が存在する。他方、離散スペクトルの場合でも、系が可積分系に対応するかカオスに対応するかがレベル間隔の統計的な性質に反映する。従って、スペクトルが連続か離散的かとは独立に、量子カオス（そのダイナミックス）を特徴付ける性質が何かあるはずである。

このような動機から、量子系における位相の複雑さをどうとらえるかという問題を研究してきた。その内容は次の２点に要約することができる（詳しくは参考文献[1,2] を参照のこと)。

（１） 伏見表示（波動関数の位相空間表示）のゼロ点が位相のトポロジカルな特異点であることを用いて、量子系の位相の複雑さをゼロ点の分布から特徴付ける（ただし１自由度の場合)。量子系が可積分系に対応する場合、ゼロ点は滑らかな曲線上に並ぶ。これに対してカオスに対応する場合には、位相空間に２次元的に散らばる。この違いが量子カオスを特徴付けるのではないか。

（２） 位相回復問題の立場から、上記の結果の物理的意味を調べる。位相回復とは、波動関数の絶対値から位相の情報を復元する問題で、量子力学における散逸の起源にとって重要である。可積分系に対応する量子系の場合、そのゼロ点が１次元的に分布することを利用できるので、カオスに対応する場合に比べて位相回復はより容易であると予想される。

ここでは上記の（１）に関して今後の研究の展望を述べよう。最近、ゼロ点の時間発展を与える方程式が与えられた[3] 。それによると、一般にゼロ点は互いに反発しながら動いていくことがわかる。直観的にはこの結果は次のように理解できる。位相空間におけるゼロ点の軌跡が交差するためには、運動量と位置という２つの座標が一致する必要がある。時間という１つのパラメーターではこの２つの条件を同時に満たすことができない。これから一般にはゼロ点の軌跡が交差しないことがわかる（この議論は、１パラメーターの下でエネルギー準位が反発することを説明する議論と同様である)。ゼロ点の軌跡が一般には交差しないことから、ゼロ点の連続的な時間発展を組み紐に見立てることが可能になる。従って組み紐のからみ方が位相のトポロジカルな性質の変化を特徴付ける。この時、量子系が可積分系に対応するかカオスに対応するかの違いが、組み紐のからみ方にどう反映するか興味がある。

以上の話は１自由度に限られるが、この結果を２自由度以上にどう拡張できるか。n 自由度の系の位相空間は $2n$ 次元であるが、ゼロ面の次元は $2n-2$ である。従って、ゼロ面は位相空間において結び目を持つことができる。この時、位相のトポロジーを特徴付けるのはゼロ面の補空間のホモトピーである（これは結び目群

と呼ばれるものに他ならない)。以上のように少なくとも概念的には、1自由度の結果を2自由度以上に拡張することができる。しかも、予想もしなかったことだが結び目群が重要であることがわかった。量子カオスを特徴付けようとしてきた研究で出てきた結び目群が、可解な系を特徴付けるものとしてこれまで研究されてきた結び目群とどういう関係にあるのか（無関係かも含めて）いまのところ全くわからない。これらはいずれも今後の課題である [4] 。

参考文献

[1] Phase Retrieval Problem in Quantum Chaos and Its Relation to the Origin of Irreversibility I プレプリント

[2] 戸田幹人、量子カオスにおける位相回復、数理科学 1991 年 6 月号 p22-p28

[3] P.Leboeuf, Phase space approach to quantum dynamics, J.Phys. A24(1991)p4575

[4] カタストロフィー理論においても結び目群が登場する。より直接にはこちらの方と関係がありそうである。

V.Arnold, Singularities of Caustics and Wave Fronts (Kluwer, 1990)