ランダム行列理論と直交多項式の数理

東大・理　　永尾　太郎

ランダム行列アンサンブルは厳密な保存量をもたないハミルトニアンの表現行列を特徴づけるために導入される、確率分布関数

$$P(M)dM$$

に従って分布する行列 M の集合である[1-4]。最もよく知られているのはガウシアンアンサンブル

$$P(M) = e^{-\mathrm{Tr}M^2}$$

である。このアンサンブルは行列要素の間に相関をもたないため非現実的であるといわれている。しかしエネルギー準位相関の局所的な性質（たとえば最近接間隔分布）に関しては実験的に知られている事実（準位反発の効果）を良く再現する。そこで、どうすれば局所準位相関を保ったままでガウシアンアンサンブルを変形し行列要素の間の相関を取り入れられるかが問題となる。

そのような変形されたアンサンブルとして有望なものが Balian によって提案されている[5]。Balian は $P(M)$ のもつ情報量

$$\mathcal{I}(P(M)) = \int dM P(M) \log P(M)$$

が与えられた準位密度 $\rho(x)$ を保つ条件下で最小化されることを要請した。最小化の条件は

$$\delta[\mathcal{I}(P(M)) + \int dx \lambda(x)\rho(x)] = 0,$$

になる。ここで $\lambda(x)$ は Lagrange 未定乗数である。この条件から

$$P(M) = e^{-\mathrm{Tr}\lambda(M)}$$

がわかる。固有値 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の分布関数 $P(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ はこの $P(M)$ から

$$P_{N\beta}(x_1, \cdots, x_N) = e^{-\beta H},$$

$$H = \sum_{i=1}^{N} V(x_i) - \sum_{i<j}^{N} \log | x_i - x_j |, \quad -\infty < x_1, \cdots, x_N < \infty.$$

となる[4]。$\beta = 1, 2, 4$ はそれぞれ実対称、複素エルミート、自己双対四元数行列に対応する。ここで $V(x)$ は

$$V(x) = \lambda(x) \quad \text{at} \quad \beta = 1,$$
$$V(x) = \lambda(x)/2 \quad \text{at} \quad \beta = 2, 4$$

のように決められる。この確率分布関数の性質は以下の通りである。

(1) $V(x) \simeq \int dy\rho(y)\log\mid x-y\mid$.

(2) 基底の取り替えに対して不変。

(3) 行列の各要素の分布は独立ではない。($V(M)\propto M^2$ のときだけ独立になる。)

Balian の確率分布関数は解析的に取り扱うことができる。ここでは例として直交アンサンブルを考えよう。$N=2\nu$ (偶数) とする。求めたい物理的に意味のある量は

(1) 相関関数

$$I_N^{(k)}(x_1,\cdots,x_k)=\frac{1}{(N-k)!}\int\cdots\int P_N(x_1,\cdots,x_N)dx_{k+1}\cdots dx_N$$

(2) 準位密度

$$\rho(x_1)\equiv\lim_{N\to\infty}[I_N^{(1)}(x_1)/I_N^{(0)}].$$

(3) 局所 k 次相関関数

$$L^{(k)}(w;\xi_1,\cdots,\xi_k)\equiv\lim_{N\to\infty}(\frac{I_N^{(0)}}{I_N^{(1)}(w)})^k[I_N^{(k)}(x_1,\cdots,x_k)/I_N^{(0)}],$$

$$x_i=w+\frac{I_N^{(0)}}{I_N^{(1)}(w)}\xi_i.$$

である。

モニック歪直交多項式を次のように定義する。

$$R_n(x)=x^n+\cdots,$$

ただし

$$< R_{2m}(x),R_{2n+1}(y)>_R=-< R_{2n+1}(x),R_{2m}(y)>_R=r_m\delta_{mn},$$

$$< R_{2m}(x),R_{2n}(y)>_R=0,$$

$$< R_{2m+1}(x),R_{2n+1}(y)>_R=0,$$

ここで

$$< f(x),g(y)>_R\equiv\frac{1}{2}\int I[f(x),g(x)]dx,$$

$$I[f(x),g(y)]\equiv\int_{-\infty}^{x}e^{-V(x')}f(x')dx'e^{-V(y)}g(y)-\int_{-\infty}^{x}e^{-V(x')}g(x')dx'e^{-V(y)}f(y).$$

そのとき相関関数は

$$I_{2\nu}^{(k)}(x_1,x_2,\cdots,x_k)=\frac{(2\nu)!(\nu-k)!2^\nu}{\nu!(2\nu-k)!}(\prod_{m=0}^{\nu-1}r_m)\sqrt{\det F}.$$

ここで

$$F_{ij} = f(x_i, x_j), \qquad i, j = 1, \cdots, k,$$

$$f(x_i, x_j) \equiv \begin{bmatrix} S(x_i, x_j) & I(x_i, x_j) \\ D(x_i, x_j) & S(x_j, x_i) \end{bmatrix},$$

$$S(x, y) = \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{1}{2r_m} I[R_{2m}(x), R_{2m+1}(y)],$$

$$I(x, y) = -\int_{-\infty}^{y} S(x, y')dy',$$

$$D(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} S(x, y)$$

のように表される[6-9]。しかし一般の $V(x)$ に対して準位密度と局所相関関数を計算することはできていない。そこで $V(x)$ を特定して考えることにする。($V(x) = x^2$ ならガウシアンアンサンブルである。) ここではラゲール直交アンサンブル

$$\begin{aligned} V(x) &= x, & 0 < x < \infty, \\ &= \infty, & otherwise. \end{aligned}$$

をとりあげる[9,10]。対応するモニック歪直交多項式は

$$R_{2m}(x) = \frac{1}{2m+1} C'_{2m+1}(x),$$

$$R_{2m+1}(x) = C_{2m+1}(x) - \frac{2a+2m+1}{4} C'_{2m}(x),$$

ただし

$$C_n(x) = \frac{n!}{(-2)^n} L_n^{(2a)}(2x),$$

$$r_n = 2^{-2a-4n-2}\Gamma(2n+1)\Gamma(2a+2n+2).$$

となる。これを用いると、相関関数の表式は

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \sum_{m=0}^{\nu-1} \frac{1}{2r_m} I[R_{2m}(x), R_{2m+1}(y)] \\ &= e^{-x}e^{-y} \frac{1}{2h_{2\nu-1}} \frac{C_{2\nu}(x)C_{2\nu-1}(y) - C_{2\nu-1}(x)C_{2\nu}(y)}{x-y} \\ &- e^{-x}e^{-y} \frac{1}{8\nu h_{2\nu-1}} C_{2\nu-1}(x)C'_{2\nu}(y) \\ &+ e^{-y} \frac{1}{8\nu h_{2\nu-1}} \int_0^x e^{-x} C_{2\nu-1}(x)dx C'_{2\nu}(y) \\ &+ e^{-y} \frac{1}{8\nu h_{2\nu-1}} \frac{\Gamma(2\nu)}{2^{2\nu-1}} C'_{2\nu}(y), \end{aligned}$$

ただし

$$C_n(x) = \frac{n!}{(-2)^n} L_n^{(0)}(2x),$$

$$h_n = \frac{n!\Gamma(n+1)}{2^{2n+1}}$$

から得られる。右辺は有限個の直交多項式 (ラゲール多項式) で書かれているので、ラゲール多項式の漸近形[11]を使って準位密度と局所相関関数が評価される。それは以下のようになる。

$$\rho(x) = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2N}{x}}, \qquad 0 < c < x < R < \infty,$$

$$L_1^{(k)}(w; \xi_1, \cdots, \xi_k) = \sqrt{\det \tilde{F}}, \qquad 0 < c < w < R < \infty,$$

ただし

$$\tilde{F}_{ij} = \tilde{f}(\xi_i, \xi_j), \qquad i, j = 1, \cdots, k,$$

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \begin{bmatrix} \tilde{S}(\xi, \eta) & \tilde{I}(\xi, \eta) \\ \tilde{D}(\xi, \eta) & \tilde{S}(\eta, \xi) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{S}(\xi, \xi) = 1, \quad \tilde{D}(\xi, \xi) = \tilde{I}(\xi, \xi) = 0,$$

$$\tilde{S}(\xi, \eta) = \frac{\sin[\pi(\xi - \eta)]}{\pi(\xi - \eta)},$$

$$\tilde{D}(\xi, \eta) = \frac{d}{d(\xi - \eta)}[\frac{\sin[\pi(\xi - \eta)]}{\pi(\xi - \eta)}],$$

$$\tilde{I}(\xi, \eta) = -\frac{1}{2} + \int_0^{\xi - \eta} \frac{\sin[\pi(\xi - \eta')]}{\pi(\xi - \eta')} d(\xi - \eta').$$

局所相関関数の表式はガウシアンアンサンブルのときと一致しているので、この場合については Balian のアンサンブルの局所準位相関の普遍性が証明された。このように歪直交多項式の漸近形の理論と Balian のアンサンブルの局所準位相関の普遍性が密接に結びついていることがわかる。

今後の課題としては

(1) より一般的な $V(x)$ に対する相関関数の漸近形を評価するための数学的な理論を発展させること

(2) 量子系のハミルトニアンの行列要素の分布と Balian の分布関数を準位密度を一致させた上で比較すること

などがある。

References

1) E. P. Wigner: Proc. Cambridge Philos. Soc. **47** (1951) 790.
2) C. E. Porter: *Statistical theories of spectra: fluctuations* (Academic Press, 1965).

3) T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey and S. S. M. Wong: Rev. Mod. Phys. **53** (1981) 385.
4) M. L. Mehta: *Random Matrices* (2nd edition, Academic Press, 1990).
5) R. Balian: Nuovo Cimento **B57** (1968) 183.
6) F. J. Dyson: Comm. Math. Phys. **19** (1970) 235.
7) F. J. Dyson: J. Math. Phys. **13** (1972) 90.
8) M. L. Mehta: J. Math. Phys. **17** (1976) 2198.
9) T. Nagao and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **60** (1990) 3298.
10) T. Nagao and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn. **61** (1991).
11) G. Szegö: *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society, 1959).