

統計力学的極限における 古典軌道アンサンブル

九工大・情報工 高橋 公也

たくさんの固有状態の重ね合わせで表せる純粋状態の長時間発展に現れる量子力学的な揺らぎの古典的な極限における統計的な性質を捉えることの出来る基も単純なモデルである古典軌道アンサンブルについて報告する。力学量や位相空間で表示された波動関数の時間発展は双線形な形で書かれており一般には、位相の絡みを見無視することは不可能である。しかし、伏見関数を調べてみると、干渉によって発生した疑似波束は短時間の間ではあるが古典粒子の様に振舞うために、 $\hbar \rightarrow 0$ 極限ではプランクセルに平均して一個ある重みをもったtransientな準粒子の集合と近似的に見なせるようになる。そして、力学量の時間的な揺らぎは、この様な特性を強く反映し、微妙な位相の絡みで表されるようなその他の量子効果は見えにくくなる。この様な場合、単純な力学量の時間発展における統計的な性質を観測する限りにおいては、重みのついた古典的な粒子の集合から計算されるものにより近似することが可能となる。我々は、既にこの目的の為の最も単純なモデルとして、古典軌道アンサンブル (E C T) 提案した。古典軌道アンサンブルの構成は、以下の通りである。

(a) プランクセルに平均して一個ある重みのついた独立の粒子の集合を考える。

具体的な粒子の配置は、可積分系では量子化されたトーラス上に1つずつ置き、カオス的な場合には、エネルギー固有値で指定されるエネルギー面に1つ置く。

(b) 各々の粒子のダイナミクスを古典力学で与える。

これら2つの規則の内(a)の規則がより重要である。なぜならば、量子干渉によって発生した疑似波束を粒子的な描像で捉えたときの読み替えの規則を与えているからである。

これまでの報告では、極小波束からの時間発展について議論してきた。この場合、古典的に可積分な系では非常によい近似を与える事が立証されたが、非可積分系では局在化の影響の為に第0近似としての意味しか持たない。そのため、古典軌道アンサンブルが与えるような描像がどこまで正しいのか、特に、プランクセルに平均して1個の独立した粒子を用いる近似はどこまで妥当であるかという問題にたいして、明確に答えを与えてはいない。コヒーレント表示の完全性の条件はプランクセルに1個の代表点で量子系が記述出来ることを示しているが、その様な代表点が古典的なものとして、扱えるかと言う点についての答えを与えてくれるものではない。なぜならば、古典軌道アンサンブルが有効なのは、充分にたくさんの固有状態の重ね合わせで書かれた純粋状態の古典的な極限であると考えられるからである。今回の報告では、古典軌道アンサンブルがどのような状況で有効であるかを深く調べる為の第一歩として、非可積分系において古典軌道アンサンブルが最もよい近似を与えるであろう状況のもとでの近似の精度について研究した。古典軌道アンサンブルがよい近似を与えるのは、量子力学的な局在化が顕著に起きない場合である。これ

は、量子系が強い不安定性の為に全く局在化を示さない場合か、それとも局在化がないような初期条件を選んだ場合に実現される。前者は、scarの存在等のごく例外的な場合にしか実現されない。後者は、エネルギー幅が $\Delta E > 0$ ($\sqrt{\hbar}$)のマイクロカノニカル集合やカノニカル集合等を考えたときにごく自然に実現される。この報告では、後者についてこれまでの扱ってきた周期外力の入った一自由度系

$$H = \frac{1}{2} p^2 + \frac{a_1}{2} q^2 + \frac{1}{4} a_2 (1 + a_3 \sin \omega t) q^4 \quad (1)$$

の結果を報告する。ここでは、 $a_1 = -1.0$, $a_2 = 0.25$, $a_3 = 0.4$, $\omega = 0.7$, $\hbar = 0.08$ とする。この様に選ぶと系は大きなカオス領域を持つので都合がよい。ここでは、座標の期待値 $\langle q \rangle$ 及びその分散 $(\Delta q)^2$ に注目しそれらの値分布、パワースペクトル、相関関数等を量子系、古典軌道アンサンブル両方について計算し比較を行った。ただし、紙面の都合もあるのでここでは最も重要である値分布のみを示す。カオス領域における局在化のない状態をつくる必要があるので、伏見関数を調べカオス領域に関係する全ての準固有状態に一律な重みを付けた。この系のそのような準固有状態の数は88個である。具体的な計算結果の吟味に入る前に、古典軌道アンサンブルの構成の仕方について述べておこう。簡単の為に1自由度で考える。ハミルトニアンHのエネルギー固有値を E_n 、固有関数を u_n とすると、波動関数の時間発展は、

$$\phi(t) = \sum_n c_n u_n \exp(-i E_n t / \hbar) \quad (2)$$

$$\sum_n |c_n|^2 = 1 \quad \text{規格化条件} \quad (3)$$

となる。これに対し重みの付いた古典軌道の集合 $\{q_n(t), p_n(t), |c_n|^2\}$ を考える。これが、古典軌道アンサンブルである。各 $(q_n(t), p_n(t))$ はエネルギー曲面 $H(q_n(t), p_n(t)) = E_n$ 上の古典軌道でありその初期点はこの曲面上の任意の点である(ただし、可積分系または近可積分系では固有状態に対応する量子化されたトーラス上の軌道を考える)。 $|c_n|^2$ は各粒子にかかる重みであり、力学量 $A(q, p)$ の期待値は

$$\langle A(t) \rangle = \sum_n |c_n|^2 A(q_n(t), p_n(t)) \quad (4)$$

と定義される。周期外力のかかった系では固有状態の代わりに準固有状態を考えればよい。

具体的な結果の考察に入ろう。図1(a), (b)は、量子系及び古典軌道アンサンブルから計算された座標の期待値 $\langle q \rangle$ の各々の値分布を示したものである(値分布を計算するために用いたデータは、 $0 \leq t \leq 500T$ ($T = 2\pi/\omega$)の範囲で計算されたものである)。値分布の分散は力学量期待値の揺らぎの大きさを反映する。両者の分散の大きさは驚くほどの一致を示している。前に報告した極小波束を初期

値とした場合には局在化の影響によりこれほどの一致を示すことはない（高橋, 首藤
 物性研究 vol. 56, No. 2, 144）. 特に, 局在化のある場合には座標の分散 $(\Delta q)^2$ の
 値分布に顕著な違いが現れた. 局在化のない場合の $(\Delta q)^2$ の値分布を見てみよう.
 図 2 (a), (b) は, $(\Delta q)^2$ の値分布をそれぞれ示したものである. ここで, 値分布
 に 2 つの山が現れるのは, 系の対称性の為 $(\Delta q)^2$ が外力の周期の影響を受けや
 すい為である. 前に報告した局在化のある場合に比べると著しく両者の一致の度合
 がよくなっているのが分かる. ただし, 量子系の値分布の方がわずかに山の高さが
 高くなっていて, 値分布の分散が小さくなっていることを示している. この事をよ
 く調べるために外力の周期毎の $(\Delta q)^2$ の値分布を見てみよう (図 3 (a), (b)).
 確かに, 量子系の方の値分布の分散が小さくなっている. この様な違いは, 分布関
 数の分布の平均値の揺らぎを見るような力学量 $\langle q \rangle$ にはほとんど見られることが
 なく, 分布の様子そのものが関係してくるような量 $(\Delta q)^2$ をみるときに現れる.
 分布関数のそのものの比較をする必要がある. 分布関数の量子古典対応で最もよい
 対応を示すのは伏見関数と粗視化された古典系の分布関数である. 図 4 (a), (b) にあ
 る時刻における伏見関数と粗視化された古典軌道アンサンブルを示す. 統計的な類
 似性を問題としているので完全な分布の一致を問題にする必要はないが, 伏見関数
 の方は干渉で出来た少数の大きな疑似波束で構成されているのに対し粗視化された
 古典軌道アンサンブルはたくさんの小さなクラスタの集まりになっている. 即ち,
 量子系には, 全体としては局在化のない場合にも”局所的な局在化”と言えるよう
 な量子効果が存在していると考えられる. 古典軌道アンサンブルの立場から考える
 と, この様な量子効果は各粒子の間に弱い引力が働いている事に対応しているよう
 みえる. 最近, P. Leboeuf は伏見関数のゼロ点のダイナミクスを記述する運動方程式
 を導きだし, 各ゼロ点の間には斥力が働いていることを示した. ゼロ点は主に干渉
 で出来た疑似波束の現れない所に存在すると考えられるので, この結果は局所的な
 局在化の存在を裏づけていると考えられる. この様な局所的局在化の影響は可積分
 系または近可積分系にも現れるのであろうか? 式 (1) の係数を $(a_1=1.0, a_2=$
 $1.0, a_3=0.25, \omega=0.7, \eta=0.08)$ にすると近可積分系が得られる. 図 5 (a), (b) に
 初期条件に極小波束 $(\langle q(0) \rangle = 1.5, \langle p(0) \rangle = 0)$ を選んだ $(\Delta q)^2$ の値分布
 を示す. 二つの値分布の分散はほぼ完全に一致し, 局所的な局在化の影響が現れな
 い事を示している. 可積分系または近可積分系では干渉によって生じた疑似波束は
 巨視的な対称性をもったトーラス上の流れに沿って運動するという制限を受けるた
 めに始めからある種の局在化を要求されていて, カオス領域で見られるような局所
 的な局在化の影響がみられないと解釈できる. 従って, 局在化が全体としては見ら
 れないような場合の古典的な極限では古典軌道アンサンブルは最もよい近似を与え,
 この場合の可積分系と強い非可積分系の違いは分布関数の分布の様子そのものとな
 るような力学量を観測したときにみられる局所的な局在化の影響を古典軌道アン
 サンブルを物差しとして調べることによりわかる. 古典軌道アンサンブルが与える
 描像がどのような状況で有効であるかをより深く調べるためにプランク定数を変化さ
 せた時の近似精度について可積分系とカオス領域における違いを考慮しながら研究
 することが今後の課題である.

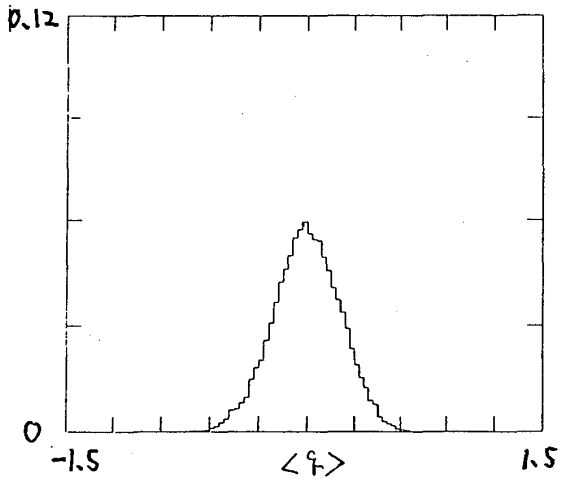


図 1 (a) $\langle q \rangle$ の値分布
量子系

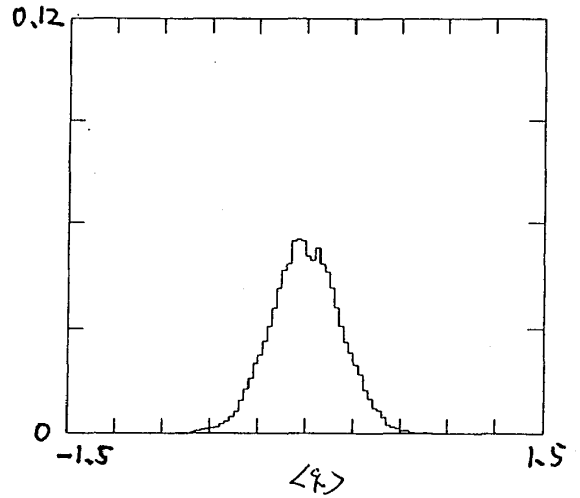


図 1 (b) $\langle q \rangle$ の値分布
古典軌道アンサンブル

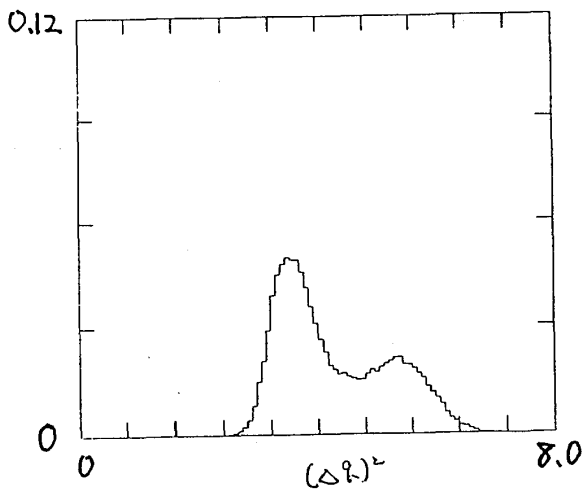


図 2 (a) $(\Delta q)^2$ の値分布
量子系

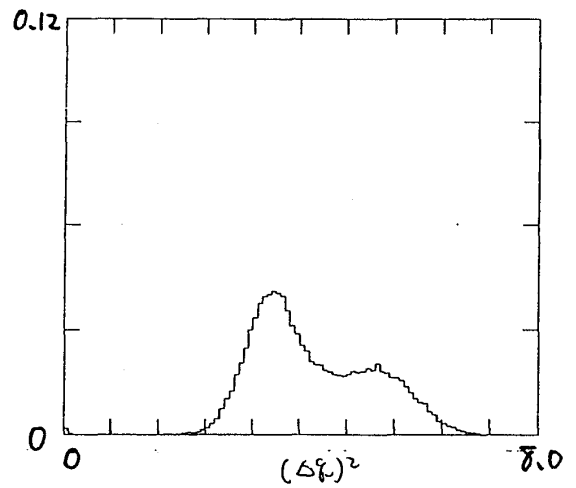


図 2 (b) $(\Delta q)^2$ の値分布
古典軌道アンサンブル

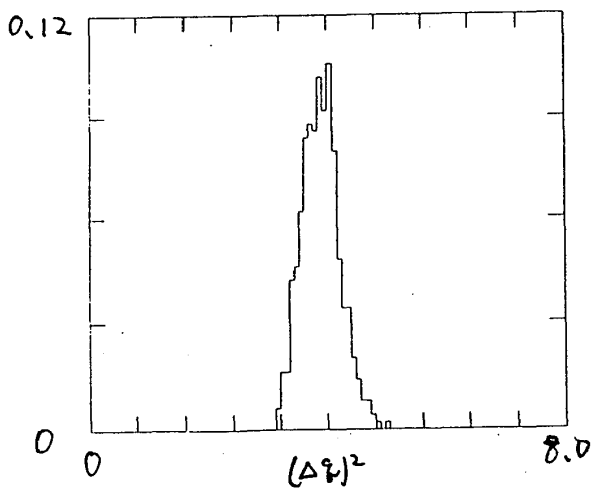


図 3 (a) ストロボ画像上の
 $(\Delta q)^2$ の値分布
量子系

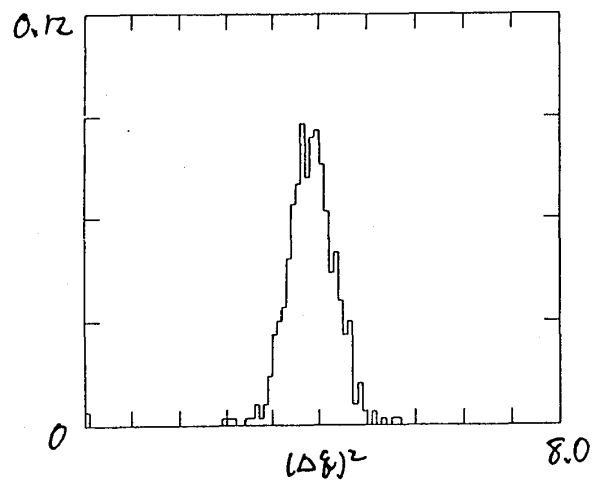


図 3 (b) ストロボ画像上の
 $(\Delta q)^2$ の値分布
古典軌道アンサンブル

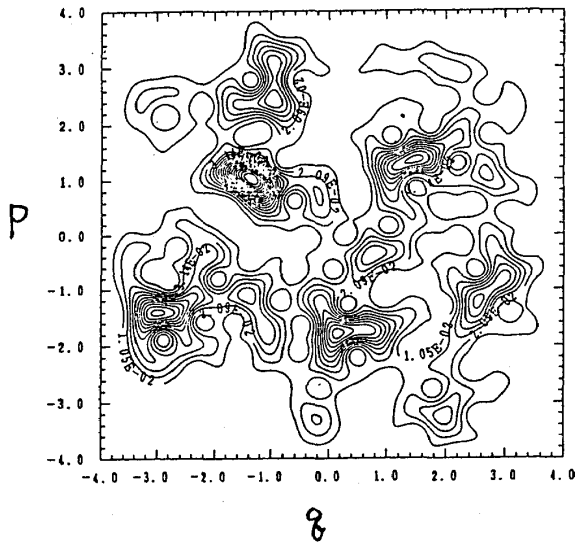


図 4 (a) 伏見関数

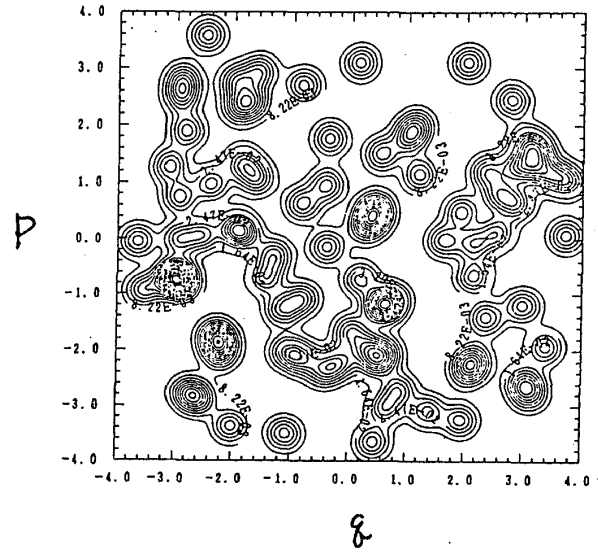


図 4 (b) 粗視化された古典軌道
アンサンブル

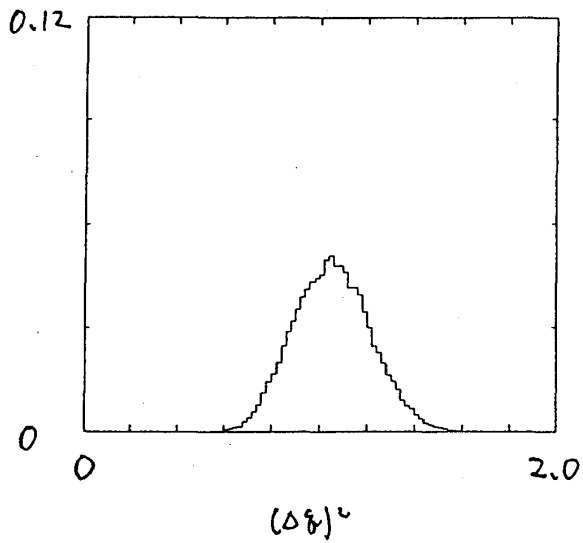


図 5 (a) 近可積分系における
 $(\Delta q)^2$ の値分布
量子系

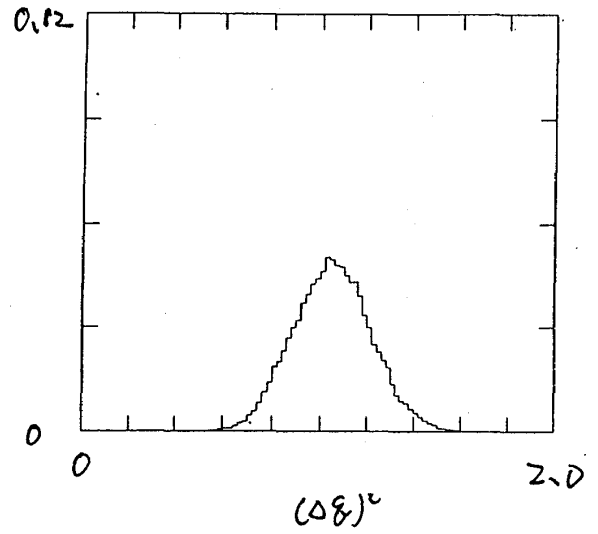


図 5 (a) 近可積分系における
 $(\Delta q)^2$ の値分布
古典軌道アンサンブル