特別寄稿

非弾性粒子が作るクラスター*

志田晃一郎，†川合敏雄
武蔵工業大学，†慶應義塾大学理工学部

(1992年4月14日受理)

概要

多数の粒子がくっつきあったものをクラスターと呼ぶ．この論文では，粒子の状態を表す相空間内の同一の点，あるいは無視しうるくらいの広がりの中に複数の粒子が集まっている時，それをクラスターと定義する．もっと具体的に，一箇所に集まって同じ方向に同じ速度で運動する粒子の集まりをクラスターと考えても差しつかえない．クラスター形成は実験室内に限らず地球上，さらに宇宙の至るところで見られる重要な物理現象である．非弾性衝突も巨視的な世界に普遍的な現象である．けれども，ものとものとの衝突は秩序を壊し系を乱雑にするという印象があるので，衝突によってクラスターができるというのは常識に反するような感じがする．弾性衝突であれば確かにクラスターを作ることはない．だが非弾性衝突の場合には，エネルギーの散逸によってその考えにくいことが起こるのである．本研究の狙いは，非弾性衝突はむしろ系に秩序をもたらすということを実証することである．そのために私達はこの論文を通じて，はじめランダムな粒子の配置が，非弾性衝突によってクラスターを形成する現象を調べていく．

本論文は扱う対象によって２部に分けられる．第１部では自由空間内の非弾性多体系を扱い，第２部では中心重力場中のそれを扱う．

まず第1章で私達は一次元空間内で非弾性衝突する粒子という理想的な例について調べる．そしてクラスターが形成されること，さらに多数の粒子からなるクラスターは，一つ

* 本稿は，編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である。

一つの粒子の反発係数が0でなくても，あたかも完全非弾性であるかのように，入射粒子を吸収しながら成長することを示す．クラスターが成長するためにはそのクラスターの粒子数がある臨界より大きくなければならず，臨界より少ない粒子からなるクラスターは入射粒子によって散らされてしまう．また，完全非弾性粒子の作るクラスターの粒子数には，粒子等分配則ともいうべき単純な法則が見られる．

ここで実験的に見つけられたクラスターの統計的性質は，慶應義塾大学理工学部数理工学科の渋谷政昭教授らによって数学的に証明されている．その証明を次の第2章に示す．

第3章では，二，三次元空間においてもクラスタが形成されることを計算実験で示す．その統計的性質は，いまだ整理できるほど単純な形では得られていない．この章は日本物理学会で発表されたが論文としては未発表である．

第4章が第2部になる．再び物理現象に戻り，ケプラー軌道をまわる非弾性粒子のクラスター形成について論じる．大惑星に見られる環は，細い同心円状のリングレットが集まって出来ている．これまで，環を構成する粒子同士の非弾性衝突にはリングレットを壊す作用があると考えてられてきたので，非弾性衝突に逆らってリングレットを形成する別の作用が必要であると考えられてきた．私達は環の最も単純なモデルを用いて，非弾性衝突そのものがリングレットを形成する作用を持つことを理論的に示す．また，シミュレーションによってリングレット形成を実証する．独自に開発したものも含め3種類の手法を用い，リングレット形成を視覚的に示した．

保存系の振舞いを調べる強力な道具として統計力学がある．けれども散逸系を調べるために同様に強力な手法はまだ見当たらず，本研究のように個々に考察せざるを得ない状況である．本研究が，散逸系の統計力学を導くための何かの取り掛かりになれば幸いである．

なお，本論文は志田の学位論文をもとにし，計算機アルゴリズムに関する章を除くなど，構成を変え，一部修正を加えたものである。

第 1 章

一次元空間で非弾性粒子が作るクラスター

1.1 概要

この章で私達は，一次元空間内で非弾性衝突する粒子という理想的な例について調べる [19]．そしてクラスターが形成されること，さらに多数の粒子からなるクラスターは，一つ一つの粒子の反発係数が 0 でなくても，あたかも完全非弾性であるかのように入射粒子を吸収しながら成長することを示す．クラスターが成長するためには，そのクラスターに属する粒子数（クラスターサイズ）がある臨界より大きくなければならず，臨界より小さいサイズのクラスターは入射粒子によって散らされてしまう．

1.2 モデル

本章で私達は以下のことを仮定する．

1. 運動は一次元の線上にある．
2. 粒子は大きさを持たない点であり，初めすべて等しい質量を持つ．
3. 粒子間力は衝突時の撃力のみである．
4. 粒子の融合や破壊は考えない．

粒子 i と $i+1$ の衝突は $x_i = x_{i+1}$ の時起こる．その瞬間それらの速度 u_i, u_{i+1} は次の非弾性衝突と運動量保存の法則にしたがって u'_i, u'_{i+1} に変る．

$$
\begin{aligned}
u'_{i+1} - u'_i &= -e(u_{i+1} - u_i), \\
u'_{i+1} + u'_i &= u_{i+1} + u_i
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

これらは,

$$
\begin{aligned}
u_i' &= \alpha u_i + \beta u_{i+1}, \\
u_{i+1}' &= \beta u_i + \alpha u_{i+1},
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

ただし,

$$
\begin{aligned}
\alpha &= (1-e)/2, \\
\beta &= (1+e)/2, \\
\alpha + \beta &= 1
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

と表せる. 反発係数 e は物性値で

$$0 \leq e < 1 \tag{1.4}$$

の範囲の定数であるとする.

1.3 数値計算

N粒子の初期条件は,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} \tag{1.5}$$

を満たし, それらは, 一様乱数 $y_i(0 < y_i < X)$ を用いて

$$x_i = x_{i-1} + y_i \tag{1.6}$$

のように順番に生成する. 初期の速度 u_i は平均 0 で分散σ^2 の正規乱数をもちいて生成し,

$$\langle u_i^2 \rangle = \sigma^2 \tag{1.7}$$

を満たす. Xもσも 1 とおいて一般性を失わない.

シミュレーションのパラメータは e と Nである. 図 1.1 は $N = 101, e = 0.5$ の時の粒子の軌道を示す. 粒子が段々とほぼ同位置同速度にあるようなクラスターを形成することが分かる.

クラスターは段々成長する. 一つのクラスターを構成する粒子の数をクラスターのサイズと定義する. 私達はクラスター内部での衝突がある時刻以降極めて頻繁に起こり, シミュレーションがその時刻より先に進まなくなることに気付いた. 頻繁に衝突する粒子のグループ間の衝突間隔及び相対速度も距離もどんどん小さくなる一方である. これより完全なクラスター（同じ座標と速度を持つ粒子の集まり）が形成されることを確認した. 完全なクラスターは入射粒子を吸収する. 引力を持たない粒子にあって, この現象は興味深い. 速い粒子が打ち込まれればクラスターはバラバラになりそうに思われるが, 非弾性の場合そうはならない. 図 1.2には速度空間でのクラスタリングの様子を幾つかの e について示す.

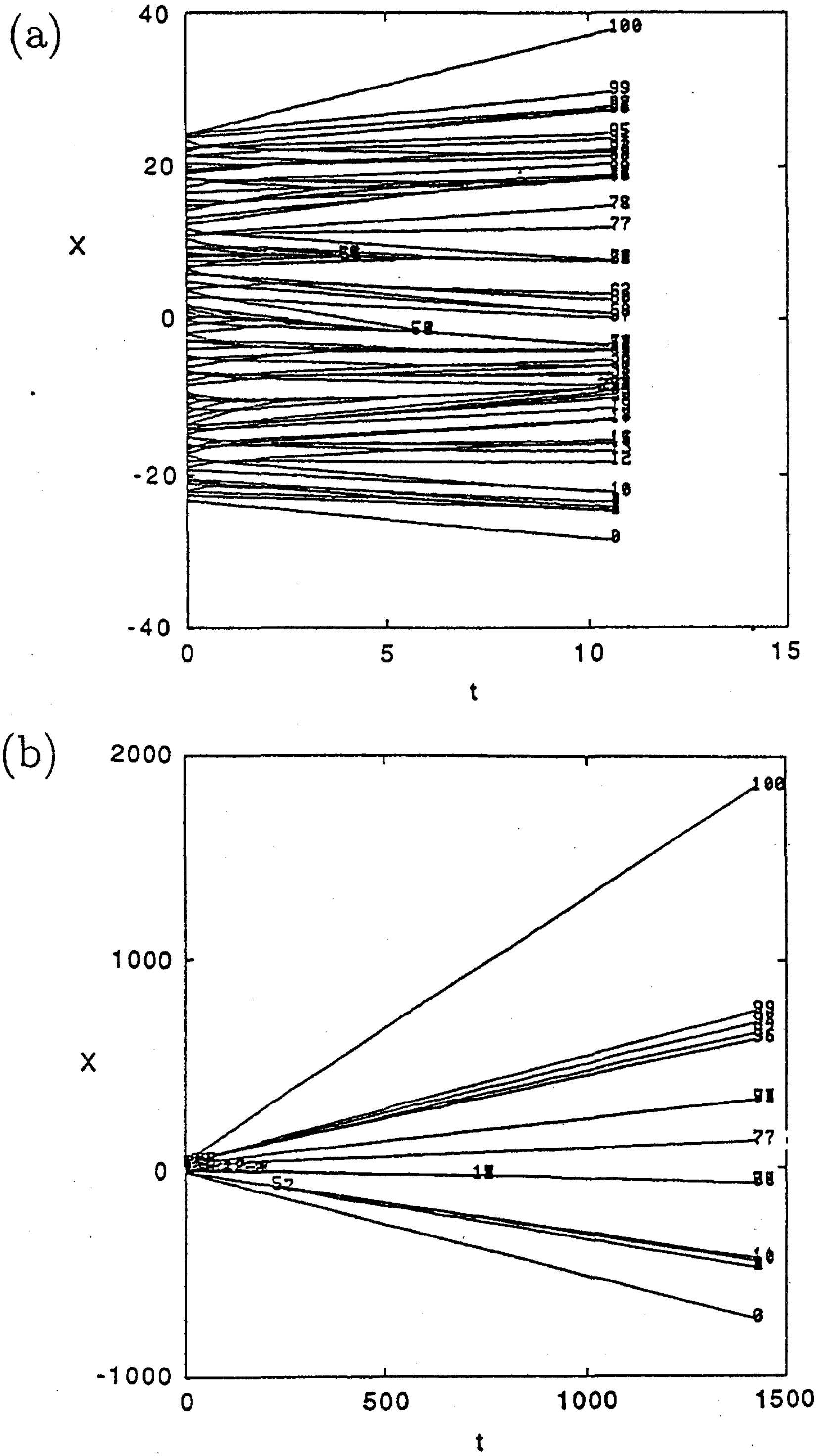


図 1.1: 粒子の軌道.
$N = 101, e = 0.5$ としたシミュレーション結果の x-t グラフである. (a) は 1000 回目の衝突まで $(0 < t < 10.6)$. (b) は $t < 1425.2$ に起こった最後の衝突（3642 回目）までを示す.

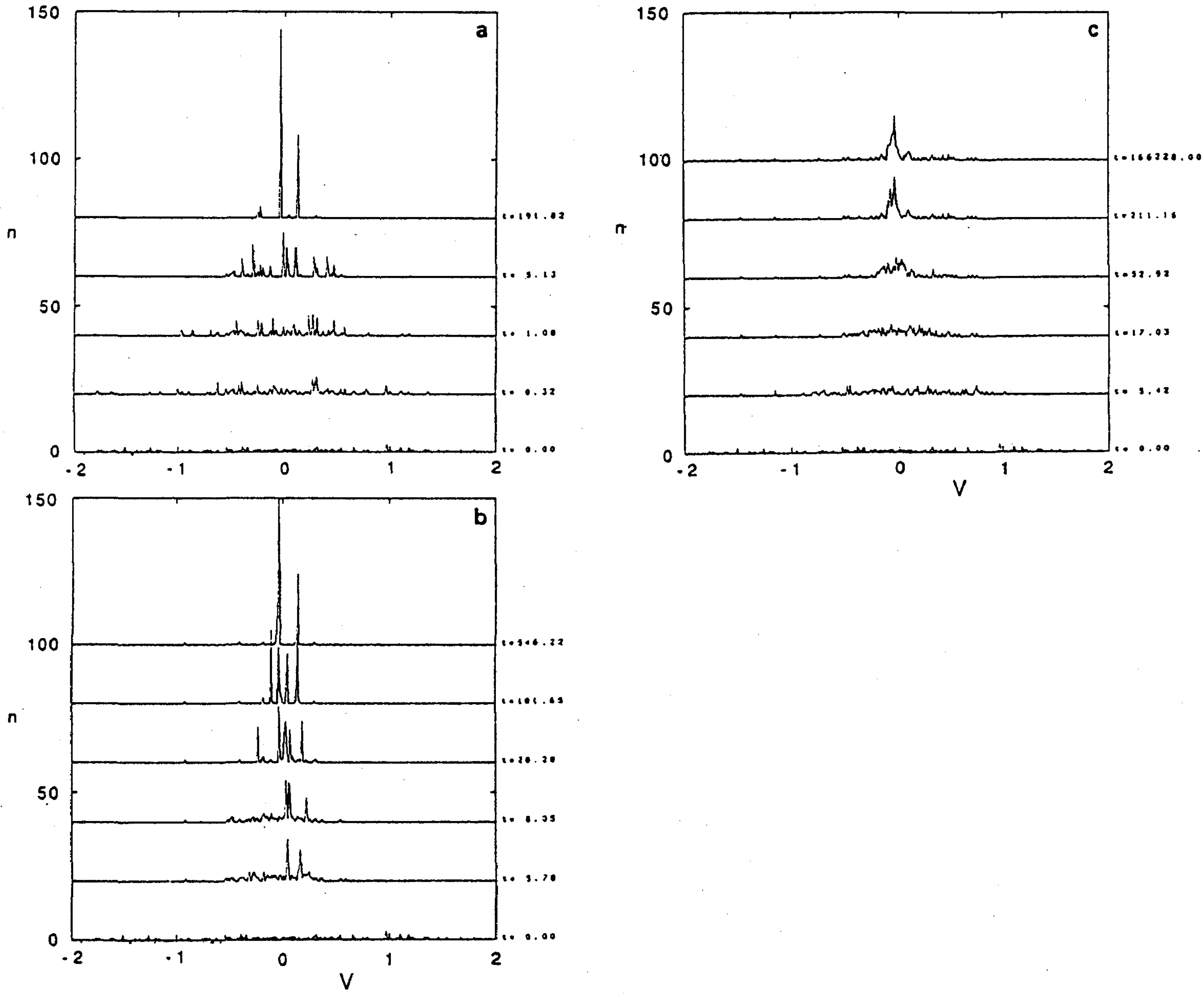


図 1.2: 速度空間でのクラスタリング.
(a) $e = 0.0$. (b) $e = 0.5$. (c) $e = 0.9$. どれも $N = 100$ で初期条件は等しい.

1.4 クラスター形成の分析

粒子が2つしかないときには非弾性衝突してもクラスターはできない．けれども3つ以上の粒子があれば e の値が条件を満たせばクラスターができる．図1.3は $e = 0.5$ のとき9粒子のクラスターができる様子を示す．クラスターは臨界粒子数 N_c より多くの粒子からなれば成長しそれ以下ではバラバラになる．私達はまず考察し，次に実験によって N_c を e の関数として決定する．

1.4.1 2粒子クラスターの分析

まず2粒子のならびに（粒子1,2）に第3の粒子（粒子0）が相対速度1で打ち込まれる場合を考える．相対速度を $w_i \equiv u_i - u_{i-1}$ と定義する．粒子 $i-1$ と i は $w_i < 0$ であれば衝突し $w_i > 0$ であれば衝突しない．衝突が起こるとそれまで負だった相対速度 w_i が正に変るとともに，$w_{i\pm1}$ にも影響する．まとめると，

$$
\begin{aligned}
w'_i &= -ew_i, \\
w'_{i\pm1} &= w_{i\pm1} + \beta w_i
\end{aligned}
\tag{1.8}
$$

となる．これを今の問題に適用すると，粒子0,1の衝突では

$$
\begin{aligned}
w'_1 &= -ew_1, \\
w'_2 &= w_2 + \beta w_1
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

粒子1,2の衝突では

$$
\begin{aligned}
w'_1 &= w_1 + \beta w_2, \\
w'_2 &= -ew_2
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

となる．初期条件は

$$
W \equiv \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.11}
$$

最初の数回の衝突を追跡すると，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{(1)} &= \begin{pmatrix} -e & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e \\ -\beta \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 \\ e\beta \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{(3)} &= \begin{pmatrix} -e & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} e\alpha^2 \\ -\beta(\alpha^2 - e) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

これより 0,1 衝突と 1,2 衝突が交互に起こっており，この後もずっとそれが続くと推定される．最終的には 2 つの場合が考えられる．

1. w_1 と w_2 はどちらも非負になる．衝突はやみ，粒子はバラバラにはなれていく．
2. w のいずれかは負であり続け，衝突は永久に続く．この時 w_1, w_2 は 0 に近付く．無限の衝突が瞬間的に起こり，3 粒子のクラスターができる．

交互に衝突すると仮定してどちらが正しいかを検討する．遷移行列を

$$A \equiv \begin{pmatrix} -e & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix},\ B \equiv \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & -e \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

とおくと $\boldsymbol{W}$ の数列は $\boldsymbol{W}^{(1)} = A\boldsymbol{W}^{(0)}, \boldsymbol{W}^{(2)} = B\boldsymbol{W}^{(1)}, \boldsymbol{W}^{(3)} = A\boldsymbol{W}^{(2)}, \ldots$; 一般に，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{W}^{(2m)} &= (BA)^m \boldsymbol{W}^{(0)}, \\ \boldsymbol{W}^{(2m+1)} &= A(BA)^m \boldsymbol{W}^{(0)} \end{aligned} \tag{1.14}$$

とかける．$(BA)^m$ や $A(BA)^m$ の行列要素は BA の固有値 λ_1, λ_2 を用いて，

$$c_1\lambda_1^m + c_2\lambda_2^m \tag{1.15}$$

と表せる．この場合には

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} \alpha^2 & \beta \\ -e\beta & -e \end{pmatrix}, \\ \lambda_1 &= \tau + \mu, \\ \lambda_2 &= \tau - \mu \end{aligned} \tag{1.16}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\alpha^2 - e}{2} = \frac{1 - 6e + e^2}{8}, \\ \mu &= \sqrt{\tau^2 - e^2} \end{aligned} \tag{1.17}$$

である．以下の議論で相対速度

$$\begin{aligned} w_1^{(2m)} &= \alpha\lambda_1^m + \beta\lambda_2^m, \\ w_2^{(2m+1)} &= \alpha'\lambda_1^m + \beta'\lambda_2^m \end{aligned} \tag{1.18}$$

が任意の m について負であることを示す．式 1.18 は無限に続く交互衝突を仮定している．

係数 a, b, a', b'は数列の最初の２つの項から決定される．即ち

$$
\begin{aligned}
w_1^0 &= a+b &&= -1, \\
w_1^2 &= a\lambda_1 + b\lambda_2 &&= -\alpha^2, \\
w_1^1 &= a'+b' &&= -\beta, \\
w_1^3 &= a'\lambda_1 + b'\lambda_2 &&= -\beta(\alpha - e^2)
\end{aligned}
\tag{1.19}
$$

より，a, b, a', b'を解いて，

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ -\alpha^2 \end{pmatrix} &&= \frac{1}{2\mu}\begin{pmatrix} \lambda_2 - \alpha^2 \\ -\lambda_1 + \alpha^2 \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -\beta \\ -\beta(\alpha - e^2) \end{pmatrix} &&= \frac{\beta}{2\mu}\begin{pmatrix} \lambda_2 - \alpha^2 + e \\ -\lambda_1 + \alpha - e^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{1.20}
$$

となる．クラスターが形成するためには固有値が実数でなければならない．でないと，

$$
w = a\lambda_1^m + b\lambda_2^m = a\lambda_1^m + \overline{a}\overline{\lambda_1^m} = 2|a||\lambda_1|^m \cos(m\theta + \delta) \tag{1.21}
$$

となり，クラスター形成の条件を破ってしまう．λが実数である条件は式1.17から得られ，

$$
0 \le e \le 7 - 4\sqrt{3} \approx 0.0718 \tag{1.22}
$$

となる．以下 e がこの範囲にあるとする．すると，

$$
\lambda_1 \ge \lambda_2 > 0 \tag{1.23}
$$

であり，$a + b(\lambda_1/\lambda_2)^m$の値は m が増えるにつれて $a + b(m = 0)$ から $a(m = \infty)$ まで単調にかわる．従ってクラスター形成の条件は次のようになる．

$$
a + b < 0,\ \ a' + b' < 0,\ \ a < 0,\ \ a' < 0 \tag{1.24}
$$

式1.19より初めの２つの条件は既に満たされていることが分かる．残りの２つは，

$$
\lambda_2 - \alpha^2 < 0,\ \ \lambda_2 - \alpha^2 + e < 0 \tag{1.25}
$$

となるが，後者が満たされれば前者も満たされるから本質的には１つである．$\alpha^2 - e = 2\tau$, $\lambda_2 = \tau - \mu$, $\lambda_1 = \tau + \mu$を用いてこの条件を書き換えると，

$$
\lambda_2 - \alpha^2 + e = \lambda_2 - 2\tau = -\tau - \mu = -\lambda_1 \tag{1.26}
$$

となり，これは常に負である．

以上で $e \le 0.0718$ のとき衝突が無限に続き，２粒子クラスターが３粒子クラスターになることの証明を完了した．

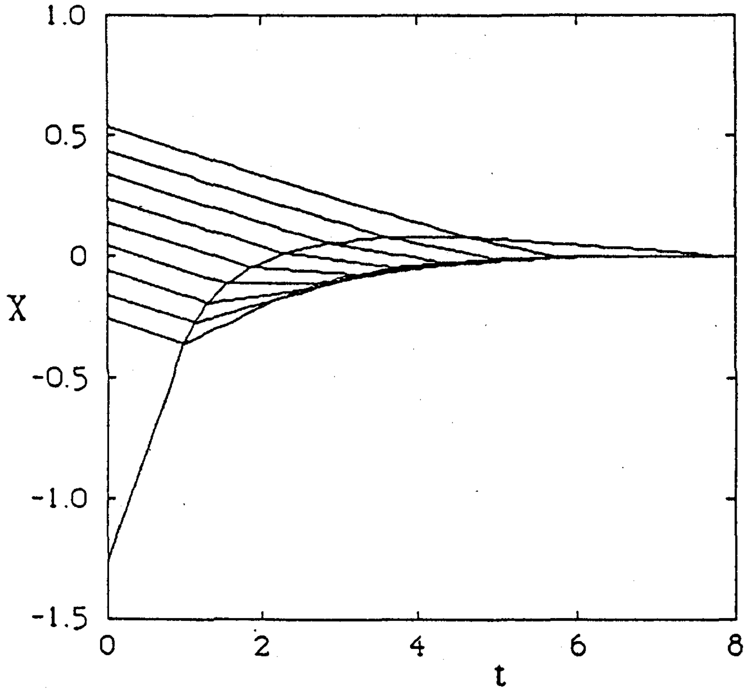


図 1.3: 9 つの粒子が入射粒子を吸収する．
グラフの右端で無限の衝突が起こり，粒子は一点に集中している．

1.4.2 初期条件の一般化

次に初めの相対速度が (w_1^0, w_2^0) である 3 粒子系を考える．これまで $w_2^0 = 0$ を仮定してきたが，ここでその制約を外そう．3 つの場合が考えられる．

1. w_1^0 と w_2^0 の両方とも正である．衝突は起こらずクラスターもできない．
2. w_1^0 と w_2^0 の両方とも負である．最初の衝突の後，w の一方は正になりもう一方は負のままである．よって次の場合に帰着する．
3. 一方の w が正でもう一方は負である．一般性を失わずに $\boldsymbol{W}^0 = (-1, w)$ ただし w は正，とおける．

この時クラスター生成の条件は

$$\begin{aligned} e &\leq 0.0718, \\ a + b &= -1 < 0, \\ a' + b' &= -\beta + w < 0, \\ a &= -(\beta^2/2 + \mu) + \beta w < 0, \\ a' &= -\lambda_1 \beta + (\beta^2/2 + \mu) w < 0 \end{aligned} \tag{1.27}$$

となる．w の係数が正であることに注意すれば，クラスター生成条件は

$$w < \min[\beta,\ \frac{\beta}{2} + \frac{\mu}{\beta},\ \frac{\lambda_1 \beta}{\beta^2/2 + \mu}] \equiv f(e) \tag{1.28}$$

となる．e が小さい極限では，近似的に[1]，

$$f(e) = (1-3e)/2 \tag{1.33}$$

となる．従って，w は e の臨界値には影響しない．

1.4.3 n 粒子クラスターが成長する条件

この節では2粒子クラスターについての分析を一般化し，n 粒子クラスターが成長するための反発係数 e の条件を求める．そのために一般の

$$W^{(m)} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}^{(m)} \tag{1.34}$$

を計算する．ここで

$$\begin{aligned} W^{(2m+1)} &= AW^{(2m)}, \\ W^{(2m+2)} &= BW^{(2m+1)}, \quad m = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{1.35}$$

[1] $e \ll 1$ を用いて

$$\beta \equiv (1+e)/2. \tag{1.29}$$

$$\begin{aligned} \mu = \tau &= \frac{\alpha^2 - e}{2} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{1-2e}{4} - e\right) = \frac{1-6e}{8}, \\ \beta^2/2 + \mu &\approx (1+2e)/8. \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \beta^2/2 + \mu &\approx (1+2e+1-6e)/8 = (1-2e)/4, \\ \lambda_1 = 2\tau &\approx (1-6e)/4, \\ \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2}{2} + \mu\right) &\approx \frac{(1-2e)/4}{(1+e)/2} = \frac{1-3e}{2}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

また，

$$\frac{\lambda_1\beta}{\beta^2/2+\mu} \approx \frac{(1-6e)/4 \cdot (1+e)/2}{(1-2e)/4} = \frac{1-3e}{2}. \tag{1.31}$$

これらを比較して

$$\min[(1.29),(1.30),(1.31)] = (1-3e)/2. \tag{1.32}$$

であり，かつ

$$A = \begin{pmatrix} -e & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \beta & 1 & \beta & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -e & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \beta & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times n},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \beta & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -e & 0 & 0 & \cdots \\ \beta & 1 & \beta & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -e & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{1.36}$$

である．初期条件は

$$\boldsymbol{W}^{(0)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n} \tag{1.37}$$

とした．各々の衝突について私達がおいた基本的な仮定

$$\begin{aligned} w_{2i-1}^{2m} &< 0, \\ w_{2i}^{2m-1} &< 0, \quad i, m = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.38}$$

が成り立っているかどうかを調べ，成り立っていれば，さら A または Bを掛けて計算を進めた．その結果図 1.4に示す臨界値より反発係数 e が小さければ，衝突は，$w_i = 0$ となるまで（実際には $w_i < 10^{-50}$）無限に続くことがわかった．反発係数が大きくなれば臨界クラスターサイズは大きくなる．クラスターの大きさが臨界より大きければ，クラスターはまるで反発係数が 0 であるかのように入射粒子をすべて吸収してしまう．

この結果は前出の図 1.3に示したクラスター形成のシミュレーション結果と適合している．もっとも図 1.3と本節で考察した場合では衝突の順序が異なるので，完全に等価ではない．クラスターができるかどうかはそれぞれの場合の衝突順序に明らかに依存する．

より簡単な議論から，必要条件は求まる．粒子 0 が打ち込まれた時の衝撃波面は図 1.3から分かるように速度β^nでクラスター内を伝わる．もしこの速度がクラスターの重心の速度 $1/(n+1)$ より速ければ，クラスターはできないだろう．この必要条件

$$\left(\frac{1+e}{2}\right)^n < \frac{1}{n+1} \tag{1.39}$$

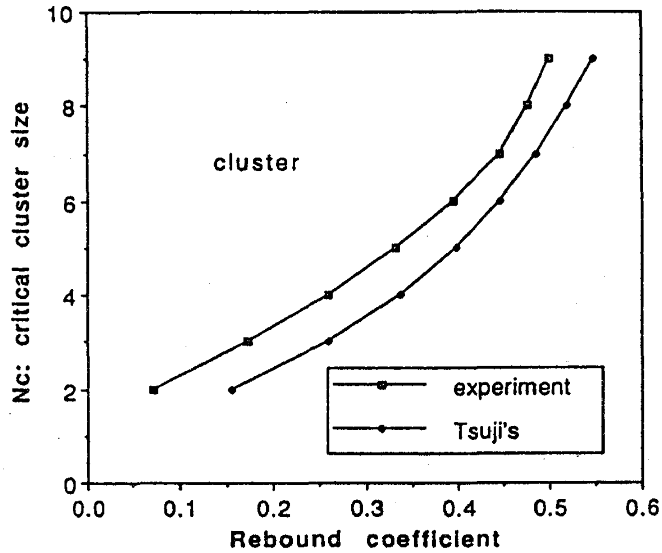


図 1.4: クラスター生成条件.
グラフの上側の領域ではクラスターが形成される. グラフの下側ではできない.

は辻[2]によるもので, 図 1.4を見ると, 計算実験によるクラスタリング条件グラフの下側すなわち散乱領域にあるが, 比較的良い近似になっている.

1.5 最終状態でのクラスター数と大きさの分布

前節までに, 臨界サイズ N_cよりもサイズの大きいクラスターは衝突により粒子や他のクラスターを完全非弾性的に吸収することを確かめた. 粒子数が非常に多い場合には, ほんの数個の粒子(例えば両端の粒子)を除いてほとんどすべての粒子はクラスターに含まれることになる. それゆえ粒子系の振舞いは $e=0$ の場合によって代表されると考えられる.

そこで $e=0$ の場合の計算実験を行なった. $N=8$ から $1,000$ までの 9 通りの場合を初期条件を変えてそれぞれ 100 回ずつ行ないその結果を集計した. 最後に残るクラスターの個数の平均$\langle M\rangle$を図 1.5に示す. 実験式は

$$\langle M\rangle = 0.6328 + 0.9994\ln N. \tag{1.40}$$

となった. この実験事実から, 粒子数が自然対数の底$\epsilon \cong 2.718$ 倍になると, クラスターの個数は平均して 1 増えるのではないかと推論できる. したがって最も大きいクラスターのサイズは

$$n_1 = N(\epsilon - 1) \tag{1.41}$$

[2]慶應義塾大学理工学部辻一彦助教授より私信

であるだろう．同様にして，2,3, ...番目に大きいクラスターのサイズは

$$\begin{aligned} n_2 &= N(\epsilon - 1)/e, \\ n_3 &= N(\epsilon - 1)/e^2, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.42}$$

一般に m 番目に大きいクラスターのサイズは

$$n_m = a \exp(m) \tag{1.43}$$

になっていると考えられる．両辺の対数をとって m で微分すれば，

$$dn/n = dm \tag{1.44}$$

となる．$dm = 1$ であることに注意すると，大きさ n のクラスターの個数の期待値として

$$E(n) = 1/n, \text{ または } nE(n) = 1 \ \ (n = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.45}$$

が得られる．これより

$$\langle M \rangle = \sum_{n=1}^{N} 1/n \tag{1.46}$$

$$\cong 0.5772 + \ln N \tag{1.47}$$

が得られ，これは式1.40と良く一致している．

式1.45の予想を実験で確かめた．$N = 1{,}000$ の場合を乱数を用いた 10,000 ケースの異なる初期条件で行なった集計結果を図1.6に示す．ある粒子がどのサイズのクラスターに最終的に属するかは全く等確率であるという興味深い結果が確かめられた．

1.6　議論及び結論

私達は反発係数 e で衝突する一次元非弾性 N 体系はクラスター（速度と位置を共有する粒子の集合）を形成することを見つけた．クラスターを形成する臨界サイズも決定した．臨界サイズを越えるクラスターは入射してくる粒子や他のクラスターを，完全非弾性であるかのように吸収する．衝突がやむまでクラスターは無限に成長する．この事実は私達に Alder[1] の相転移を思い出させる．Alder の相転移とは粒子間の引力がないのにある臨界条件の下で凝集（クラスタリングに対応する）が起こることである．私達の場合は Alder 転移と２点で異なっている．まず衝突が散逸的であること．次に運動が通常の統計力学では相転移があり得ないとされている一次元空間内にあることである [14].

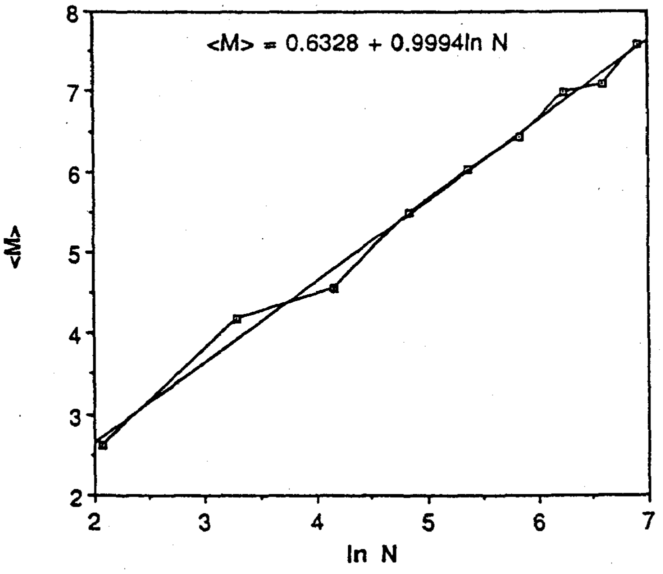


図 1.5: 平均クラスター数

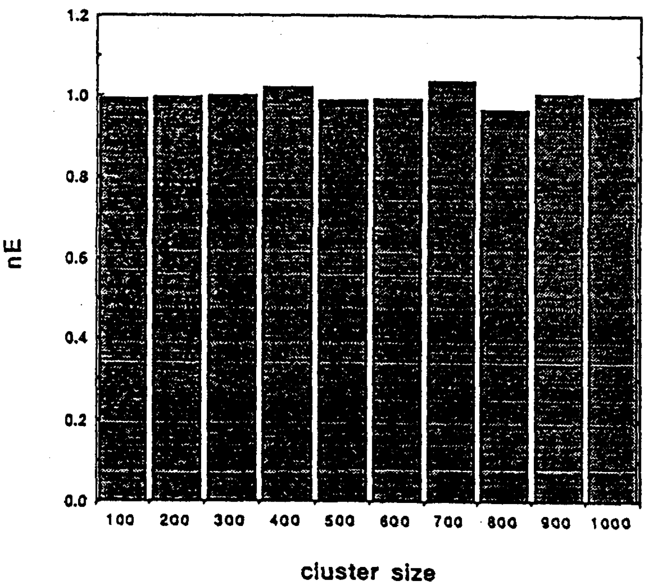


図 1.6: nEの実験値

クラスターの臨界サイズは反発係数に依存する．e の単調増加関数で $e \to 1$ で無限大に向かう．けれども $e < 1$ であれば有限の臨界サイズ N_c が存在する．系に充分な数の粒子があれば，ほとんどの粒子はいずれかのクラスターに属し，衝突は完全非弾性的になる．この意味で $e = 0$ の場合がクラスターの振舞いを代表する．

$e = 0$ の時には，N が唯一の変数である．最後に残るクラスターの数 M の平均は

$$\langle M \rangle = \sum_{n=1}^{N} 1/n \tag{1.48}$$

である．また大きさ n のクラスターの数の期待値は

$$E(n) = 1/n \tag{1.49}$$

である．

同様な関係は様々な場所に見られる．例えば人口が第 n 位の都市の人口とか長さ第 n 位の川の長さなどが同様の関係を持ち，Zipf の経験則 [29] と呼ばれている．本研究は更に一つの例を加えるものである．Zipf の経験則は様々な複雑な現象に近似的に成り立つものであるが，私達のモデルは厳密に定義された単純なモデルである．このモデルは散逸系の統計力学の一つの極限である．

ここで生じる新たな疑問は，

1. なぜ，クラスターは上のような単純な統計的性質を持つのか．
2. 2次元以上の空間内でもクラスターはできるか．できるとすれば，それはどのような性質を持つか．

前者については，私たちが実験的に求めた関係式1.47,1.45は，渋谷らによって任意の N について数学的に証明されている [21]．その証明は次の第2章で述べる．後者については第3章で，いままでに得られている暫定的な結果を示す．

第 2 章

一次元非弾性粒子の $1/n$ 分布の理論

2.1 はじめに

前章で私達は，一次元空間内の理想化された非弾性粒子の系を調べ，粒子の集合体であるクラスターができ，それがあたかも完全非弾性であるかのように入射粒子を吸収して成長することを見出した．さらに完全非弾性の場合に，最終状態での n 粒子クラスターの出現期待値が $1/n$ であること，全クラスター数の平均が

$$H_N \equiv \sum_{n=1}^{N} 1/n = \log N + \gamma + \mathcal{O}(1/N), \tag{2.1}$$

であることを見出した．ただし$\gamma \approx 0.5772$ は Euler の定数である．

この問題が順序つき変数の統計的見積りの問題に関係が深いことは注目に値する [3]．この章では上の結果とそれに加えさらにいくつかの定理を，数値実験より緩い仮定の下で証明する．クラスター数とそのサイズ分布に関する定理 2.1–2.3は，本質的には [3] に依っている．けれども，定理 2.4，2.5はクラスターサイズに関して得られた新しい結果である．また本章の定理と証明においては物理の用語を用いている．

2.2 問題の定義

問題： 一次元空間内の N粒子を考える．質量は m_iで，はじめ位置 x_iにあって速度 v_iをもつ $(i = 1, 2, \ldots, N)$．ただし，

$$-\infty < x_1 < x_2 < \cdots < x_N < \infty \tag{2.2}$$

というように順番になっており，$(v_1, v_2, \ldots, v_N)$ は連続かつ交換可能な分布関数を持つ乱数ベクトルである．粒子はとなりの粒子と衝突するまで等速直線運動する．粒子 i と $i+1$

が衝突すると，質量保存と運動量保存

$$m' = m_i + m_{i+1}, \tag{2.3}$$
$$v' = \frac{m_i v_i + m_{i+1} v_{i+1}}{m_i + m_{i+1}} \tag{2.4}$$

を満たしながら一つに融合する．粒子の分裂はないとする．

注 **2.1** 衝突は負の相対速度 $v_{i+1} - v_i$が存在する限り続く．衝突がやんだ時元々の粒子は融合して「クラスター」を形成している．最終状態ではいくつのクラスターができるだろうか？それらのクラスターのサイズ（融合した粒子の数）の分布はどうなっているだろうか？答えはもちろん初期条件によって変わるが，初期条件がランダムであれば統計的な答えは求まる．

注 **2.2** 速度分布が連続なので，二つ以上の初期速度が完全に一致していることはありえない．この章の議論では，となり合う粒子の相対速度が衝突の過程で *0* になることはないと仮定している．

注 **2.3** 初期速度 $(v_1, v_2, \ldots, v_{n)})$ の分布関数

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_N) = p\{v_1 \le a_1, v_2 \le a_2, \ldots, v_N \le a_N\}, \tag{2.5}$$

は Fの値が引数のあらゆる交換に関して不変である時,「交換可能」であるという．典型的な場合として，vが独立で同一の分布 F_0に従う場合，

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \prod_{i=1}^{N} F_0(a_i), \tag{2.6}$$

となるので，Fは交換可能である．または，もし Fが微分可能で，確率密度

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_N) = \frac{\partial^N}{\partial a_1 \cdots \partial a_N} F(a_1, a_2, \ldots, a_N) \tag{2.7}$$

が「球面的」($a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_N^2$ が等しければ fの値も等しいということ）であれば，Fは交換可能である．vが独立で球面的な確率分布を持つ場合はガウス分布になる．

2.3 衝突過程ダイアグラム

以下のようにして，問題における衝突過程を幾何的に描くことができる．

$$\xi_0 = \eta_0 = 0,$$
$$\xi_i = \sum_{j=1}^{i} m_j, \ \ i = 1, 2, \ldots, N, \tag{2.8}$$

および

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{i} m_j v_j, \quad i = 1, 2, \ldots, N \tag{2.9}$$

で定義する累積質量ξと累積運動量ηを座標軸とする$N+1$点の座標平面を定義する．図2.1に示すように点$P_i(\xi_i, \eta_i)$を順番に線分で結ぶ．線分$P_{i-1}P_i$は$m_i = \Delta\xi_{i-1}$と$m_i v_i = \Delta\eta_{i-1}$および速度$v_i = \Delta\eta_{i-1}/\Delta\xi_{i-1}$を表している．隣合う粒子$i$と$i+1$は$v_i > v_{i+1}$のときだけ衝突する．図2.2は二つの線分のとり得る配置を示す．衝突するかどうかは線がP_iのところで上に凸か下に凸かだけで決まる．

衝突する順番は相対距離と相対速度の両方に依存する．最初の衝突がi番目と$i+1$番目の粒子だったとする．その結果融合してできた粒子は線分$P_{i-1}P_{i+1}$で表され，線全体の他の部分には影響しない．注2.2より，図2.2の2つの線分はかならず向きが違っている．よって，衝突は図2.1の線が至るところで下に凸になるまで続く．最終状態は図2.1に示してある．最終状態を表す線は，Pの包絡線である．

最終状態が包絡線であるということから，クラスターの最終状態は最初の線の形から簡単に求まる．初期の位置x_iや衝突の順序には依存しない．このことを定理としてまとめる．

定理 2.1 衝突は有限期間内に終わる．クラスターの最終的な位置や速度は初期の位置や衝突の順番には依存しない．

2.4 クラスタ数の期待値

最後に残るクラスタ数は1からNまでの範囲で，初期速度によって決まる．確率分布は次のように定まる．

定理 2.2 本章の問題では，k個のクラスタが最後に残る確率は，

$$p(k; N) = \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} / N!, \ k = 1, 2, \ldots, N \tag{2.10}$$

である．ただし，$\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}$は第1種の符号なしスターリング数を表す．$k$の期待値は

$$\langle k \rangle = \sum_{k=1}^{N} k p(k; N) = H_N \tag{2.11}$$

となる．

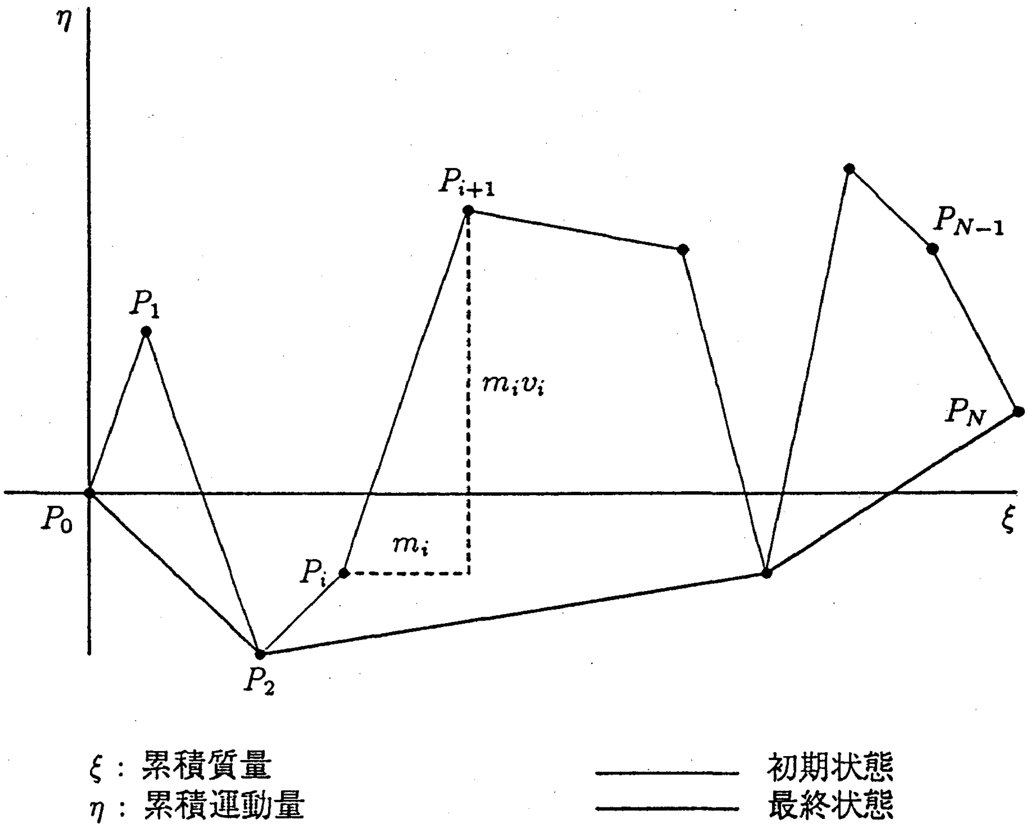
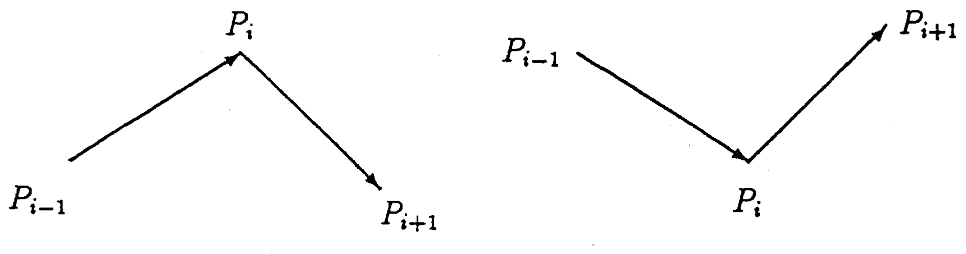


図 2.1: 一次元空間内の N粒子の状態



衝突する ($v_i > v_{i+1}$)　　衝突しない ($v_i < v_{i+1}$)

図 2.2: 上に凸と下に凸な配置

注 2.4 スターリング数は恒等多項式

$$z(z+1)(z+2)\cdots(z+N-1) \equiv \sum_{k=1}^{N} \left[\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right] z^k \tag{2.12}$$

で定義される．この定義は [10] による．幾つかの値を表2.1にあげる．ここで，$\sum_k \left[\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right] = N!$および，$\langle k \rangle = \sum_k k \left[\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right] / N!$ であることに注意してほしい．

注 2.5 クラスタの個数は初期の質量や位置の分布によらない．

注 2.6

$$p(1,N) = 1/N \quad かつ \quad p(N,N) = 1/N!. \tag{2.13}$$

証明　初期速度 $v_1, v_2, \ldots, v_N$ を昇順に置換したものを $u_1 < u_2 < \cdots < u_N$ とする．v が連続で交換可能な分布を持つという仮定から，u の全ての置換は同じ確率で実現される．よって以下 u を一つに固定してその $N!$ 通りの置換を初期条件として考えることにする．ここで，$r(k,N)$ を最後に k 個のクラスタが残る場合の数と定義する．定義より

$$\sum_{k=1}^{N} r(k,N) = N! \tag{2.14}$$

が成り立つ．まず $N!$ の初期条件のうち v_1 が最も速い $(v_1 = u_N)$ 場合を選ぶ．この場合粒子 1 は必ず粒子 2 に衝突して一つになる．定理2.1よりこの衝突が最初に起こると考えて差し支えない．これより，問題は $N-1$ 体問題に帰着し k クラスタを残す $r(k,N-1)$ 通りの場合がある．同様の議論が $v_2, v_3, \ldots, v_{N-1}$ のそれぞれが最も速い場合についてできる．従って k クラスタが残る場合は全部で $(N-1)\,r(k,N-1)$ 通りである．v_N が最速の場合は例外で，粒子 N は衝突せず単独のまま残る．この時 k クラスタ残る場合の数は $r(k-1,N-1)$ 通りである．従って各粒子が最速の場合を加えると

$$r(k,N) = (N-1)\,r(k,N-1) + r(k-1,N-1) \tag{2.15}$$

となる．

r の生成関数 f を次のように定義する．

$$f(z,N) = \sum_{k=1}^{N} r(k,N) z^k \tag{2.16}$$

式2.15を用いると，次の帰納的な表式が得られる．

$$
\begin{aligned}
f(z,N) &= \sum_{k=1}^{N}[r(k-1,N-1)+(N-1)\,r(k,N-1)]z^k \\
&= z\sum_{k=1}^{N} r(k-1,N-1)z^{k-1}+(N-1)\sum_{k=1}^{N} r(k,N-1)z^k \\
&= (z+N-1)\,f(z,N-1) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

上の式では明らかな関係

$$
r(N,N-1)=r(0,N)=0 \qquad (2.18)
$$

を用いた．$f(z,1)=r(1,1)z=z$であるので，

$$
f(z,N)=(z+N-1)(z+N-2)\cdots(z+1)z=\prod_{k=0}^{N-1}(z+k) \qquad (2.19)
$$

となる．式2.12の$\left[\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right]$の定義と式2.16の $f(z,N)$ より，次の結論が得られる．

$$
r(k,N)=\left[\begin{array}{c} N \\ k \end{array}\right] \qquad (2.20)
$$

最後に残るクラスタ数の期待値$\langle k\rangle$は

$$
\begin{aligned}
\langle k\rangle &= \frac{\sum_{k=1}^{N} k\,r(k,N)}{\sum_{k=1}^{N} r(k,N)} = \frac{\frac{\partial}{\partial z}f(z,N)\big|_{z=1}}{f(z,N)|_{z=1}} = \frac{\partial}{\partial z}\log f(z,N)\bigg|_{z=1} \\
&= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{z+k}\bigg|_{z=1} = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} = H_N. \ \square \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

2.5 クラスタの大きさの分布

含まれている粒子の数をクラスタの大きさと定義する．最後に残る大きさ n のクラスタの数の期待値は $1/n$ である．まず2つの定理を示し，それから証明を行なう．

定理2.1の時同様 $u_1<u_2<\cdots<u_N$を昇順に並べ替えた初期速度とする．$N!$通りの置換がすべて等確率であることを思いだそう．まずはこの論文の問題を離れ，N粒子を c_1 個の大きさ1のクラスタ，c_2個の大きさ2のクラスタ，…，c_n 個の大きさ n のクラスタ，…，c_N個の大きさ Nのクラスタ，に分割することを考える．分割の仕方は非負整数の組 $(c_1,c_2,\ldots,c_n,\ldots,c_N)\equiv c$で指定される．ここで，$\sum_{n=1}^{N} nc_n=N$である．表2.2は $N=4$ の時の可能な分割を示している．

表 2.1: 第1種スターリング数

N k	1	2	3	4	5
1	1	1	2	6	24
2		1	3	11	50
3			1	6	35
4				1	10
5					1
Sum $= N!$	1	2	6	24	120
$\langle k\rangle = \sum_k k \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} / N!$	1	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	H_4	H_5

補助定理 2.1 一般に，N個の区別できる粒子を区別のない容器に入れて分割cを作る場合の数を $\mathcal{N}(c)$ とすると，

$$\mathcal{N}(c) = \frac{N!}{\prod_{n=1}^{N}(n!)^{c_n} c_n!} \tag{2.22}$$

が成り立つ．

証明 $N \equiv N_1$粒子からサイズ 1 のグループを c_1個作るために c_1個取り出す．次に残りの $N_1 - c_1 \equiv N_2$個の中からサイズ 2 のグループを c_2個作るために $2c_2$個取り出す．一般に $N_{n-1} - (n-1)c_{n-1} \equiv N_n$個の粒子の中からサイズ$n$ のグループを作るためnc_n個取り出す，ということを $n = N$まで続ける．第 n 段階では nc_N個の粒子を取り出すのに $C(N_n, nc_n)$ 通りのやり方がある．ここで $C(N,n) = N!/n!(N-n)!$は二項係数である．サイズn のグループを c_n個連続して作るやり方は

$$C(nc_n, n)\, C(n(c_n-1), n)\, C(n(c_n-2), n) \cdots C(n,n) = \frac{(nc_n)!}{(n!)^{c_n}} \tag{2.23}$$

通りある．けれども c_n!通りあるグループ同士の置換は同一のグルーピングであるので，サイズn のグループを c_n個作るやり方は結局

$$C(N_n, nc_n)\frac{(nc_n)!}{(n!)^{c_n} c_n!} = \frac{N_n!}{(N_n - nc_n)!(N!)^{c_n} c_n!} \tag{2.24}$$

通りになる．よって，分割cによる異なったグルーピングの場合の数$\mathcal{N}$は

$$\mathcal{N}(c) = \prod_{n=1}^{N} \frac{N_n!}{(N_{n+1})!(n!)^{c_n} c_n!} = \frac{N!}{\prod(n!)^{c_n} c_n!} \tag{2.25}$$

である．ここで $N_1 = N, N_{n+1} = N_n - nc_n$，および $N_{N+1} = N_N - Nc_N = N - \sum nc_n = 0$ を用いた．□

表 2.2: $N=4$ のときの可能な分割

分割	c_1	c_2	c_3	c_4	$\sum_{n=1}^{4} nc_n$
$\boldsymbol{c}_1$	0	0	0	1	4
$\boldsymbol{c}_2$	1	0	1	0	4
$\boldsymbol{c}_3$	2	1	0	0	4
$\boldsymbol{c}_4$	0	2	0	0	4
$\boldsymbol{c}_5$	4	0	0	0	4

この補助定理 2.1は多項係数を用いて直接証明することもできる．表 2.3は $N=4$ で $\boldsymbol{c}=(2,1,0,0)$ のときの$\mathcal{N}$を示す ($\mathcal{N}(\boldsymbol{c})=4!/(1!)^2 2!(2!)^1 1!=6$).

次にもともとの問題に戻り，各分割$\boldsymbol{c}$ごとに大きさ n のクラスタが c_n個できる初期条件（すなわち vの置換）の数を勘定する．サイズ n のそれぞれのグループについて $n!$個通りの初期条件の置換があり，そのうち一つのクラスタになるのは $(n-1)!$通りである（式 2.13 参照）．全体でサイズ n のクラスタを c_n個作る$\prod_{n=1}^{N}[(n-1)!]^{c_n}$通りの初期条件がある $(n=1,2,\ldots,N)$.

最後に，それらのクラスタが最後まで生き残るためには，速度順にならんでいる場合以外にはない．それゆえ，

補助定理 2.2 最後に分割$\boldsymbol{c}$を実現するような初期条件は$\sum_{n=1}^{N}[(n-1)!]^{c_n}$通りである．

定理 2.3 分割$\boldsymbol{c}$と同じ構成のクラスタができる確率は

$$p(\boldsymbol{c})=\frac{1}{\prod_{n=1} n^{c_n} c_n!},\ \sum_{\{\boldsymbol{c}\}} p(\boldsymbol{c})=1 \tag{2.26}$$

である．

証明 補助定理 2.1，2.2より，最後に分割$\boldsymbol{c}$を実現するような初期条件は，$N!/(\prod_{n=1} n^{c_n} c_n!)$ 通りあり，かつすべての初期条件は等しい確率 $1/N!$を持つことからいえる．□

表 2.4は $N=4$ のとき$\sum p(\boldsymbol{c})=1$ となっていることを確かめるものである．

2.6 最後に残るクラスタの期待値—別解

式 2.26から出発して別の方法で $p(k,N)=\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}$ を証明できる．

定理 2.4 次のように $f(c_1,c_2,\ldots;N)$ を定義する．

$$f(c_1,c_2,\ldots;N)\equiv N!p(\boldsymbol{c})=\begin{cases} \dfrac{N!}{\prod_n^\infty n^{c_n} c_n!} & \text{if } c_n\geq 0,\ \sum nc_n=N, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{2.27}$$

表 2.3: 粒子のグルーピング.
$N=4, \boldsymbol{c}=(2,1,0,0)$. $\mathcal{N}(\boldsymbol{c})=4!/(1!)^2 2!(2!)^1 1!=6$.

$c_1=2,\ c_2=1$			
1	2	3	4
1	3	2	4
1	4	2	3
2	3	1	4
2	4	1	3
3	4	1	2

表 2.4: 式 2.26の確かめ

	c_1	c_2	c_3	c_4	1^{c_1}	2^{c_2}	3^{c_3}	4^{c_4}	$c_1!$	$c_2!$	$c_3!$	$c_4!$	$\prod s^{c_s} c_s!$	$p=1/\prod$
$\boldsymbol{c}_1$	0	0	0	1	1	1	1	4	1	1	1	1	4	1/4
$\boldsymbol{c}_2$	1	0	1	0	1	1	3	1	1	1	1	1	3	1/3
$\boldsymbol{c}_3$	2	1	0	0	1	2	1	1	2	1	1	1	4	1/4
$\boldsymbol{c}_4$	0	2	0	0	1	4	1	1	1	2	1	1	8	1/8
$\boldsymbol{c}_5$	4	0	0	0	1	1	1	1	24	1	1	1	24	1/24
合計														1

すると次の帰納的関係が成り立つ.

$$
\begin{aligned}
f(c_1, c_2, \ldots; N+1) &= f(c_1-1, c_2, \ldots; N) \\
&\quad + \prod_m m(c_m+1)\, f(c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m+1, c_{m+1}-1, c_{m+2}, \ldots; N)
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

ここで $(c_1, c_2, \ldots)$ は, $c_{N+1}=c_{N+2}=\cdots=0$ かつ$\prod_{n=N+1} n^{c_n} c_n! = 1$ であるような列であることに注意する.

証明 式 2.28を Nについての帰納法で証明する. $N=2$ のとき,

$$
\begin{aligned}
f(2,0,0,\ldots;2) &= f(1,0,\ldots;1)=1, \\
f(0,1,0,\ldots;2) &= f(1,0,\ldots;1)=1
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

であり式 2.28は成り立つ. 次に $N+1$ を Nに帰着する. $\sum_m mc_m = N+1$ の時,

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{N!}{1^{c_1-1}(c_1-1)! \prod_{n=2}^{\infty} n^{c_n} c_n!} \\
&+ \frac{\sum_m m(c_m+1)N!}{\prod_{1\le n\le m-1, m+2\le n\le\infty} n^{c_n} c_n! m^{c_m+1}(c_m+1)!(m+1)^{c_{m+1}-1}(c_{m+1}-1)!} \\
&= \frac{N! c_1}{1^{c_1} c_1! \prod_{n=2}^{\infty} n^{c_n} c_n!} + \frac{\sum_m N!(m+1)c_{m+1}}{\prod_{n=1}^{\infty} n^{c_n} c_n!}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{N!}{\prod_n n^{c_n} c_n!}(c_1 + \sum_m m c_m) = \frac{(N+1)!}{\prod_n n^{c_n} c_n!} \\
&= (\text{左辺}).\square \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

この定理は $p(c)$ の値を計算するのに便利である.

系　定義により $r(k,N) = \sum_{\Sigma c_n = k} f(c_1, c_2, \ldots; N)$ である. これは $\begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}$ に等しい.

証明　$N = 1, k \leq 1$ の時は上の等式は明らかに成り立つ. $N \geq 2$ のときは式2.28, 2.30を用いて $\sum_{\Sigma c_n = k} f(c_1, c_2, \ldots; N) = \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix}$ を仮定して計算する.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\Sigma c_n = k} f(c_1, c_2, \ldots; N+1) &= \sum_{\Sigma c_n = k} f(c_1 - 1, c_2, \ldots; N+1) \\
&+ \sum_{\Sigma c_n = k} \sum_{m=1}^{\infty} m(c_m + 1) f(c_1, \ldots, c_{m-1}, c_m + 1, c_{m+1} - 1, c_{m+2}, \ldots; N) \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

$c_1^* = c_n - 1$, $c_m^* = c_m (m \neq 1)$ と書くことにすると, $\sum c_n = \sum c_n^* + 1$ である. この c_m^* を用いて第1項は

$$
\sum_{\Sigma c_n^* = k-1} f(c_1^*, c_2^*, \ldots, ; N) = \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix} \qquad (2.32)
$$

となる. また $c_n^* = c_n, n = 1, 2, \ldots, m-1;\ m+2, \ldots$ であること, また $c_m^* = c_m + 1, c_{m+1}^* = c_{m+1} - 1$ であること, 更に $\sum c_n^* = \sum c_n = k$ であることに注意すると, 第2項は,

$$
\sum_{\Sigma c_n^* = k} (\sum_{m=1}^{\infty} m c_m^*) f(c_1^*, c_2^*, \ldots; N) = N \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} \qquad (2.33)
$$

となる. ここで $\sum m c_m^* = \sum m c_m - 1 = N$ の関係を使った. 以上のことから,

$$
\sum_{\Sigma c_n = k; \Sigma n c_n = N+1} f(c_1, c_2, \ldots; N+1) = \begin{bmatrix} N \\ k-1 \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} N \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N+1 \\ k \end{bmatrix} \qquad (2.34)
$$

となる. □

2.7　大きさ n のクラスタ数の期待値

定理 2.5 本章の問題において, 最後にできる大きさ n のクラスタ数の期待値は $1/n$ である.

証明

$$
\begin{aligned}
E_n &= \sum_{\Sigma n c_n = N} \frac{c_n}{1^{c_1} 2^{c_2} \cdots n^{c_n} \cdots N^{c_N} c_1! c_2! \cdots c_n! \cdots c_N!} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{c_1 + \cdots + n(c_n - 1) + \cdots + N c_N = N - n} \frac{1}{1^{c_1} 2^{c_2} \cdots n^{c_n - 1} \cdots N^{c_N} c_1! c_2! \cdots (c_n - 1)! \cdots c_N!} \qquad (2.35)
\end{aligned}
$$

について $c_n - 1 \equiv c'_n, N - n \equiv M$ と書くことにし，$m > M$ のとき $c_m = 0$ であることに注意すれば，式 2.26 より

$$
\begin{aligned}
E_n &= \frac{1}{n} \sum_{c_1+\cdots+nc'_n+\cdots+Mc_M=M} \frac{1}{1^{c_1}2^{c_2}\cdots n^{c'_n}\cdots M^{c_M}c_1!c_2!\cdots c'_n!\cdots c_M!} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\{c\}} p(c) = \frac{1}{n}.\Box
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

表 2.5にこのことを確かめてある．

系　本章の問題においては $0 \le r \le [N/n]$ かつ

$$
c_n^{(r)} \equiv c_n(c_n-1)(c_n-2)\cdots(c_n-r+1)! = \frac{c_n!}{(c_n-r)!}
\tag{2.37}
$$

とするとき，

$$
\langle c_n^{(r)} \rangle = \frac{1}{n^r}.
\tag{2.38}
$$

証明　定理 2.5と同様に計算できて，

$$
\begin{aligned}
\langle c_n^{(r)} \rangle &= \sum_{\Sigma mc_m=N} \frac{c_n!/(c_n-r)!}{(\prod_{s\neq n} s^{c_s}c_s!)n^{c_n}c_n!} \\
&= \frac{1}{n^r}\sum_{\Sigma mc_m=N} \frac{1}{(\prod_{s\neq n} s^{c_s}c_s!)n^{c_n-r}(c_n-r)!} \\
&= \frac{1}{n^r}\sum_{\Sigma mc^*_m=N-nr} \frac{1}{\prod_{s\neq n} s^{c^*_s}c^*_s!} = \frac{1}{n^r}
\end{aligned}
\tag{2.39}
$$

となる．ここで $c_n - r \equiv c^*_n$ および $c_m \equiv c^*_m (m \neq n)$ とおいた．□

系

$$
\langle \textstyle\prod_n c_n^{(r)} \rangle = \frac{1}{\prod_n n^{r_n}}.
\tag{2.40}
$$

証明は式 2.38と同じ．

系

$$
\mathrm{Var}[c_n] = 1/n.
\tag{2.41}
$$

証明　式 2.38より

$$
\begin{aligned}
\langle c_n(c_n-1) \rangle &= \langle c_n^2 \rangle - \langle c_n \rangle = \frac{1}{n^2}, \\
\langle c_n^2 \rangle &= \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}, \\
\mathrm{Var}[c_n] &= \langle (c_n - \langle c_n \rangle)^2 \rangle = \langle c_n^2 \rangle - \langle c_n \rangle^2 \\
&= 1/n.\Box
\end{aligned}
\tag{2.42}
$$

表 2.5: 式 2.36の確かめ

c	p	c_1	c_2	c_3	c_4	pc_1	pc_2	pc_3	pc_4
c_1	1/4	0	0	0	1	0	0	0	1/4
c_2	1/3	1	0	1	0	1/3	0	1/3	0
c_3	1/4	2	1	0	0	1/2	1/4	0	0
c_4	1/8	0	2	0	0	0	1/4	0	0
c_5	1/24	4	0	0	0	1/6	0	0	0
Sum						1	1/2	1/3	1/4

系

$$\mathrm{Cov}[c_n, c_m] = 0. \tag{2.43}$$

証明　式2.40より，$\langle c_n c_m \rangle = 1/mn$．また，

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[c_n, c_m] &= \langle (c_n - \langle c_n \rangle)(c_m - \langle c_m \rangle) \rangle \\ &= \langle c_n c_m \rangle - 2\langle c_n \rangle \langle c_m \rangle + \langle c_n \rangle \langle c_m \rangle \\ &= \frac{1}{nm} - \frac{2}{nm} + \frac{1}{nm} = 0. \Box \end{aligned} \tag{2.44}$$

2.8　議論および結論

定理2.5は一次元完全非弾性衝突によって大きさnのクラスタが平均$1/n$個出来ることを示している．この事実はZipfの法則の一つの変形（完全に同じものではない）と見られる．けれどもこの定理は線上にいろいろな大きさの粒子がどのように分布するかについては何も言っていない．

数値実験は目だった特徴を示している．大きな粒子は中央部に，小さなクラスタは周辺部に現れやすい．残念ながらi番目の粒子が最後に大きさnの粒子に含まれる確率は速度vと質量mの初期の確率分布に依存している．質量がすべて等しく，初期速度が独立で等しく分布しておりある点について対称な確率密度関数を持つと仮定してさえ解析は難しい．

任意の粒子を一つ$1/N$の確率で選ぶと，その列の中の位置を無視すれば大きさnのクラスタに属する確率は等しく

$$p_n = 1/N, \;\; n = 1, 2, \ldots, N \tag{2.45}$$

である．このことは次のようにしていえる．定理2.5は大きさnのクラスタに属する粒子の数の期待値は$nE_n = 1$であることを示している．この期待値は確率p_nのN倍であるから，式2.45が成り立つ．この事実は「粒子等分配則」とでも呼ぶべき単純で興味深い性質である．

一次元空間に限定したことは現実的とはいえない．けれども，この限定が興味深い結果に結び付いたのである．本章の証明は繁雑であるが，より簡単な方法が存在する可能性もあると思われる．また２次元以上の空間においても，やはりクラスタができその性質には簡単な法則が見出されると期待される．

第 3 章

二，三次元空間でのクラスター生成

3.1　概要

前の第1章では一次元空間について調べたが，この章では二，三次元空間内で非弾性多体系が作るクラスターについて，現在までに得られた結果を述べる．一次元の場合と同様，まず有限の反発係数でクラスターができることを確かめた．次に完全非弾性の場合にできるクラスターの統計を調べた．二次元以上ではパラメータが増えるためか，一次元の場合のような単純な関係はまだ見出されていない．

完全非弾性衝突によるクラスタリングは，宇宙空間のガス雲の分布と関連がある．ガス雲の質量分布は観測からある程度分かっている．ガス雲の成因は大きな雲が分裂してできる説と，小さな雲が合体してできる説があり，まだ決着していない．完全非弾性衝突によってできるクラスターのサイズ分布がガス雲の質量分布と似ていれば，合体説の一つの根拠になる．

3.2　モデル

一次元の場合と異なり，粒子は有限の大きさを持つ（持たないと衝突しない）ので考慮すべき点が増える．パラメータは，d,ρの 2 つ増える．d は粒子の直径で，ρは初期分布の広がりと直径の比で定まる密度のパラメータである．これらは距離のスケールを調整することで比だけが問題になる．速度分布の広がりは，時間のスケールで調整できるのでパラメータには含まれない．初期速度を正規乱数で生成したのち，全運動量が 0 になるように座標系を決める．

二つの粒子 i,jの中心の距離が d になった時，衝突が起こる．衝突の瞬間，速度$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j$は $\boldsymbol{v}'_i, \boldsymbol{v}'_j$ に変化する．このとき運動量保存

$$\boldsymbol{v}'_i + \boldsymbol{v}'_j = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j \tag{3.1}$$

と，非弾性衝突，

$$
\begin{aligned}
(v_i' - v_j')n &= -e_n(v_i - v_j)n, &(3.2)\\
(v_i' - v_j')t &= -e_t(v_i - v_j)t &(3.3)
\end{aligned}
$$

の式を満たす．ただし，n, tは図3.1に示す法線および接線方向の単位ベクトルである．

初期分布は2通り考えた．一つは原点を中心とした半径1の円内に一様にばらまく方法．もう一つは正規分布である．乱数の具合で2つの粒子がはじめから重なってしまった時には，融合手続きを適用して予め一つにまとめておく．

完全非弾性の場合には衝突したら融合する．新しい粒子の形をどうするかにはいくつか可能性がある．

1. 形状保存．当たった場所でくっつき，その形を保ったまま運動する．

2. 体積保存．粒子の密度が一定となるような大きな球に融合する．

3. 直径不変．粒子の大きさは不変で密度だけが高くなる．

私たちは2番目の体積が和になるような融合法則を用いた．質量は和になる．

次元数が増えると逃げ場所が多くなるので，クラスターを作りその性質を調べるためにはより多くの粒子数でシミュレーションを行なわなければならない．そのための手法は文献[18]で述べている．

3.3 二次元空間でクラスターができることを確かめる

2次元の場合に，1次元と同じ機構でクラスターができることを確かめた．反発係数は $e_n = e_t = 0.5$ とし，400個の直径 $d = 0.025$ の粒子に一様初期条件をあたえた．その結果ある時刻から数個の粒子が互いに極めて短い時間間隔で衝突を繰り返し，系の時計がほとんど進まなくなる現象が起こった．その時間間隔は次第に短くなっていき，桁落ちにより計算が不正確になるまで（倍精度）やむ気配がないため，瞬時に無限の衝突が起こって，一体化したものと判断した．図3.2は相対速度が十分小さくなったら一体化したものとみなして無限衝突を回避し，全衝突終了までシミュレーションを行なった結果である．大小のクラスターが形成されているのが分かる．

それぞれのクラスターは，団子というよりはフィラメント状に細長く伸びており，両側からおし合いへし合いしている様子である．従って，クラスターの形成機構は1次元と変わらないものと考えられる．次元数が大きくなると粒子が飛び散り易くなるため，衝突確率が下がる．そのためクラスターの形成にはより多い粒子数が必要である．逆に十分な数の粒子があれば，3次元以上でも同様にしてクラスターができるものと考えられる．

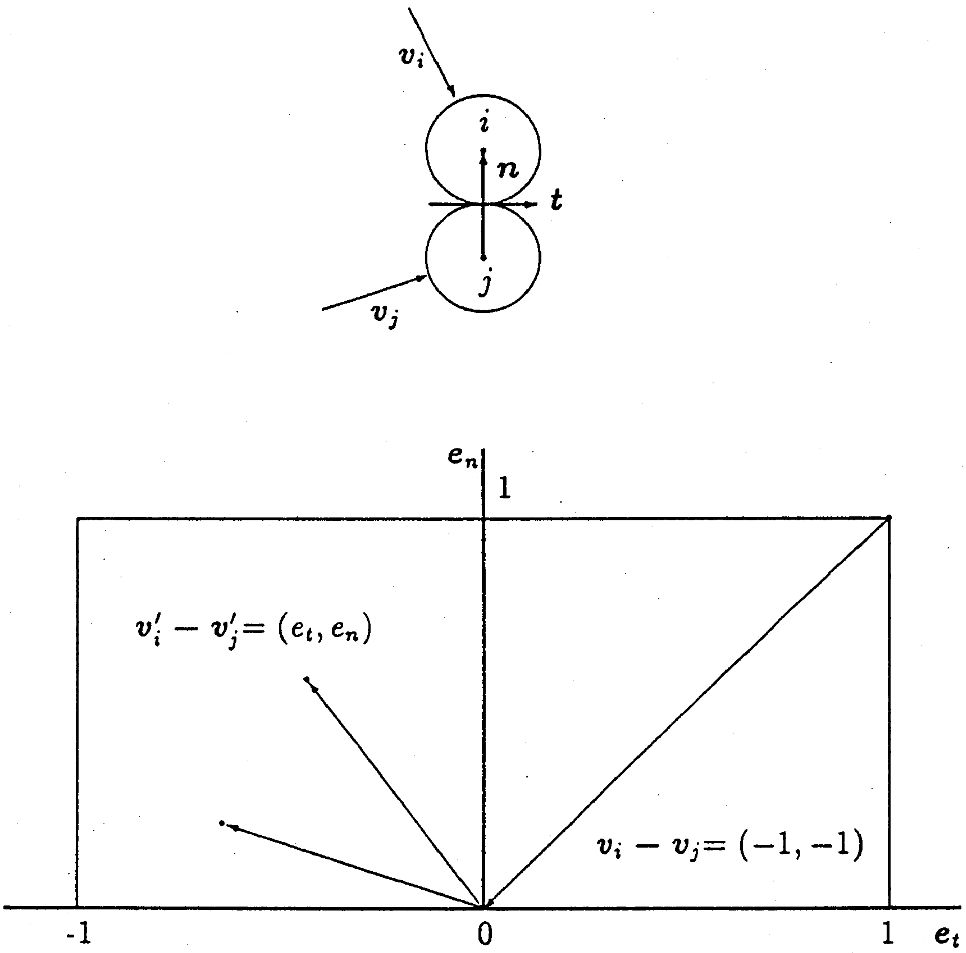
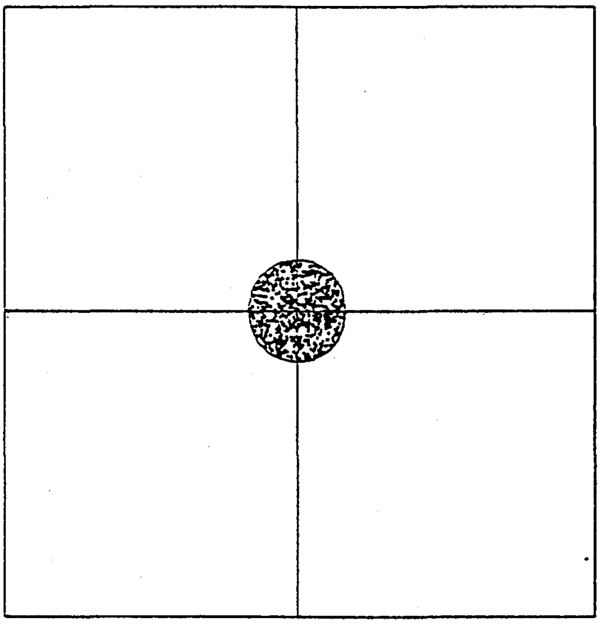


図 3.1: 衝突時の単位ベクトルと反発係数 e_n, e_t.
粒子の相対速度が $(v_n, v_t) = (-1, -1)$ の時，衝突後の相対速度は (e_n, e_t) になる．



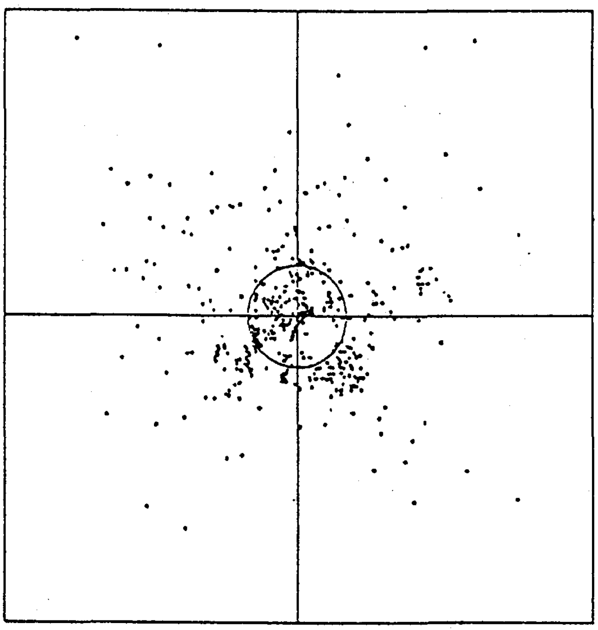


図 3.2: 2 次元空間でのクラスターの形成.
$e_n = e_t = 0.5$ とし，400 個の直径 $d = 0.025$ の粒子に一様初期条件をあたえた．上は初期，下は終期での粒子の配置を示す.

3.4 クラスターの統計的性質

3.4.1 正規初期分布

次に完全非弾性粒子の作るクラスターの性質を調べた．以下に示す結果は，乱数を用いて生成した1000通りの異なる初期条件についての実験を集計したものである．まず，図3.3，3.4に2次元と3次元の場合の平均クラスターサイズ$\langle S_c\rangle(=N/\langle M\rangle)$を示す．直径を変えずに粒子数を増すと，それに比例して空間内の粒子の数密度は上がっていくが，この時平均クラスターサイズは粒子数および数密度に比例することが分かる．実験式は，2次元の時，

$$
\begin{aligned}
\langle S_c\rangle &= 0.93+3.54\times10^{-2}N,\ \ (d=0.1)\\
\langle S_c\rangle &= 0.95+1.57\times10^{-2}N,\ \ (d=0.05)\\
\langle S_c\rangle &= 0.99+7.03\times10^{-3}N,\ \ (d=0.025)\\
\langle S_c\rangle &= 0.96+3.56\times10^{-3}N,\ \ (d=0.0125)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

3次元では，

$$
\begin{aligned}
\langle S_c\rangle &= 1.02+2.54\times10^{-3}N,\ \ (d=0.1)\\
\langle S_c\rangle &= 1.03+1.20\times10^{-3}N,\ \ (d=0.0707)\\
\langle S_c\rangle &= 1.01+6.00\times10^{-4}N\ \ (d=0.05)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

となった．ただし中心部での初期密度には限りがあるので，より大きいNにおいてはこの実験式は成り立たないと予想される．

次に質量スペクトルを調べた．2次元の場合粒子の直径を0.0125として，Nを変えた時の$nE(n)$のグラフを図3.5，3.6に示す．図3.5は$N=2$から$N=50$までの粒子数が小さい場合であり，質量スペクトルは指数分布$nE(n)\propto n^x$になっている．粒子数が増えるとグラフの勾配は緩くなる．Nが更に大きくなると，図3.6に見えるようにグラフは折れ曲がる．サイズの小さいクラスターの分布は$x\approx-0.4$程度で飽和しそれ以上グラフの右下がりの度合が緩くならないが，よりサイズの大きい領域では更にグラフが緩くなりxが小さくなることが分かる．

これより直径を2倍にすると，衝突が起こり易くなるので単独で残る粒子が半分強に減る．サイズの小さい領域でのグラフの傾きは変わらないが，サイズの大きい領域の傾きは緩くなり，サイズの小さいクラスターが減った分サイズの大きいクラスターができ易くなることが分かる．

3次元の場合粒子の直径を0.05として，Nを変えた時の$nE(n)$のグラフを図3.7，3.8に示す．傾向は2次元の場合と同様であり，サイズの小さいクラスターの質量分布は$x\approx-0.8$

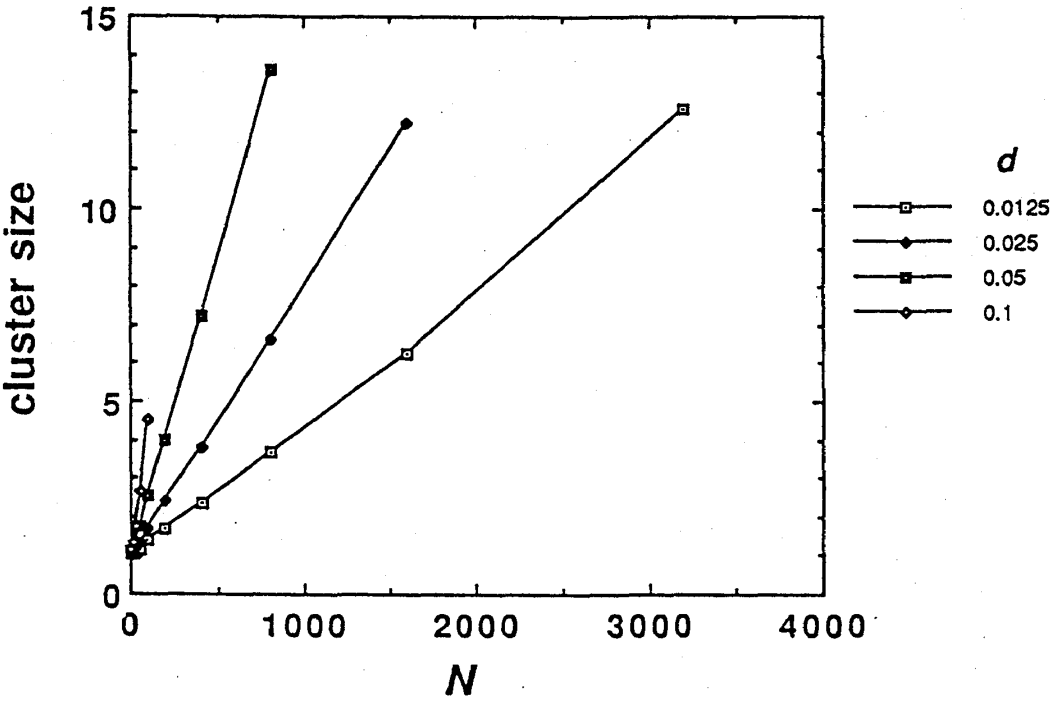


図 3.3: 平均クラスターサイズ.（2次元空間で正規初期分布）

程度で飽和しそれ以上グラフの右下がりの度合は緩くならないが，サイズの大きい領域では更にグラフが緩くなり x が小さくなることが分かる．

初期条件を正規分布にすると，周辺にいくほど粒子が疎らになり，はじめ周辺部にいた粒子はほとんど衝突せずに逃げていく．そのためサイズの小さいクラスターが多くなるのであろう．

3.4.2　一様初期分布

一様初期条件の場合には，サイズの小さいクラスターが少なくなり，その分サイズの大きいクラスターが増えることが予想される．

2次元の場合についてだけ実験を行なった．平均クラスターサイズ$\langle S_c \rangle$を図 3.9に示す．この場合 $\langle S_c \rangle$ は，おおよそ2次式で近似できる．実験式は，

$$
\begin{aligned}
\langle S_c \rangle &= 1.07 + 1.24 \times 10^{-2} N + 1.20 \times 10^{-5} N^2, \quad (d = 0.05) \\
\langle S_c \rangle &= 0.98 + 6.72 \times 10^{-3} N + 1.63 \times 10^{-2} N^2, \quad (d = 0.025) \\
\langle S_c \rangle &= 1.08 + 3.01 \times 10^{-3} N + 5.49 \times 10^{-7} N^2, \quad (d = 0.0125) \qquad (3.6)
\end{aligned}
$$

となった．

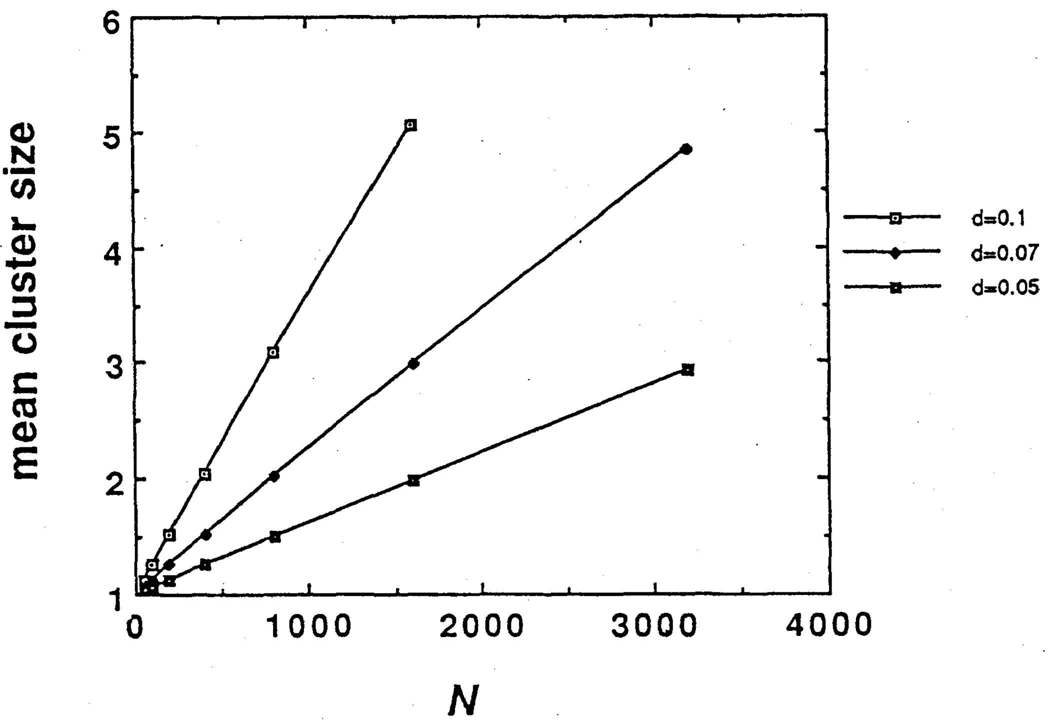


図 3.4: 平均クラスターサイズ.（3 次元空間で正規初期分布）

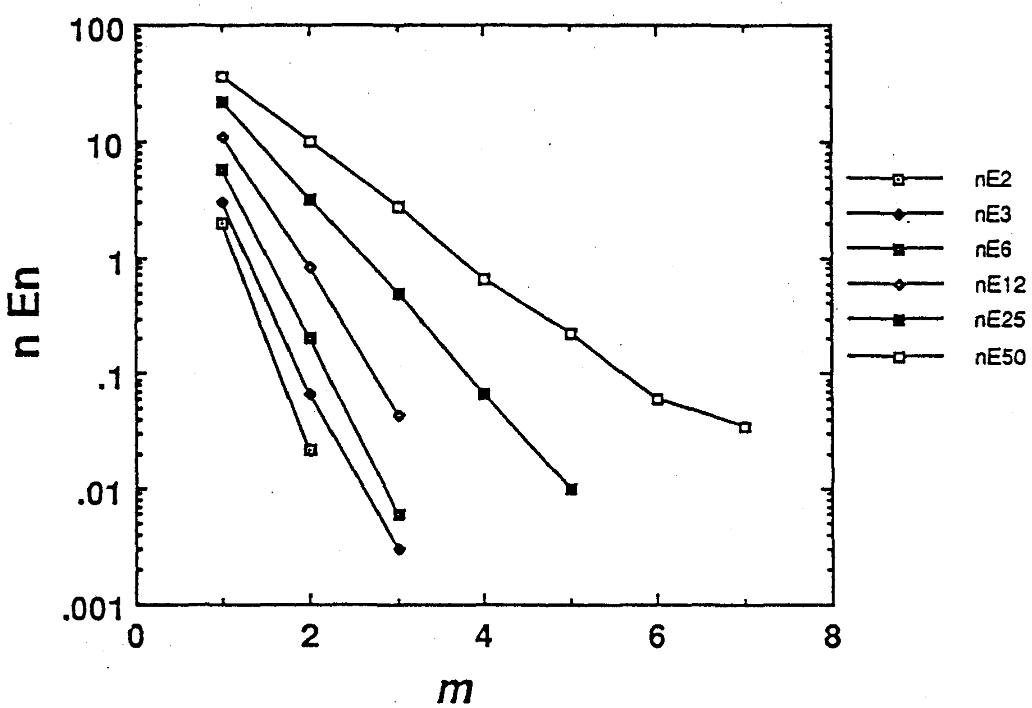


図 3.5: 質量分布.（$2 \leq N \leq 50$． 2 次元空間で正規初期分布）

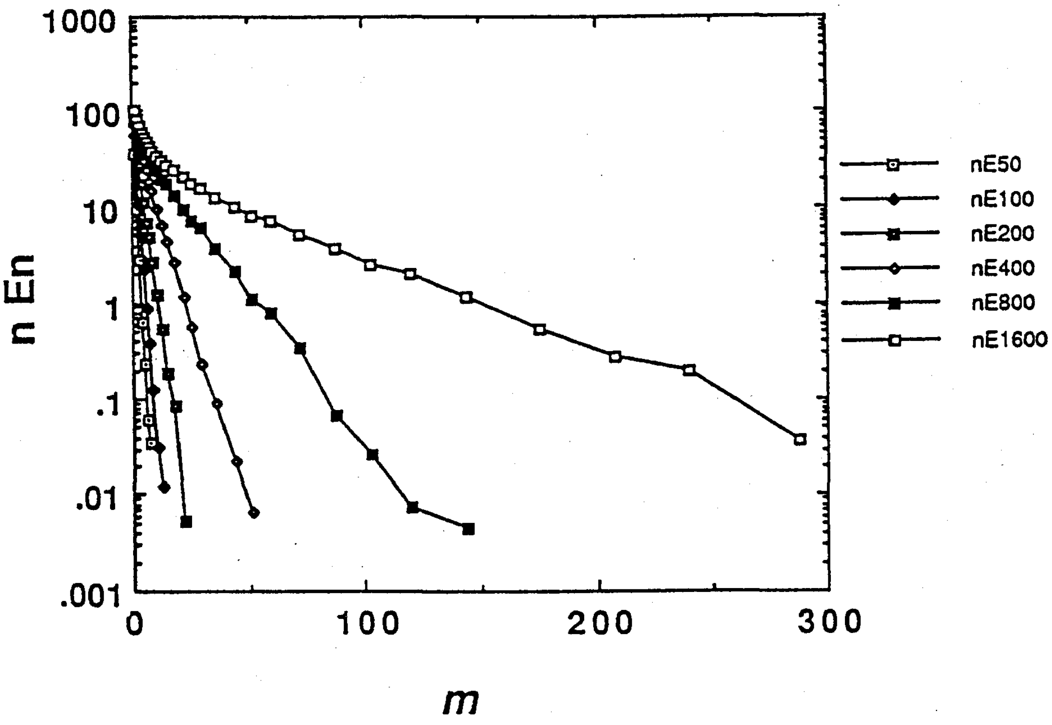


図 3.6: 質量分布.（$50 \leq N \leq 1600$. 2 次元空間で正規初期分布）

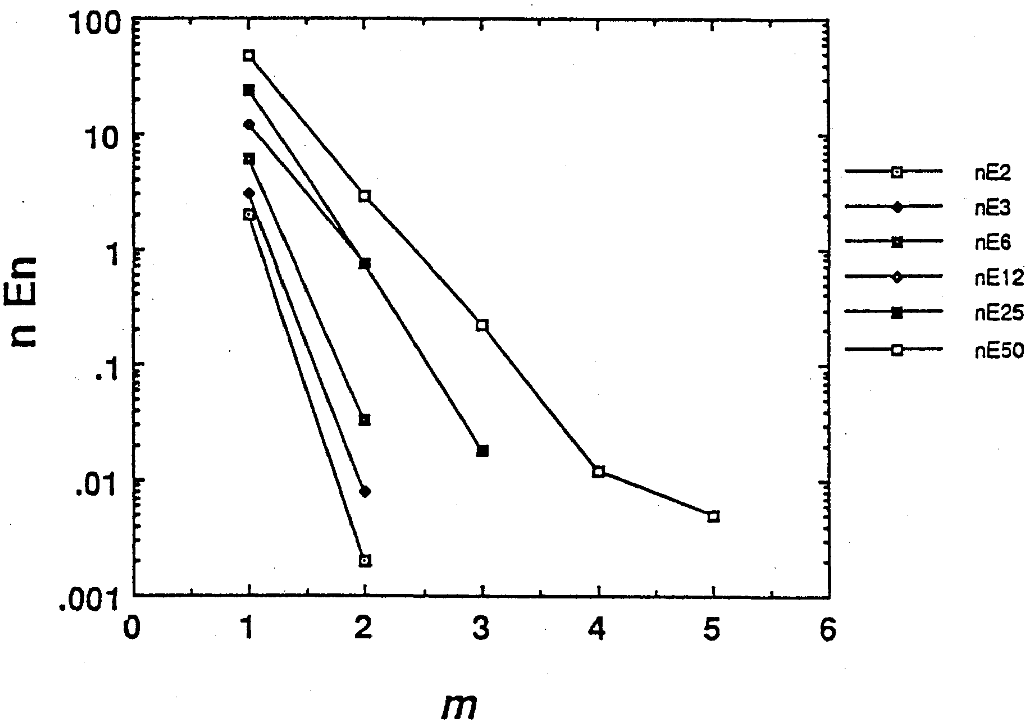


図 3.7: 質量分布.（$2 \leq N \leq 50$. 3 次元空間で正規初期分布）

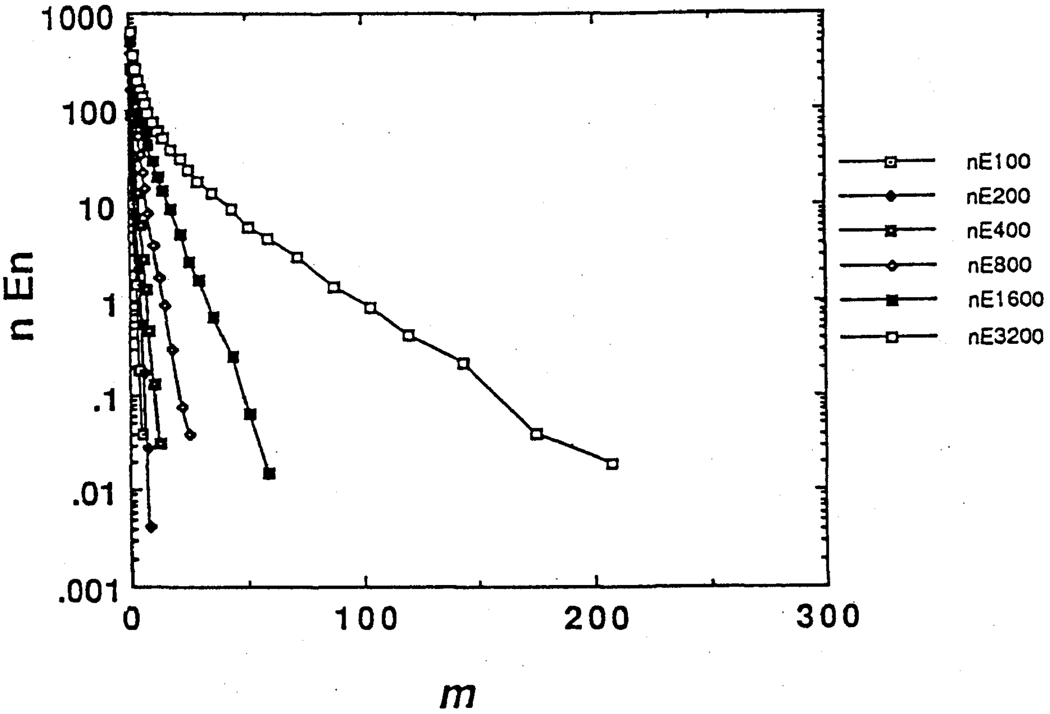


図 3.8: 質量分布.（$100 \leq N \leq 3200$. 3次元空間で正規初期分布）

質量スペクトルは，粒子の直径を 0.0125 とした場合を図 3.10 に示す．サイズの小さいクラスターが減ったため，グラフはより指数分布に近くなっているが，それでも大きさ1や2のサイズの小さいクラスターは指数分布から誤差以上に多い．粒径を小さくしたり数を増やしてもこれ以上指数分布には近付かない．

3.5 考察と今後の課題

2次元でも1次元とほぼ同じようにしてクラスターが形成されることから，非弾性衝突によるクラスター形成は一般の N 次元空間で起こる現象であると考えられる．

平均クラスターサイズ $\langle S_c \rangle$ は初期配置によって変わり，初期分布が正規分布の時には粒子数の1次式で，一様分布の時には粒子数の2次式で表されることが分かった．質量スペクトルは，粒子数が少なければ指数分布になるが，粒子数を増やすと，サイズの小さいクラスターの分布とサイズの大きいクラスターの分布の間にグラフの折れ曲がりが生じる．粒子径が無限小かつ粒子数無限大が系の理想的な極限と考えられるので，粒子数を増やした時グラフが曲がるのは，そのグラフを考察の出発点とするためには好ましくない．

2次元では，任意の変数が増えたこともあって，思った以上に1次元より現象が複雑になっている．以上の実験の範囲では，質量スペクトルについては期待されたような単純か

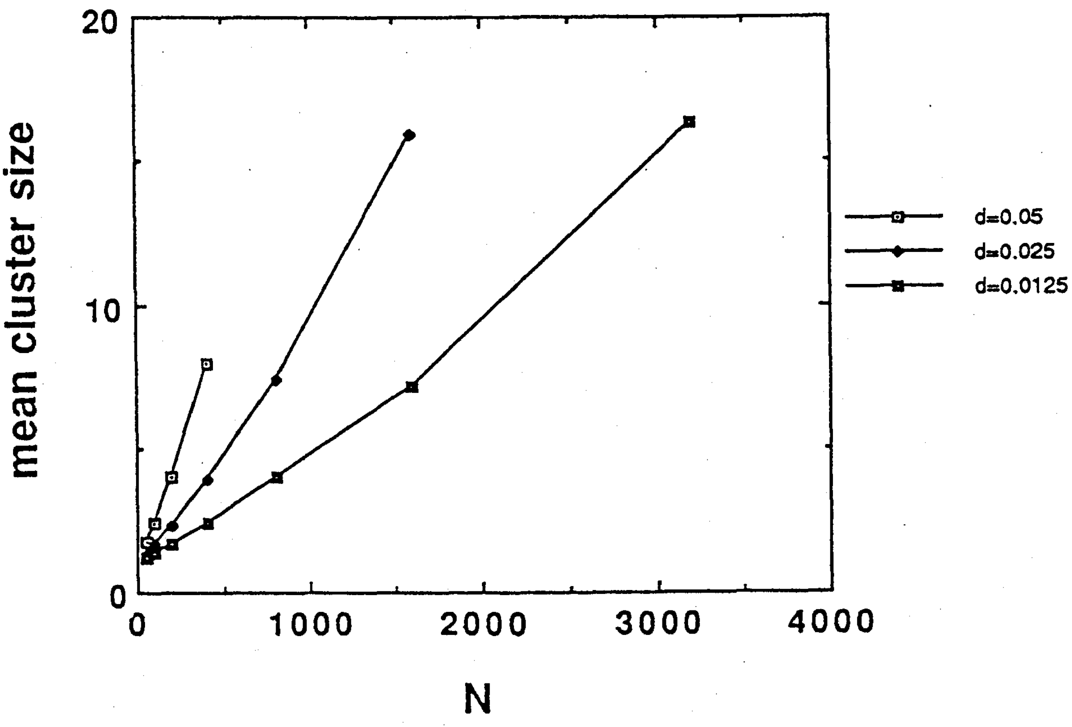


図 3.9: 平均クラスターサイズ.（2次元空間で，一様初期分布）

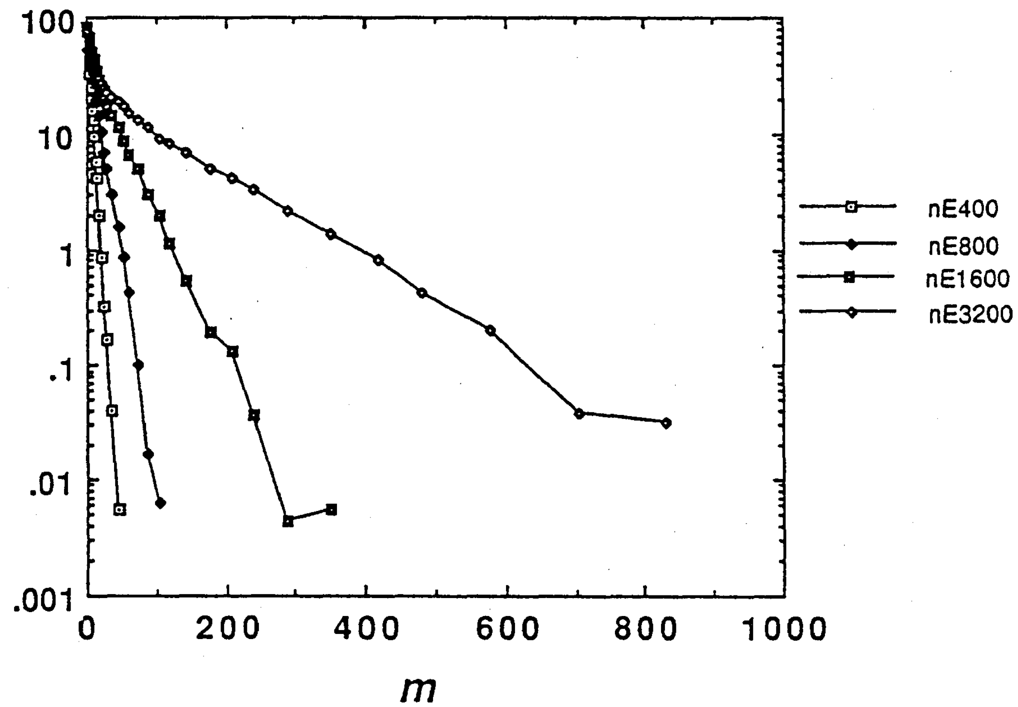


図 3.10: 質量分布.（2次元空間で，一様初期分布）

つ正確な関係を見つけることができなかった．理論的な考察も1次元より難しいと考えられるため，取り掛かりとして単純な実験結果を得ることが望ましい．そのためにはさらに初期条件をいろいろ変えて探すことが必要と考えられる．

第 4 章

非弾性衝突による鋭いリングレットの形成

4.1 はじめに

これまでの章では，自由空間における非弾性多体系のクラスター形成について調べてきた．本章では，中心天体による重力場が存在する場合のクラスター形成について調べる [13, 20]．念頭においているのは惑星環である．

4.1.1 惑星環の奇妙な２つの特徴

惑星環は長い間人々の興味を引き続けている [11]．Galileo が土星の回りの「奇妙な附属物」を発見して以来，その美しさは見る人を魅了してきた．以来惑星環の研究には長い歴史があり，Maxwell や Poincaré のような大学者もその中に名をとどめている．

１９７７年，掩蔽観測により天王星のまわりに環が発見された [8]．その環は十数本のたかだか数十 km の幅しかない細いものであった．そのような細い環はリングレットと名付けられた．１９７９年から８１年にかけて，NASA のボイジャー探査器によって土星環の詳しい情報が得られた [22, 23]．そして，それまで信じられてきたのっぺりした円盤の描像を覆し，細かいリングレットが，まるでアナログレコード盤の溝のように何千本も集まった環の姿を私たちにもたらした．木星 [16] や海王星 [24] も環を持ち，リングレットがある．現在では細いリングレットの存在は太陽系の大惑星に共通に見られる特徴であると考えられている．そこで疑問が生じる．リングレットはどのように形成され，どうして安定に存在し得るのだろうか．

リングレットが発見される以前，土星環についてもっとも大きな謎は，その薄さであった．土星環はそのさし渡し 2.74×10^5km に対し，局所的な厚みがわずか数十 m しかない [6]．このことは非弾性衝突で説明できるのではないかと考えられている．自由空間では２つの粒子が非弾性衝突すると，それらの相対速度ベクトルは衝突前より小さくなる．同様に，惑星の回りを回る粒子の相対角運動量ベクトルは衝突によって小さくなる．これは２

表 4.1: 環の進化に及ぼす法線方向の反発係数の影響.

	$e_t = -1$	$-1 < e_t < 1$
flattening	yes	yes
sharpening	no	?

つの粒子の軌道平面が近付くことを意味する．惑星の回りを回る無数の粒子の間でこの作用が起これば，次第に平らな円盤が形成されるだろう．このことは Brahic らが数値実験によって確かめた [4, 5]．彼らは 100 個の滑らかな球体の中心重力場中の軌道を追跡した．非弾性衝突を決めるパラメータは，接線方向と法線方向の反発係数 e_n と e_t の 2 つである．彼らは，初め 3 次元トーラス状の粒子分布が 2 次元円盤状の分布に進化することを示した．また，反発係数は残留する円盤の厚みすなわち残留する軌道傾斜角や，残留する離心率に影響することを示した．さらに，平板化の過程で動系方向の分布はむしろ広がることを示した．

Trulsen は collisional sharpening の可能性を指摘した [26, 27]．Hámeen-Antilla と Lukkari はその可能性を確かめようとしたが，決定的な結果は得られなかった．後で述べるように，彼らのモデルが $e_t = -1$ を仮定していたことが原因と考えられる．Araki[2] と Salo[17] は $-1 < e_t < 0$ の場合を統計的に扱ったが，リングレットの可能性を見逃した．Spaute と Greenberg[25] は同じ場合で，円盤の縁が鮮明になる現象を報告している．これは，リングレットと関係があるかも知れない．今まで得られている結論を表 4.1 にまとめた．

4.1.2 衝突は環を広げるという思い込み

非弾性衝突をもとにしたモデルでは，リングレットの形成を説明することはできないとこれまで考えられてきた．それはエネルギーについての議論に基づいている．2 つの円軌道をまわる粒子の角運動量の和が一定とすると，軌道半径の小さいものと大きいものに分かれた方が全エネルギーは小さくなる．同じ質量 m を持つ円軌道を回る 2 つの粒子 $i = 1,2$ があるとする．それらの軌道半径と速度を r_i, v_i とすると，全角運動量 L は r によって，

$$L = \sum^2 L_i = m\sqrt{GM} \sum^2 \sqrt{r_i} \equiv L_0 \tag{4.1}$$

と書ける．ここで，G, M は重力定数と中心天体の質量である．全エネルギーは

$$E = \sum^2 E_i = -\frac{GMm}{2} \sum \frac{1}{r_i} \tag{4.2}$$

である．L が一定とすると，$r_1 = r_2$ の時 E は最大となり，2 つの軌道の開き $r_1 - r_2$ が大きいほど小さくなる．

$$E = \frac{4(GM)^2 m^3}{L_0^2} \left\{ -1 - \left(\frac{r_1 - r_2}{r_0} \right)^2 \right\} \tag{4.3}$$

従って，非弾性衝突によってエネルギーが失われれば，軌道は広がらざるを得ず，リングレットはできないと考えられる．

しかし，この単純化された議論は正確ではない．この議論は2つの円軌道が2つの別の円軌道に移るという，あり得ない衝突過程を考えているからである．

差分回転に関する別の議論もある．このモデルでは環を粘性流体とみなす．軌道半径の小さい粒子は早く動き，大きい粒子は遅く動く．もし，軌道が多少楕円になっていて内側と外側の粒子の衝突が起こると，速い内側の粒子から遅い外側の粒子に運動量が移ることになるだろう．内側の粒子はエネルギーを失い，ますます小さい軌道に移り，逆に外側の粒子はますます外へ出ていく．この作用は正の粘性と解釈でき，リングレットを広げるように働く．

4.1.3　これまで提案されているリングレット形成の機構

非弾性衝突はリングレットを壊す作用を持つと考えられてきたため，その作用に逆らって鋭いリングレットを説明するために幾つかの理論が提案されている．外部からの作用として，外側の大きな衛星の重力による密度波の励起や，リングレットをはさむ二つ一組の羊飼い衛星 [9] などが提案されている．これらの機構は，環の構造の一部を説明できるが，すべてではない．拡散不安定性のモデルが，リングレットをつくり出す環の内部機構として提案された [15, 28]．この理論では，環を粘性流体として統計的に扱い，密度揺らぎが成長していく可能性を追求している．環の粒子の密度が高い領域では，衝突が頻繁なので粒子の相対運動は減衰する．従って動径方向の角運動量の運搬は遅い．反対に，粒子が疎らな領域では運搬は効率良く行なわれ，粒子は急速に内側や外側の軌道に移っていく．このようにして，粒子は密度の高い領域にますます集まってくる．

4.1.4　この章の目標

この章の研究の目標は，Brahic のγモデル ($|e_t| < 1$) [4] に基づくリングレット形成機構を提案することである．拡散不安定性理論が立脚している，環を粘性流体としてモデル化する方法は，衝突時に相対速度の接線成分は変化しない ($e_t = -1$) と仮定しており，この場合動径方向に環が広がっていくことは不可避である．けれども $|e_t| < 1$ であると，広がらない場合がある．

本章の第 4.2節では，まずモデルを与える．第 4.3節では，$e_n = e_t (\equiv e; 0 \leq e < 1)$ の場合，初等的な理論によって，非弾性衝突によって完全なリングレットが出来ることを証明する．けれどもこの反発係数のとり方は物理的には奇妙である．第 4.4節では，e_n-e_t平面を考え，その中のかなり広い領域で，リングレットが出来ることを示す．この理論は，軌道要素からなる5次元空間で軌道を表す軌道点の衝突による進化を考察するものである．最

後に第4.5節では，数値積分とモンテカルロ法によるリングレット形成シミュレーションについて述べる．第4.6節では，3次元2000粒子シミュレーションによって，リングレット形成を実証する．本章の研究の主な部分は文献[13, 20]として発表されている．シミュレーション技法については文献[18]で述べている．

4.2 モデル

環を構成する粒子について次のように仮定する．これは文献[4]に述べられているBrahicの標準モデルと等しい．

1. 惑星のまわりにはN個の粒子があり，分裂や合体をせずに非弾性衝突する．
2. 粒子は硬く滑らかな球形で，共通の質量mと直径dを持つ．
3. 環の進化の時間スケールでは粒子間の相互重力は無視できる．
4. 粒子の直径dは軌道半径に比べ無視できるほど小さい．

粒子の運動方程式は，

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = -\frac{GMm\boldsymbol{r}_i}{r_i^3} + (\text{衝突撃力}) \tag{4.4}$$

で与えられる．ここで，rを代表的な軌道半径r_0で，tを時間スケール$\sqrt{R_0^3/GM}$で規格化することによって，GMを1とすることができる．以下本章では，すべての量はこのようにして無次元化されているとする．衝突法則は

$$\boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v}_j' = \boldsymbol{v}_i + \boldsymbol{v}_j, \tag{4.5}$$

$$(\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{v}_j')\boldsymbol{n} = -e_n(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{n}, \tag{4.6}$$

$$(\boldsymbol{v}_i' - \boldsymbol{v}_j')\boldsymbol{t} = -e_t(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{t} \tag{4.7}$$

であり，これは第3章の自由空間の場合の式3.1，3.2，3.3と同じである．反発係数e_n, e_tは相対速度や温度などに独立な定数とする．非弾性衝突では全運動エネルギーが増えることはないから，$0 \le e_n \le 1, -1 \le e_t \le 1$の範囲に限られる．正の$e_t$の値というのは物理的には奇妙に感じられるが，次の第4.3節では，この範囲で単純明解な結果が得られることを示す．

反発係数e_n, e_tは，この非弾性衝突モデルの本質であるから，現実のその値を知ることは極めて重要である．惑星環は無数の水の氷の粒子の集合であると考えられている．けれどもその形や大きさの分布，反発係数は正確には知られていない．Hatzesらのe_nの実験による測定値が文献[7, 12]に示されている．それによると反発係数は表面の状態に大きく左右

されるが，良く制御された条件下では相対速度の関数として表せるということである．相対速度 1cm/s 以下のゆっくりした衝突では反発係数は 1 に近く，速度が増すとともに反発係数は小さくなる．e_tについての報告はこれまで見当たらない．第4.7節では反発係数の速度依存性が本章の理論に与える影響を論じる．

4.3 特殊衝突モデルの理論

4.3.1 環の生成

まず本節では $e_n = e_t = e, (0 \le e < 1)$ という仮定を追加した場合について論じる．この特殊衝突モデルと $e_n \neq e_t$ とした一般衝突モデルの違いを図4.1に示す．特殊衝突モデルでは式4.6，4.7は，

$$\boldsymbol{v}_i{}' - \boldsymbol{v}_j{}' = -e(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j) \tag{4.8}$$

となり，$\boldsymbol{v}_i{}' - \boldsymbol{v}_j{}'$と$\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$ は常に平行である．それゆえ，第1章の1.2，1.3式と同様に，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i{}' &= \alpha \boldsymbol{v}_i + \beta \boldsymbol{v}_j, \\ \boldsymbol{v}_j{}' &= \beta \boldsymbol{v}_i + \alpha \boldsymbol{v}_j, \end{aligned} \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= (1-e)/2, \\ \beta &= (1+e)/2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

と書ける．全運動エネルギー

$$K = \sum \boldsymbol{v}_i{}^2/2 \tag{4.11}$$

は一回の衝突毎に

$$\Delta K = -(1-e^2)(\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j)^2/4 \tag{4.12}$$

だけ減る．式4.5，4.8の両辺に$\boldsymbol{r}_i (= \boldsymbol{r}_j)$ を掛けて角運動量 L の式に直すと，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_i{}' + \boldsymbol{L}_j{}' &= \boldsymbol{L}_i + \boldsymbol{L}_j, \\ \boldsymbol{L}_i{}' - \boldsymbol{L}_j{}' &= -e(\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_j) \end{aligned} \tag{4.13}$$

となる．この$\boldsymbol{L}$の変化量は$\boldsymbol{v}$と同じ形で，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_i{}' &= \alpha \boldsymbol{L}_i + \beta \boldsymbol{L}_j, \\ \boldsymbol{L}_j{}' &= \beta \boldsymbol{L}_i + \alpha \boldsymbol{L}_j \end{aligned} \tag{4.14}$$

また，

$$L = \sum \boldsymbol{L}_i{}^2/2 \tag{4.15}$$

かつ,

$$\Delta L = -(1 - e^2)(L_i - L_j)^2/4 \tag{4.16}$$

となる．これは，下限をもつ単調減少列なので，ある極限に収束する．従って任意の量$\epsilon_1 > 0$について,

$$-\Delta L < \epsilon_1 \tag{4.17}$$

または式4.16を参照して,

$$|L_i - L_j| < \epsilon \tag{4.18}$$

となるような十分長い時間Tが存在する，という収束する数列についての Cauchy の定理が成り立つ．ここでi, jは衝突した粒子の組であり，ϵは任意の正の量である．

時刻T以降に粒子i, jが衝突した場合，それらは連結されたと定義する．i-j，j-kが連結の時，i-kは間接的に連結と呼ぶ．この第 4.3節に限り，互いに連結した粒子の集合をクラスターと定義する．

クラスターcに属する粒子の数S_cを「クラスターのサイズ」と定義する．単独の粒子はサイズ 1 のクラスターと見なす．

また，クラスターの角運動量を

$$L_c = \sum_{i \in c} L_i / S_c \tag{4.19}$$

と定義する．

定理 4.1 クラスター構造は最終的に安定になる．クラスターcに属する任意の粒子iについて，その角運動量L_iはL_cに収束する．あるいは，ϵ_2を任意の正の量とする時,

$$|L_i - L_c| < (S_c - 1)\epsilon/2 \leq (N - 1)\epsilon/2 \equiv \epsilon_2. \tag{4.20}$$

証明 時刻$t = T$では，サイズ 1 のクラスターがN個ある．これ以降の衝突は，同じクラスターに属する粒子同士のクラスター内衝突と，違うクラスターに属する粒子同士のクラスター間衝突に分けられる．クラスター内衝突ではクラスターサイズと角運動量は変わらない．クラスター間衝突（$i \in a, j \in b$とする）では二つのクラスターは一つの新しいクラスターcにまとまり,

$$\begin{aligned} S_c &= S_a + S_b, && (4.21) \\ L_c &= \frac{S_a L_a + S_b L_b}{S_a + S_b} \\ &= L_a - \frac{S_b}{(S_a + S_b)(L_a - L_b)} && (4.22) \end{aligned}$$

となる．全クラスタ数N_cはクラスター間衝突が起こるたびに1ずつ減るが，あるとき以降クラスター間衝突は起こらなくなり，N_cは変らなくなる．N_cの最終値は$N \gg 1$で初期条件がランダムな時はNより遥かに小さい．

時刻$t = T(S_c = 1)$のとき，式4.20は明らかに成立する．クラスタaに属する粒子iとbに属する粒子jがクラスタ間衝突する場合を考える．衝突前に式4.20が成立していたとして，以下，任意の粒子$k \in a, l \in b$について

$$|\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_c|, |\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_c| < (S_c - 1)\epsilon/2 \tag{4.23}$$

を示す．

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_c| &= |\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_a + \frac{S_b}{(S_a + S_b)}(\boldsymbol{L}_a - \boldsymbol{L}_b)| \\
&\leq |\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_a| + \frac{S_b}{(S_a + S_b)}|\boldsymbol{L}_a - \boldsymbol{L}_b|, \qquad (4.24)\\
|\boldsymbol{L}_a - \boldsymbol{L}_b| &= |\boldsymbol{L}_a - \boldsymbol{L}_i + \boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_j + \boldsymbol{L}_j - \boldsymbol{L}_b| \\
&\leq |\boldsymbol{L}_a - \boldsymbol{L}_i| + |\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_j| + |\boldsymbol{L}_j - \boldsymbol{L}_b| \\
&\leq \frac{S_a - 1}{2}\epsilon + \epsilon + \frac{S_b - 1}{2}\epsilon \\
&= \frac{S_a + S_b}{2}\epsilon. \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

式4.18，4.20，4.24及び4.25より，

$$|\boldsymbol{L}_k - \boldsymbol{L}_c| \leq \frac{S_a - 1}{2}\epsilon + \frac{S_b}{2}\epsilon = \frac{S_c - 1}{2}\epsilon, \tag{4.26}$$

となる．$|\boldsymbol{L}_l - \boldsymbol{L}_c|$についても同様である．

クラスターcに属する粒子i, jのクラスター内衝突については，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}'_i - \boldsymbol{L}_c &= \alpha \boldsymbol{L}_i + \beta \boldsymbol{L}_j - pp(\alpha + \beta)\boldsymbol{L}_c \\
&= \alpha(\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_c) + \beta(\boldsymbol{L}_j - \boldsymbol{L}_c), \qquad (4.27)\\
|\boldsymbol{L}'_i - \boldsymbol{L}_c| &\leq \frac{\alpha(S_c - 1)}{2}\epsilon + \frac{\beta(S_c - 1)}{2}\epsilon \\
&= \frac{S_c - 1}{2}\epsilon \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

となる．$|\boldsymbol{L}'_j - \boldsymbol{L}_c|$についても同様である．

以上のことから，式4.20は，$t < T$ですべてのクラスターについて成り立つ．□

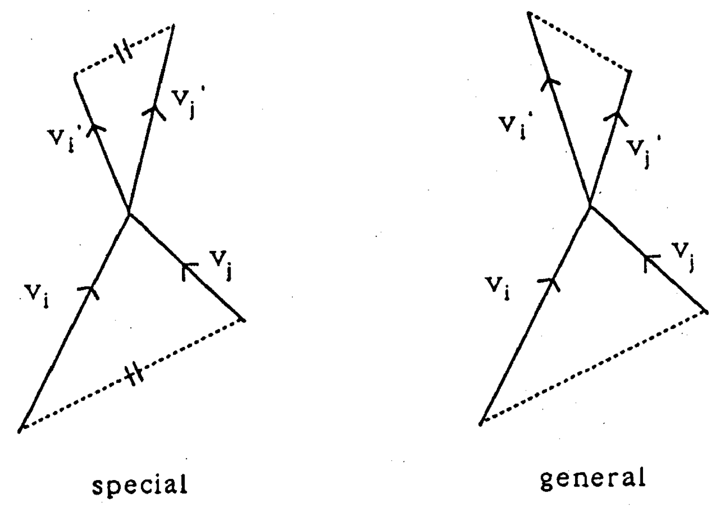


図 4.1: 特殊及び一般衝突モデル．
特殊衝突モデルでは，衝突前後の相対速度ベクトルは平行である．

4.3.2 円盤からリングレットへ

この節で私達は，共通の角運動量 L を持つ粒子群はいずれ鋭いリングレットをなすことを示す．共通の L を持つ粒子は同一平面内にあるが，軌道が同一である必要はない．軌道は

$$r_i = \frac{h^2}{1+\epsilon_i\cos(\theta+\omega_i)}, \tag{4.29}$$

で表される．$h \equiv |L_i|$ は共通であるが，離心率ϵや周期 T_iは，

$$\begin{aligned} \epsilon_i^2 &= 1+2h^2E_i, \\ T_i &= 2\pi(-2E_i)^{-3/2}. \end{aligned} \tag{4.30}$$

のようにエネルギー E_iに依存している．初めに，式 4.13 より，$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{L}_j$の関係は衝突しても崩れないことに注意する．次に，粒子のエネルギーは衝突によって変化するため一般に共通ではない．それぞれの粒子は異なるエネルギーを持ち，それゆえ離心率や周期も異なる．第三に，L が共通で異なる離心率を持つ 2 つの粒子は必ず平面内の 2 点で交わる．式 4.29 より，その交点は，

$$\theta = \tan^{-1}\frac{\epsilon_i\cos\omega_i - \epsilon_j\cos\omega_j}{\epsilon_i\sin\omega_i - \epsilon_j\sin\omega_j} \tag{4.31}$$

である．第四に，それらは異なる周期を持つ．周期の比は確率 1 で無理数であり，いつかは必ず衝突する．衝突によって E_i+E_jが減少するので，式 4.30 より$\epsilon_i^2+\epsilon_j^2$ も必ず減少する．この過程が，すべての粒子が同一の軌道をまわるようになり，鋭いリングレットを形成するまで続く．

粒子が有限の大きさ d を持つと，衝突による軌道の変化則は少し変わって，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_i{}' &= \alpha \boldsymbol{L}_i + \beta \boldsymbol{L}_j + \beta \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{v}_j, \\ \boldsymbol{L}_j{}' &= \beta \boldsymbol{L}_i + \alpha \boldsymbol{L}_j - \beta \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{v}_j \end{aligned} \tag{4.32}$$

となる．右辺第３項が粒子径の項であり，ここで$\boldsymbol{d} = d\boldsymbol{n}$ である．中心天体が静止しているような座標系においては，$\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j \gg \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_j$であることから，この第３項は，

$$\beta \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{v}_j = \beta \boldsymbol{d} \times \boldsymbol{v}_i \equiv \boldsymbol{A} \tag{4.33}$$

と近似できる．$\delta \boldsymbol{L}_i, \delta \boldsymbol{L}_j$をそれぞれ，$\boldsymbol{L}_i - \langle \boldsymbol{L} \rangle, \boldsymbol{L}_j - \langle \boldsymbol{L} \rangle$と定義すると，式4.32は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_i{}' &= \alpha \boldsymbol{L}_i + \beta \boldsymbol{L}_j + \boldsymbol{A}, \\ \boldsymbol{L}_j{}' &= \beta \boldsymbol{L}_i + \alpha \boldsymbol{L}_j - \boldsymbol{A} \end{aligned} \tag{4.34}$$

となる．ここで，

$$\begin{aligned} \langle \delta \boldsymbol{L}_i \rangle = \langle \delta \boldsymbol{L}_j \rangle &= \langle \boldsymbol{A} \rangle = 0, \\ \langle (\delta \boldsymbol{L}_i)^2 \rangle = \langle (\delta \boldsymbol{L}_j)^2 \rangle &= \langle (\delta \boldsymbol{L}_i')^2 \rangle = \langle (\delta \boldsymbol{L}_j')^2 \rangle, \\ \langle \delta \boldsymbol{L}_i \cdot \boldsymbol{A} \rangle = \langle \delta \boldsymbol{L}_j \cdot \boldsymbol{A} \rangle &= \langle \delta \boldsymbol{L}_i \cdot \delta \boldsymbol{L}_j \rangle = 0, \\ \langle \boldsymbol{A}^2 \rangle &= \langle \beta^2 (d v_i \sin\theta)^2 \rangle = \beta^2 d^2 / 2 \end{aligned} \tag{4.35}$$

を仮定すれば，

$$\langle (\delta \boldsymbol{L}_i)^2 \rangle = \frac{1 + e^2}{4(1 - e^2)} d^2 \tag{4.36}$$

$(\delta \boldsymbol{L})^2$の分散は軌道の散らばりを反映している．式4.29において，$\epsilon = 0$ とおくと，$\delta r = 2\delta L$ となり，これより

$$\langle (\delta r)^2 \rangle = 4 \langle (\delta \boldsymbol{L})^2 \rangle = \frac{1 + e^2}{1 - e^2} d^2 \tag{4.37}$$

となる．この式から，リングレットの広がりは粒子径程度になることが分かる．

4.3.3 進化のタイムスケール

N個の粒子を，初期位置と速度

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_i &= (\cos\theta_i + \delta_1, \sin\theta_i + \delta_2, \delta_3), \\ \boldsymbol{v}_i &= (-\sin\theta_i + \delta_4, \cos\theta_i + \delta_5, \delta_6) \end{aligned} \tag{4.38}$$

のように等方的に分布させる．ここで，θは区間 $[0\ldots 2\pi]$ の一様乱数で，$\delta_1\ldots\delta_6$は分散σ^2の正規乱数である．一つの粒子についての衝突頻度fは,（相対速度で掃引する体積）×（粒子の存在密度）で表され，すなわち

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{\pi d^2\sigma}{4}\frac{N}{2\pi\sigma^2} = \frac{Nd^2}{8\sigma}, \quad (3\text{ 次元}) \\
f &= d\sigma\frac{N}{2\pi\sigma} = \frac{Nd}{2\pi}, \quad (2\text{ 次元})
\end{aligned}
\tag{4.39}
$$

となる．ここで，

$$
\begin{aligned}
\langle\delta\boldsymbol{L}_i\cdot\delta\boldsymbol{L}_j\rangle &= 0, \\
\langle(\delta\boldsymbol{L}_i)^2\rangle = \langle(\delta\boldsymbol{L}_j)^2\rangle &\equiv \sigma^2(t)
\end{aligned}
$$

を仮定すると，軌道の揃い具合の指標

$$
L \equiv \sum(\delta\boldsymbol{L}_i)^2 = N\sigma^2 \tag{4.40}
$$

は，衝突毎に

$$
\frac{-(1-e^2)\langle(\boldsymbol{v}_i-\boldsymbol{v}_j)^2\rangle}{2} = -(1-e^2)\sigma^2 \tag{4.41}
$$

だけ変わる．n 回衝突の後には

$$
L_n = L_0\exp[-(1-e^2)n/N] \tag{4.42}
$$

となり，これは系の中で $N/(1-e^2)$ 回の衝突が起こると，軌道の揃い具合の指標が $1/e$ 倍（ただしこの e は自然対数の底 2.718... を表す）になることを意味する．進化速度 V_eは，

$$
\begin{aligned}
V_e &= \frac{(1-e^2)Nd^2}{8\sigma}, \quad (3\text{ 次元}) \\
V_e &= \frac{(1-e^2)Nd}{2\pi}, \quad (2\text{ 次元})
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

と見積もられる．進化のタイムスケールは，表4.2に示すように日から年のオーダーと見積もられる．

4.4 一般衝突モデルの理論

4.4.1 二つの軌道の差を定量的に表現すること

ケプラー軌道には２つの保存ベクトルがある．一つは軌道平面を決定する角運動量ベクトル$\boldsymbol{L}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}$ であり，もう一つはその平面内にある Laplace-Runge-Lenz ベクトル

表 4.2: 惑星環進化のタイムスケール.
(文献 [11] の p.48 及び p.80 による)

	Uranus α	Uranus ϵ	Saturn c	Saturn a
$M_{\mathrm{planet}}[kg]$	8.683×10^{25}		5.685×10^{26}	
$M_{\mathrm{particles}}(total)$[kg]	2.6×10^{13}	4.9×10^{15}	1.1×10^{18}	6.2×10^{18}
R: 環の半径 [m]	4.5×10^{7}	5.1×10^{7}	8.0×10^{7}	1.3×10^{8}
$d =$ 粒子径$/R$ [-]	2.2×10^{-8}	1.9×10^{-8}	1.2×10^{-8}	7.7×10^{-9}
$N = \frac{6M_{\mathrm{particles}}}{\pi d^3 \rho_{\mathrm{ice}}}$ [-]	4.9×10^{10}	9.3×10^{12}	2.2×10^{15}	1.2×10^{16}
T(時間スケール) $= \sqrt{\frac{R^3}{GM_{\mathrm{planet}}}}$ [s]	3.9×10^{3}	4.8×10^{3}	3.7×10^{3}	7.6×10^{5}
$V_e(3\mathrm{D}) = \frac{(1-e^2)Nd^2}{8\sigma}$ [-]	1.5×10^{-6}	2.2×10^{-4}	2.1×10^{-2}	4.4×10^{-2}
時定数 T/V_e [s]	2.5×10^{9}	2.2×10^{7}	1.7×10^{5}	1.7×10^{5}
	80.[y]	0.68[y]	2.0[d]	2.0[d]

$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{L} - \boldsymbol{r}/r$である. この後者のベクトルは近日点の方向を指し大きさは離心率である. $\boldsymbol{L} \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$ の関係から, 軌道を決定するために必要な独立な変数は6つではなく5つになる. 普通天文学では軌道要素として $(a, \epsilon, \Omega, i, \omega)$ をもちいるが, この章では天文学的軌道要素と, 保存ベクトルによる表示を適宜使い分ける. 以下軌道は x-y平面に近く, 離心率も小さいものとする. また, 5つの軌道要素として $(L_x, L_y, 1 + \delta L_z, \epsilon_x, \epsilon_y)$ を選ぶ. ただし, $L_x, L_y, \delta L_z, \epsilon_x, \epsilon_y$ はすべて1より遥かに小さい.

次に, 5次元の軌道要素空間内で一つの軌道を表す「軌道点」を考える. そして, 2つの軌道点の距離 D_{ij} を定義する. z軸方向の回転に対し D_{ij}が不変でなくてはならないことから, α, β, γを軌道空間の測度として

$$D_{ij}^2 = \gamma(L_{ix} - L_{jx})^2 + \gamma(L_{iy} - L_{jy})^2 + \beta(L_{iz} - L_{jz})^2 + \alpha(\epsilon_{ix} - \epsilon_{jx})^2 + \alpha(\epsilon_{jx} - \epsilon_{jy})^2 \quad (4.44)$$

とかける. 測度の係数α, β, γは正の値であるが, 具体的には後に議論する. $D_{ij} = 0$ であれば, 2つの粒子が同一軌道をまわる.

4.4.2 二つの軌道の差を衝突時の位置と速度で表すこと

この節では, 二つの円に近い軌道の距離 D_{ij}を衝突するときの速度と位置で表す. 粒子i, jが位置$\boldsymbol{R}$でぶつかり, そのときの重心の速度が$\boldsymbol{V}_c$だったとする. 一般性を失わずに, 計算に便利なように

$$\begin{aligned} \boldsymbol{R} &= (R, 0, 0), \\ \boldsymbol{V}_c &= (u_c, V, 0) \end{aligned} \quad (4.45)$$

となるような新しい座標系をとり直すことにする．このとき $R \approx 1, V \approx 1$ である．二つの粒子の速度は，相対速度を $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ として

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_i &= \boldsymbol{V}_c + \boldsymbol{v}/2, \\ \boldsymbol{v}_j &= \boldsymbol{V}_c - \boldsymbol{v}/2 \end{aligned} \tag{4.46}$$

と表せる．小文字の量 u_c, u, v, w などは 1 より十分小さい量である．式4.6，4.7は，衝突前と後の相対速度 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}'$ の式

$$\boldsymbol{v}' = E\boldsymbol{v} \tag{4.47}$$

と一つにまとめられる．行列 E は $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$ の転置ベクトル $\boldsymbol{n}^T, \boldsymbol{t}^T$ を用いて，

$$E = -e_n \boldsymbol{n}\boldsymbol{n}^T - e_t \boldsymbol{t}\boldsymbol{t}^T \tag{4.48}$$

とかける．

$\boldsymbol{L}, \epsilon$ の陽な表現は第4.9.1節で与えるが，そこで示す式4.81，4.84を式4.44に代入すると，$V \approx 1, R \approx 1$ を用いて，

$$\begin{aligned} D_{ij}^2 &= \alpha V^2 R^2 u^2 + (4\alpha V^2 + \beta) R^2 v^2 + \gamma R^2 w^2 + o(\boldsymbol{v}^2) \\ &\approx \alpha u^2 + (4\alpha + \beta) v^2 + \gamma w^2 \end{aligned} \tag{4.49}$$

となる．

この式は相対速度の 3 成分 α, β, γ が D_{ij}^2 に対しそれぞれ異なった重みを持つことを表している．それゆえ，相対速度が重みの軽い成分から重い成分に移るときには，$|\boldsymbol{v}'| < |\boldsymbol{v}|$ であっても D_{ij}^2 は増加し得る．D_{ij}^2 の増加は成分毎の重みの差が小さいときにはあまり起こらない．もし 3 つの係数 $\alpha, 4\alpha + \beta, \gamma$ が等しければ，D_{ij}^2 は相対速度そのものになり，非弾性衝突であれば必ず減少することになる．けれども，3 成分 α, β, γ は正であるという条件から，そのようなことは起こり得ない．

次にしなければならないのは 3 成分の重みを決定することである．第4.9.2節に示すように，$\alpha = \gamma = 1$ かつ $\beta = 8$ と選べば，D_{ij}^2 は 2 つの軌道の自乗平均距離になる．この係数の取り方は意味が明確であるが，それに拘束されるわけではない．というのは，2 つの軌道が同一であるときに限って D_{ij}^2 が 0 であるようになっていれば，係数の選び方は以下の議論に影響しないからである．従って，α, β, γ は勝手な正の値として良い．

そこで $\alpha = \gamma = 1$ とおき，β は変数とする．この測度の取り方を式4.49に当てはめると，

$$D_{ij}^2 = \boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{v}, \tag{4.50}$$

ただし，δ を Kronecker のデルタとして

$$\begin{aligned} M &\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4+\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}, \\ m_i &= 1 + (3 + \beta)\delta_{i2} \end{aligned} \tag{4.51}$$

となる．これより，D_{ij}^2の衝突による変化は

$$\Delta D_{ij}^2 = \boldsymbol{v}'^T M \boldsymbol{v}' - \boldsymbol{v}^T M \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T (EME - M)\boldsymbol{v} \tag{4.52}$$

と求まる．

4.4.3 D_{ij}^2が確実に減少する条件

この節では，どんな衝突でも必ずD_{ij}^2が減少するためのe_n, e_tの条件を求める．相対速度を

$$\boldsymbol{v} = v_n \boldsymbol{n} + v_t \boldsymbol{t} \tag{4.53}$$

と分解すると，D_{ij}^2の変化は次のように計算できる．

$$\Delta D_{ij}^2 = v_n^2(e_n^2 - 1)M_{nn} + 2v_n v_t(e_n e_t - 1)M_{nt} + v_t^2(e_t^2 - 1)M_{tt}. \tag{4.54}$$

ただし，

$$\begin{aligned} M_{nn} &\equiv \boldsymbol{n}^T M \boldsymbol{n}, \\ M_{tt} &\equiv \boldsymbol{t}^T M \boldsymbol{t}, \\ M_{nt} &\equiv \boldsymbol{n}^T M \boldsymbol{t} \equiv \boldsymbol{t}^T M \boldsymbol{n} \end{aligned} \tag{4.55}$$

と定義する．ここに現れるMは，式4.51及び$\boldsymbol{n}$と$\boldsymbol{t}$の直交性を考慮して，

$$\begin{aligned} M_{nn} &= \sum_i m_i n_i^2 &&= 1 + (3+\beta)n_2^2, \\ M_{tt} &= \sum_i m_i t_i^2 &&= 1 + (3+\beta)t_2^2, \\ M_{nt} &= \sum_i m_i n_i t_i &&= (3+\beta)n_2 t_2 \end{aligned} \tag{4.56}$$

となる．ただし，n_i, t_iはそれぞれ$\boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$の第$i$成分を表す．

式4.54はv_n, v_tの2次形式である．この量が負定であるためには，次の関数

$$f \equiv (1 - e_n^2)(1 - e_t^2)M_{nn}M_{tt} - (1 - e_n e_t)^2 M_{nt}^2 \tag{4.57}$$

が正定であれば良い．式4.55を式4.57に代入すれば，衝突角度n_2, t_2の関数として，

$$f = (1 - e_n^2)(1 - e_t^2)[1 + (3+\beta)(n_2^2 + t_2^2)] - (3+\beta)^2(e_n - e_t)^2 n_2^2 t_2^2 \tag{4.58}$$

が得られる．第4.9.3節に示す計算により，

$$(1 - e_n^2)(1 - e_t^2) - \frac{(3+\beta)^2}{4(4+\beta)}(e_n - e_t)^2 > 0 \tag{4.59}$$

のとき，n, tに関わらずfが正であることが示される．この式が満たされていれば，相対速度や衝突角度に関わらずD_{ij}^2は減少する．以下この条件を満たせばリングレットが形成されることを，第4.4.5，4.4.6，4.4.7節で論ずる．だから式4.59はe_n, e_tのためのリングレットの絶対収束条件であるといえる．ところで、リングレットが出来るための物理的な条件が勝手な係数βに影響されるとしたら，それはおかしいことである．したがって，許される範囲でもっとも緩い条件を選んで良い．つまり，$\beta \to 0$の極限（ただし$\beta \neq 0$）である．この極限で，式4.59は，

$$(1-e_n^2)(1-e_t^2)-\frac{9}{16}(e_n-e_t)^2>0 \tag{4.60}$$

となる．この絶対収束領域を図4.2の領域Iとして示す．

4.4.4 D_{ij}^2が統計的に減少する条件

次に，どんな衝突でも必ずD_{ij}^2が減少するという条件を緩め，統計的に減少する条件を求めよう．ある粒子が，一方向からやってくる粒子の流束の中にある場合を考える．D_{ij}^2の変化は衝突角度によって変わる．特定の方向から来る粒子が正面衝突したり，かするような衝突をした場合のD_{ij}^2の変化の平均を後の第4.9.4節で計算する．その結果は，

$$\langle \Delta D_{ij}^2 \rangle = \frac{w^2}{4}(3e_n^2-2e_ne_t+3e_t^2-4) \tag{4.61}$$

となる．統計的収束領域はe_n–e_t平面の$\langle \Delta D_{ij}^2 \rangle$が負である領域である．図4.2に示すようにこの領域IIは領域Iを含んでいる．

4.4.5 粒子系の広がりを表す量$\mathcal{D}^2$

粒子系全体の広がりを表す量としてD_{ij}^2の粒子のすべての組合せについての和

$$\mathcal{D}^2=\sum_{ij\mathrm{pair}}\sum D_{ij}^2 \tag{4.62}$$

を定義する．この節では，衝突する組のD_{ij}^2が減少すれば必ず$\mathcal{D}^2$も減少することを示す．

粒子1と2が衝突する場合を考える．$\mathcal{D}^2$は，$\boldsymbol{X}$を軌道点として

$$\mathcal{D}^2=(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_2)^2+\sum_{k=3}^{N}(\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_k)^2+\sum_{k=3}^{N}(\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_k)^2+\sum_{k=3}^{N}\sum_{l=3}^{N}(\boldsymbol{X}_k-\boldsymbol{X}_l)^2 \tag{4.63}$$

とかける．

補助定理 4.1 2つの粒子の軌道点の重心は衝突によって不変である．すなわち，

$$\boldsymbol{X}_i'+\boldsymbol{X}_j'=\boldsymbol{X}_i+\boldsymbol{X}_j \tag{4.64}$$

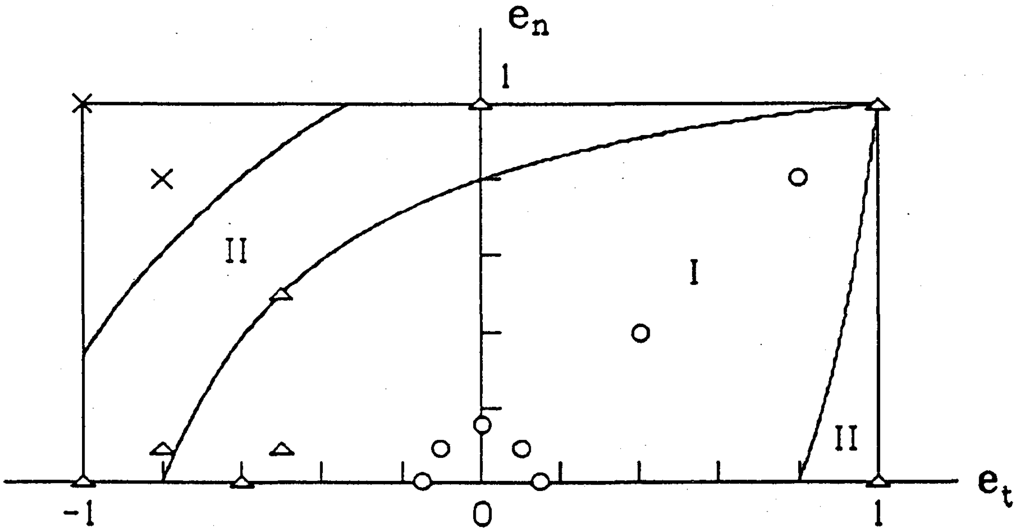


図 4.2: リングレット形成条件.
$e_n = e_t$の線を含む領域Iは絶対収束条件である．領域Iを囲む領域IIは統計的収束条件である．数値実験点は$\circ, \times, \triangle$ の記号で表され，それぞれポアンカレマップの分散が，減少，増大，中立傾向にあったことを示す．

証明　4つの軌道$\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j, \boldsymbol{X}'_i, \boldsymbol{X}'_j$があり，それぞれ$\boldsymbol{L}$及び$\epsilon$に対し近似的に線形とみなせる．$\boldsymbol{L}$及び$\epsilon$の表式は後の式4.79，4.80，4.82，4.83で与えているから，補助定理4.1は$\boldsymbol{v}$の1次のオーダーで成り立つことが直接確かめられる．□

補助定理 4.2

$$2(\boldsymbol{X}'^2_i + \boldsymbol{X}'^2_j) - 2(\boldsymbol{X}^2_i + \boldsymbol{X}^2_j) = (\boldsymbol{X}'_i - \boldsymbol{X}'_j)^2 - (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)^2. \qquad (4.65)$$

証明　これは補助定理4.1を用いて次のように示される．

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{X}'_i - \boldsymbol{X}'_j)^2 - (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)^2 &= (\boldsymbol{X}'_i - \boldsymbol{X}'_j)^2 + (\boldsymbol{X}'_i + \boldsymbol{X}'_j)^2 - (\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j)^2 - (\boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_j)^2. \\ &= 2(\boldsymbol{X}'^2_i + \boldsymbol{X}'^2_j) - 2(\boldsymbol{X}^2_i + \boldsymbol{X}^2_j).\square \qquad (4.66)\end{aligned}$$

定理 4.2 (系の広がりの定理) 粒子系の広がり $\mathcal{D}^2$は衝突のたびに単調に減少する．

証明　補助定理 4.1，4.2を用いて，衝突による $\mathcal{D}^2$の変化を計算する．式4.63 の系の広がりの定義より，

$$\Delta\mathcal{D}^2 \equiv (\boldsymbol{X}'_1 - \boldsymbol{X}'_2)^2 - (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)^2$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{k=3}^{N}(\boldsymbol{X}_1' - \boldsymbol{X}_k)^2 + \sum_{k=3}^{N}(\boldsymbol{X}_2' - \boldsymbol{X}_k)^2 - \sum_{k=3}^{N}(\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_k)^2 - \sum_{k=3}^{N}(\boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_k)^2 \\
&= \frac{N}{2}[(\boldsymbol{X}_1' - \boldsymbol{X}_2')^2 - (\boldsymbol{X}_1 - \boldsymbol{X}_2)^2] \\
&= (N\Delta D_{12}^2)/2 < 0 \qquad (4.67)
\end{aligned}
$$

となる．よって，D_{12}^2が減少するとき必ず $\mathcal{D}^2$ も減少する．いまは粒子 1,2 の場合を示したが他の組合せでも同様である．

4.4.6 定常状態の存在

これまでの議論で，系の広がりを表す量 $\mathcal{D}^2$は下限を持つ単調減少列であることが分かった．そのような数列は収束する．収束する数列には，任意に小さい正数ϵ_2 に対して定まる充分長い時間 Tが経過した後には，

$$|\Delta\mathcal{D}^2| = (N\Delta D_{ij}^2)/2 < \epsilon_2, \qquad (4.68)$$

が成り立つという Cauthy の定理がある．時刻T以降の時期を定常状態と定義する．式4.52 を考慮すると，この定理は衝突する粒子 i,jの相対速度が 0 に収束することを意味している．それゆえ衝突する粒子の軌道点は極めて近く，任意に小さい正数ϵに対して定まる充分長い時間 Tが経過した後には，

$$\sqrt{|D_{ij}^2|} = |\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j| < \epsilon \qquad (4.69)$$

が成り立つ．この状態を粒子 i,jがϵ近傍にあると呼ぶことにしよう．

定常状態ではゆっくりした衝突しか起こらないので，系の状態は変わらない．軌道空間内ですぐ近くにある粒子だけが衝突して，さらに近付く．このようにして互いに衝突する粒子は軌道空間内の軌道点が互いに近付いていき，その広がりは衝突が続く限り 0 に近付いていく．

4.4.7 クラスタリング定理

この節では，すべての粒子がx-y平面内にあるとする．このとき，$L_x = L_y = 0, L_z \equiv 1+h$ である．軌道点は，$(1+h, \epsilon_x, \epsilon_y)$ の 3 要素で表される．さらに，軌道が単位円に近いという仮定

$$h, \epsilon_x, \epsilon_y \ll 1 \qquad (4.70)$$

をおく．軌道点は図 4.3に示すように $(1,0,0)$ のまわりにある．式 4.70の条件が満たされているとき，次の定理が成り立つ．

定理 4.3 (衝突領域の定理) 粒子 i, j は，次の条件を満たすときいつか必ず衝突する．

$$2|h_i - h_j| < |\epsilon_i - \epsilon_j|. \tag{4.71}$$

証明 第4.9.2節より，粒子の中心天体からの距離は

$$r(\theta) = 1 - 2h + \epsilon_x \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \tag{4.72}$$

とかける．従って，2つの粒子の同じθにおけるrの違いは，αを$\epsilon_i - \epsilon_j$ の向き（ϵ_iとϵ_jのなす角度ではないことに注意）とするとき，

$$\begin{aligned} r_i - r_j &\approx -2h_j + 2h_i + (\epsilon_{ix} - \epsilon_{jx})\cos\theta + (\epsilon_{iy} - \epsilon_{jx})\sin\theta \\ &= -2(h_i - h_j) + |\epsilon_i - \epsilon_j|\cos(\theta + \alpha) \end{aligned} \tag{4.73}$$

となる．不等式4.71が成り立つとき，式4.73は2つθの解を持ち，その角度で軌道が交わっている．2つの軌道の周期の比はほとんど常に無理数であるから，2つの粒子はいつか必ず衝突する．

系 粒子の大きさを考慮に入れると，衝突条件は

$$2|h_i - h_j| < |\epsilon_i - \epsilon_j| + d. \tag{4.74}$$

に変わる．

相対角運動量$\Delta L \equiv h_i - h_j$及び相対 Laplace ベクトル$\Delta\epsilon \equiv \epsilon_i - \epsilon_j$が不等式4.74を満たすいつかは衝突する粒子の組合せを,「衝突可能」であると呼ぼう．図4.4(a) に，衝突可能な$\Delta L, \Delta\epsilon$ の組合せを示す.「衝突不能」領域にある粒子同士は衝突することはない．

粒子i, jは衝突可能か不能かのいずれかである．系の進化の過程で次の場合が考えられる．

1. (i, j) が衝突可能なとき，
   (a) (i, j) が衝突した場合，それらは衝突可能であり続ける．交わる軌道が，お互いの衝突によって交わらない軌道に移ることはない．
   (b) i またはjのいずれかが第三の粒子と衝突することで，(i, j) が衝突不能になることはあり得る．
2. (i, j) が衝突不能なとき，i またはjのいずれかが第三の粒子と衝突することで，(i, j) が衝突可能になることはあり得る．

このようにして軌道点は軌道空間内を移動していく．図4.4(b) に示すような軌道空間内に任意に配置された粒子は，衝突可能である限り衝突を続ける．式4.69が示すように，充

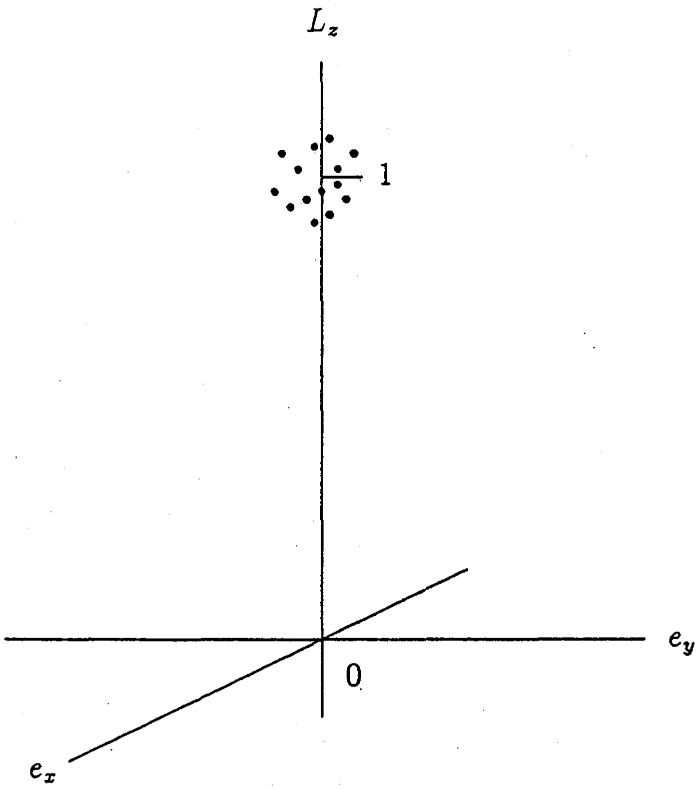


図 4.3: 2 次元の軌道点.
2 次元座標空間内の軌道は 3 つの軌道要素で表される．ここでは，軌道点は $(1,0,0)$ に近いと仮定する.

分長い時間後には衝突可能な粒子の軌道点は直径 d より遥かに近いϵ近傍に集まる．言い替えると，定常状態では，衝突可能な粒子の軌道点はϵ近傍にある (図 4.4(c))．互いにϵ近傍にある粒子の集合はクラスターである．クラスターサイズは 1 以上である．クラスター同士の衝突条件は粒子のそれと同じであることから，次の定理が成り立つ.

定理 4.4 (クラスタリング定理) 粒子は最終的に，お互いに衝突不能であるようなクラスターを形成する.

同じクラスターに属する粒子は衝突を続けるが，相対速度がほとんどないため系の状態を変えない．図 4.4 に示す定常状態は，系の状態を変えるようなクラスタ間衝突がないという意味で「無衝突状態」とも呼べる．クラスターサイズが充分大きければ，リングレットに見えるであろう.

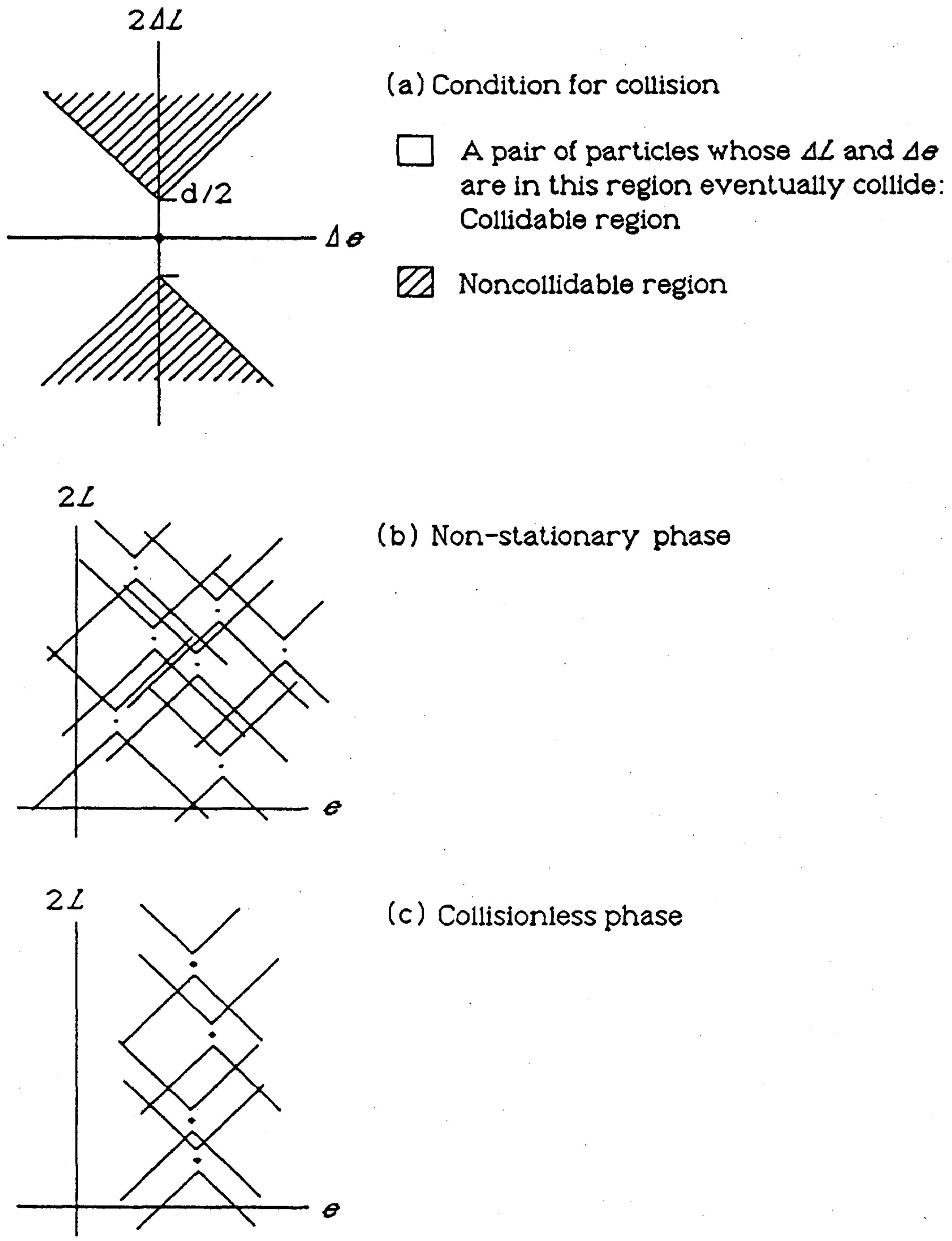


図 4.4: 衝突する軌道点の関係.
(a) 衝突可能な関係の説明図. 衝突可能領域では式 4.74 が満たされ, 2 つの粒子はいつかは衝突する. 衝突不能領域では衝突しない. (b) 非定常状態. 互いの衝突可能領域に粒子があるので, 衝突が起こり, 系の状態はまだ変わっていく. (c) クラスタリング定理で予言される無衝突状態. クラスターどうしは決して衝突しない.

4.5 数値実験その1

4.5.1 数値積分によるシミュレーション

この節では，式4.4，4.5，4.6，4.7を数値的にといて，シミュレーションでリングレットの形成を実証することを試みる．

まず微分方程式を差分化して，4次のRunge-Kutta法で解くことを試みた．粒子径dは，基準となる円軌道の半径1に対して1/1000とした．初期条件は，式4.38を用い，乱数の分散σ^2は0.04とした．このd, σと粒子数Nの合計3つの自由変数がある．この節のシミュレーションではz方向の分布はつけず，2次元円盤状の分布とした．時刻0から約1000公転に相当する2000πまで軌道を追跡した．精度は，熱の発生を含む全エネルギーと粒子の自転に転換する分も含めた全角運動量が，シミュレーション期間を通じて10^{-7}の精度で保存されることで確かめた．時間ステップはこの精度を保障するようプログラムが自動調整するが，大体0.03程度であった．一公転約6単位時間であるから一公転当たり約200ステップ刻んだことになる．

衝突するかどうかの判定はステップ毎に$N(N-1)/2$通りの粒子の組み合わせについて行なう．時間刻み幅が小さいことから，現在の時刻から次の刻みまでの軌道は直線であると仮定し，2次方定式を解いて次の刻みまでの間に距離が半径の和以下になる時があるかどうかを調べる．この方法の不完全なところは，衝突判定部では軌道を直線と仮定しているため，Runge-Kutta法を用いる軌道積分部より精度が悪いことである．

まず40粒子でe_n, e_tを変えて，環が広がるかどうかだけを確かめる実験を行なった．ポアンカレマップは，粒子がx-z平面のx軸の正の領域を横切る時のx座標を記録したものである．ポアンカレマップの分散，

$$k = \sum_i^N (x_i - \langle x \rangle)^2 \tag{4.75}$$

の時間変化を調べ，図4.2の実験点に示す結果を得た．これは理論の結果と整合している．

次に，リングレットの形成を調べるため粒子数を100に増やした実験を行なった．反発係数は絶対収束条件を満たす$(e_n, e_t) = (0.1, -0.4)$とした．全衝突回数は687回であり，各粒子は平均10回以上衝突したことになる．しかし，以下の節により多い粒子数のシミュレーション結果を掲げることもあり，敢えてここに見せるほどの結果は得られなかった．粒子数が少な過ぎ，

1. リングレット形成を十分視覚化できない．100粒子をプロットしても，パラパラに配置するだけで，リングレットには見えない．

2. 衝突頻度が更に少なくなる3次元シミュレーションは，計算能力の点からとても無理．

などの問題があるからである．

40 粒子，100 粒子の数値積分による計算実験は SONY の NEWS NW-1750 ワークステーションを用い，約 8 ないし 24 時間を要した．100 粒子の場合の内訳は，数値積分に要する時間と，時間刻み毎に行なう $N(N-1)/2$ 組の衝突判定に要する時間が半々である．粒子を増やした場合，積分に要する時間は一ステップあたり $O(N)$ で済むが，衝突判定は $O(N^2)$ かかる．よって両者の所要時間が同程度である，$N=100$ がこの方法で一ステップ当たりの計算時間が $O(N)$ でできる限界といえる．それ以上 N を増やすと，一ステップ当たり $O(N^2)$ かかることになり計算能力が不経済である．NW-1750 は約 0.2 MFLOPS の機械なのでより速いマシンもあるが，この方法で飛躍的に粒子数を増すことは難しい．

一ステップ毎にすべての組み合わせについて考える方法は，本質的には相互重力系の計算をしているのと変わりがない．相互重力系は粒子の軌道が解析的に求められないので，数値積分によるしかないのだが，私達の場合はケプラー軌道であるから各粒子の軌道は独立に計算できる．しかし毎ステップ毎の衝突判定のためにその利点が生かされていないという点で，この方法は無駄がある．

リングレット形成を明らかに示すためにはより粒子数の大きいシミュレーションが必要であり，利用できるマシンでそれを達成するためには別の手法を用いなければならない．

4.5.2 モンテカルロ・シミュレーション

軌道を追跡しない非決定的な手法によって，より多い粒子を扱うことができる．このシミュレーションは慶應義塾大学理工学部川合敏雄研究室の鈴木清弘氏により行なわれたものである．以下に 2 次元の場合の方法を示す．

1. 初期条件は式 4.38によって生成する．軌道点は (L_z, e_x, e_y) で表され，$(1,0,0)$ のまわりにある．

2. 系が安定状態に達するまで軌道点の組合せを任意に選び，それが式 4.74を満たしていれば，つぎの相互作用をさせる．

3. 軌道点$\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{X}_j$は，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_i' + \boldsymbol{X}_j' &= \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{X}_j, \\ |\boldsymbol{X}_i' - \boldsymbol{X}_j'| &= \alpha|\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{X}_j| \end{aligned} \tag{4.76}$$

を満たす$\boldsymbol{X}_i', \boldsymbol{X}_j'$に移る．$(e_n, e_t)$ が絶対収束領域にある時，係数αは 0 と 1 の間になる．αは e_n, e_tだけでなく，$v_n, v_t, \boldsymbol{n}, \boldsymbol{t}$ にも依存するが，簡単化のため定数とする．$\boldsymbol{X}_i' - \boldsymbol{X}_j'$ の方向は 3 次元軌道点空間内でランダムに決める．この衝突法則は元のモデルとは異なっている．

図4.5に示す結果は，$N = 5000, \alpha = 0.5, d = 0.02, \sigma^2 = 0.04$ の場合である．10^7個の組を選んだところ，730587組が式4.74を満たし相互作用した．一つの粒子当たり約300回となり，十分安定状態に達していると考えられる．図4.5(a),(b) はそれぞれ実空間での初期，終期状態を示す．近日点通過時刻を無視しているため，図では粒子は軌道上の任意の場所においた．そのため，粒子が重なって配置されている．結果を見ると，軌道のクラスタリングに対応して粒子が一列毎の同心円にきれいに配置されていることが分かる．

このモンテカルロ・シミュレーションは時間を圧縮する方法とみなせ，多数の粒子を扱うには有効であるがリングレット形成を実証するものとしてはまだ不満がある．

1. 衝突のモデルを変えていること．軌道の正確な追跡を放棄しているため，衝突関係位置も定まらず，任意性が入ってくることは仕方がない．そのため厳密にはクラスタリング定理の証明になっていない．
2. 従って，リングレットができても，その構造まで正確に再現されている保証はない．
3. また，時間の概念がないため，時間発展のようすが分からない．
4. これより，リングレットができるような恣意的な条件を用いているとの批判に答えるのが難しい．

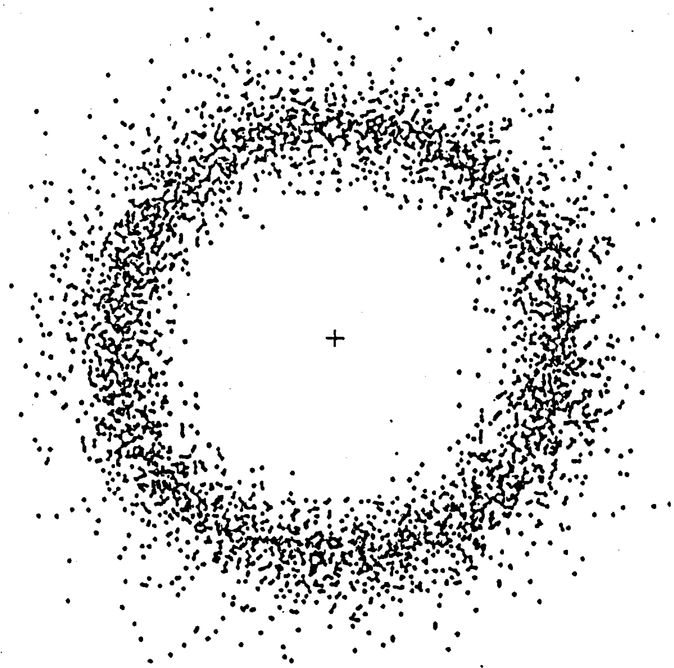
従って，リングレット形成を明らかに実証するためには，多数の軌道をちゃんと追跡するシミュレーションが求められる．

4.6 改良した数値実験

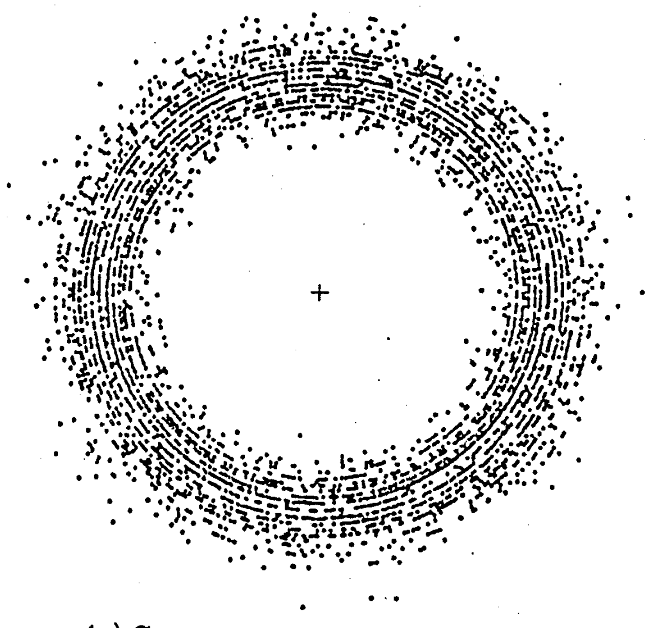
4.6.1 リングレット形成の実証

そこで，私たちはTrulsenの方法[26]を改良して，効率良い方法で粒子の衝突時間を求めるアルゴリズムを開発し，それを利用したシミュレータを実装した．詳しい方法については文献shida91b章述べてある．この節では，それを用いた最大2000粒子の軌道を実際に追跡する3次元シミュレーションでリングレットの形成を実証する．

数値積分の場合と比べて，乱数の分散σ^2は同様の0.04としたが，3次元分布とし，粒子径dは1/2000，粒子数は最大2000とした．数値積分の方法に比べ粒子数は20倍，粒子径は半分にできた．それでも現実の環に比べ，粒子数は少な過ぎ一つ一つの粒子は大き過ぎる．現実の土星の環では粒子の直径$1m$に対し軌道半径は10^8m程度ある．私達が用いたような大き過ぎる直径は，仮定4 ($d \ll r$) を壊すのでリングレット形成には不利な条件として働く．



a) Initial Arrangement



b) Stationary Arrangement

図 4.5: モンテカルロ・シミュレーション.
$\alpha = 0.5, N = 5000, d = 0.02$ とした. 上の図は初期状態, 下の図は 730587 回の相互作用をした後の状態である.

まず，2000 粒子で $(e_n, e_t) = (0.1, -0.4)$ の場合を示す．この反発係数は絶対収束領域の中にある．衝突回数は 22744 回で，1 つの粒子につき平均 20 回以上衝突したことになる．シミュレーションは $t = 10000\pi$ まで行なったが，これは大体 5000 周期に相当する．図 4.6 は初期状態とシミュレーション終了時における粒子の配置を x-y 平面と x-z 平面に投影して示したものである．円盤が薄くなり縁がシャープになっていることがわかる．図 4.7 と 4.8 に示す平均離心率と平均軌道傾斜角は単調に減少している．

初期及び終了時のポアンカレマップの度数分布表を図 4.9 に示す．一区間の幅は $0.01 = 20d$ である．これを見ると動径方向の分布は広がっていないことがわかる．また，初期の正規分布に近い分布が鋭い山谷の分布で置き換えられている．この山谷はリングレット形成の証拠といえるだろう．粒子の集まり具合は反発係数によって差があるが，リングレットを作る傾向ははっきりしている．このことは軌道点空間内でのクラスタリングに対応している．

図 4.10 には衝突頻度の変化を示す．衝突はシミュレーションの終りまで充分頻繁に起こっているが，それにも関わらず e, i がシミュレーションの後半であまり減少しなくなっていることは，定常状態が実現している証拠とみなせる．

4.6.2 粒径を分布させた場合

クラスタリング定理は均質な粒子を仮定している．粒子が大小ある場合は，複雑になるためまだ考察していないが，実験してみた．500 粒子，シミュレーション期間 10000π とし，2 通りの分布を試した．初期配置例を図 4.11 に示す．

1. 質量 m が一様分布．

   質量を $0.001 < m < 1$ の一様乱数で生成した．粒子の密度を一定として，直径は $1/5000 < d < 1/500$ の範囲に分布している．その結果を図 4.12 に示す．全衝突回数は 6134 回だった．

2. 質量 m が指数分布

   小さい粒子の比率を上げるため，質量を $0.001 < m < 0.01$, $0.01 < m < 0.1$, $0.1 < m < 1$ の範囲にそれぞれ粒子を 1/3 ずつ分布させるように指数分布させた．直径は $1/2500 < d < 1/250$ の範囲とし，衝突頻度を保つため直径の範囲を大きい方にずらした．その結果を図 4.13 に示す．全衝突回数は 7154 回だった．

これらの結果を見ると，d を分布させても環は広がらないことが分かるが，リングレットの形成に関しては，より詳しい実験が必要であるように思われる．

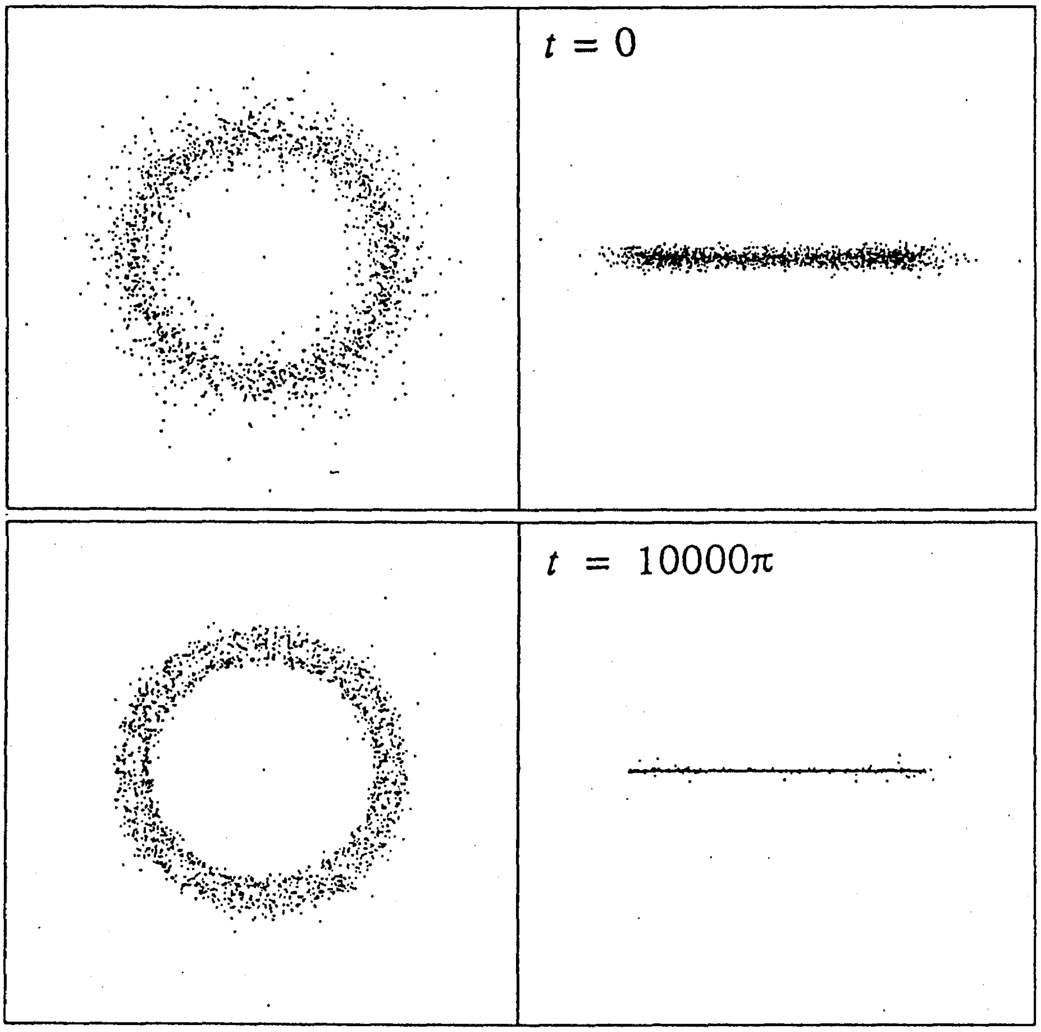


図 4.6: シミュレーション結果.
$(e_n, e_t) = (0.1, -0.4)$, $N = 2000$, $d = 5.0$, $\times 10^{-4}$, $\sigma^2 = 0.04$ とした．この反発係数は絶対収束領域にある．上の図はシミュレーション開始時の，下は終了時 ($t = 10000\pi$) の時の粒子の配置を示す．

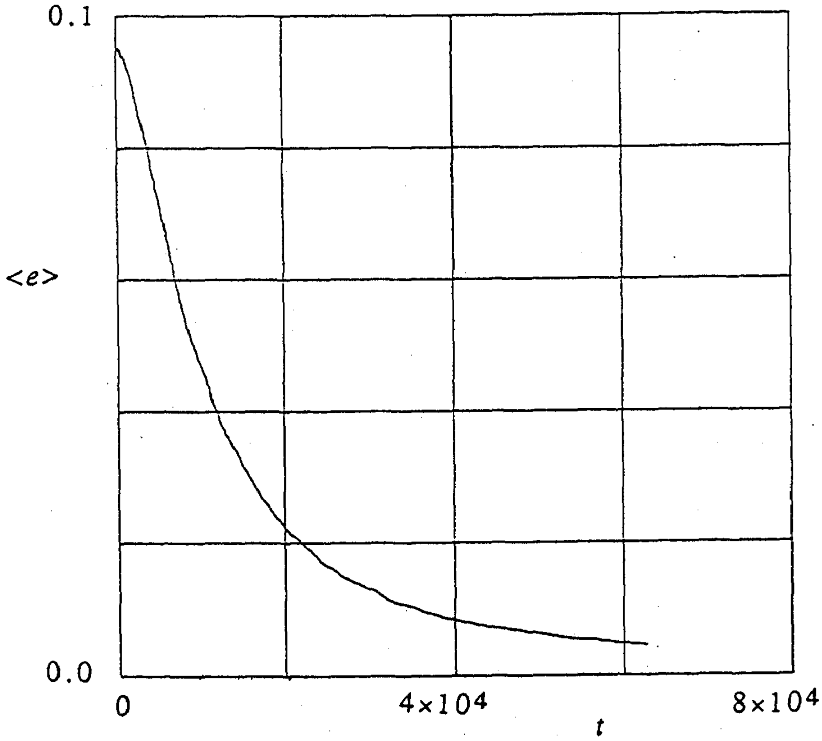


図 4.7: 平均離心率の変化.

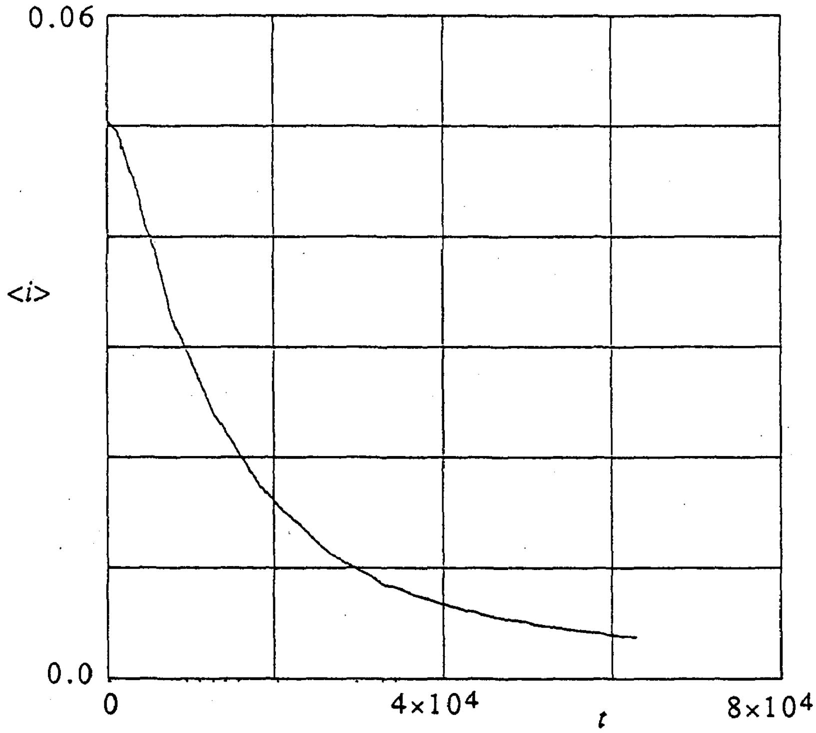


図 4.8: 平均軌道傾斜角の変化.

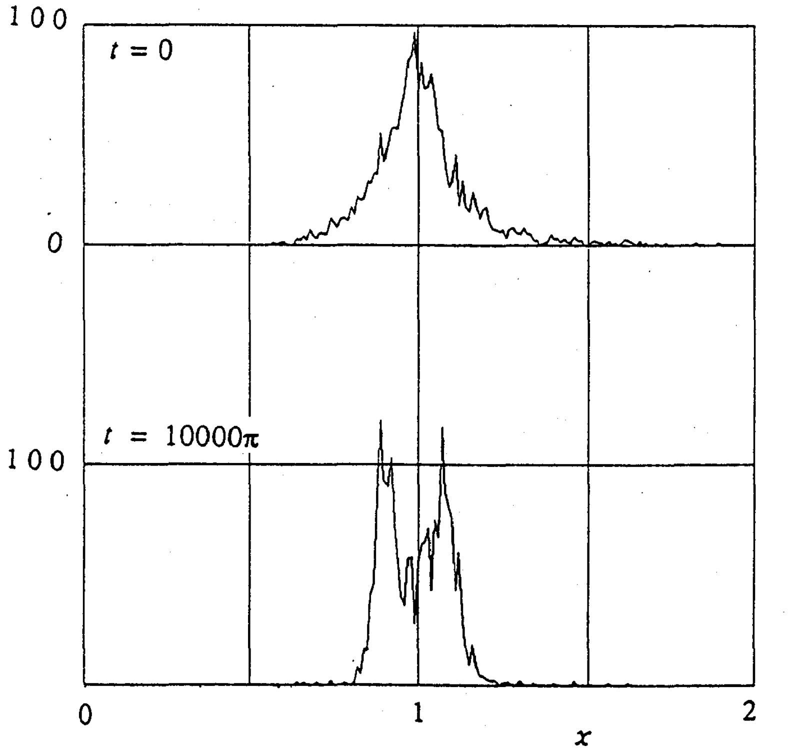


図 4.9: ポアンカレマップの度数分布表.

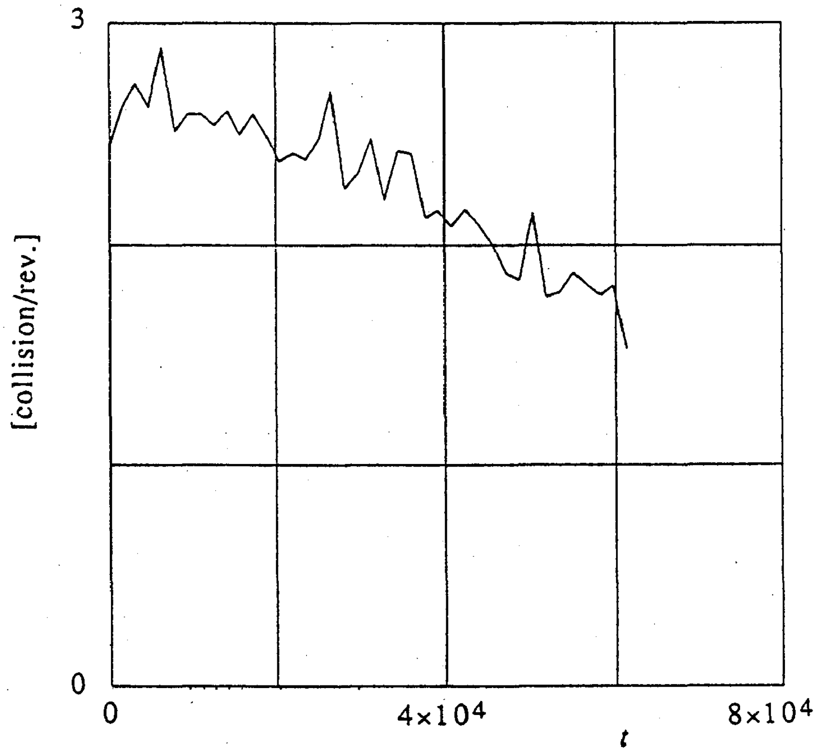


図 4.10: 衝突頻度の変化.

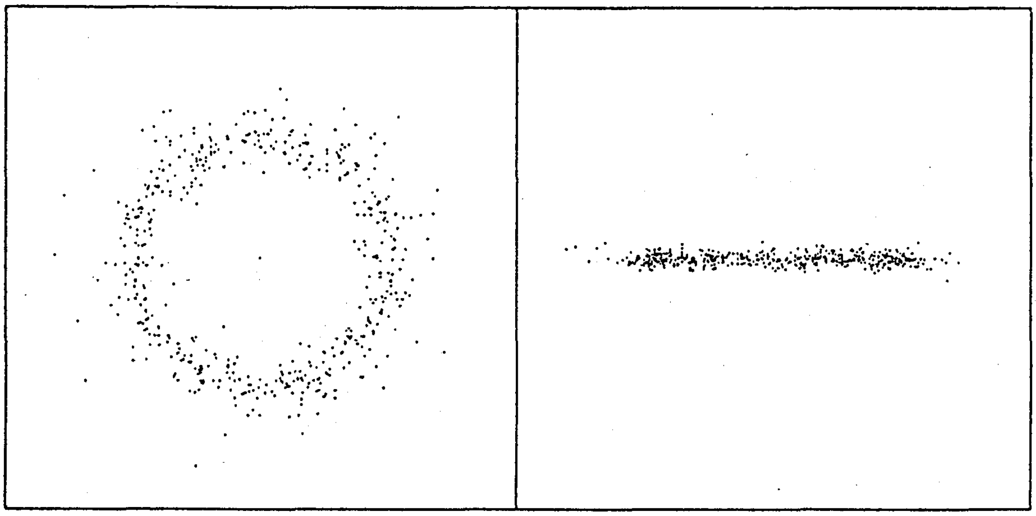


図 4.11: 500 粒子の初期配置例

4.7 議論

4.7.1 反発係数の速度依存性の影響

本章の議論では，反発係数は相対速度に依らない定数としたが，依存する場合は次のようになる．氷の粒子では相対速度が増すと反発係数は小さくなる．従って，環の進化の早い段階では不等式4.60が満たされリングレットが次第に形作られる．そうすると相対運動が小さくなって式4.60を満たさなくなるので，リングレットはそれ以上縮まらなくなる．つまり，反発係数の速度依存性は残留する幅を決定すると考えられる．

粒子 1, 2 の衝突時の相対速度 v は，ケプラー運動の速度 v_K に対しおおよそ

$$v = v_K\sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + i_x^2 + i_y^2} \tag{4.77}$$

程度である．土星の場合，環の中ほどに位置する土星中心から 10 万 km の場所の v_K は約 2 万 m/s である．$e_n < 1/3$ のときには，e_t の値に関わらず統計的収束の条件式4.61が満たされる．文献 [7, 12] の実験値を参照すると，$e_n < 1/3$ となるのは，$v \geq 0.01$m/s のときなので，

$$\sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + i_x^2 + i_y^2} = v/v_K = 5 \times 10^{-7} \tag{4.78}$$

となる．これは数十 m の幅のリングレットに対応する．式4.69は 2 つの軌道が完全に同一になると主張しているが，この数十 m が私達の理論の適用限界になる．

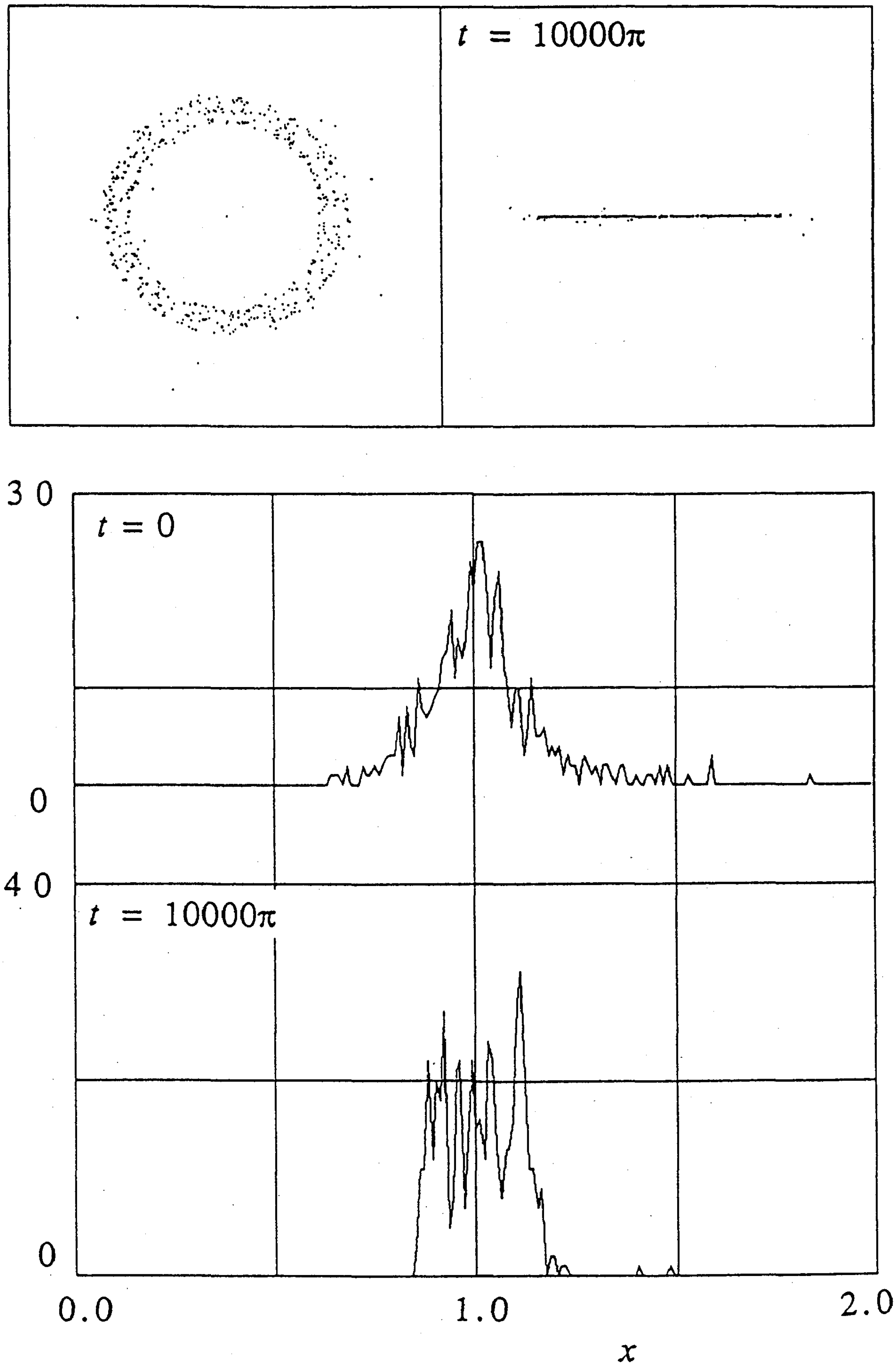


図 4.12: 質量を一様分布させた場合

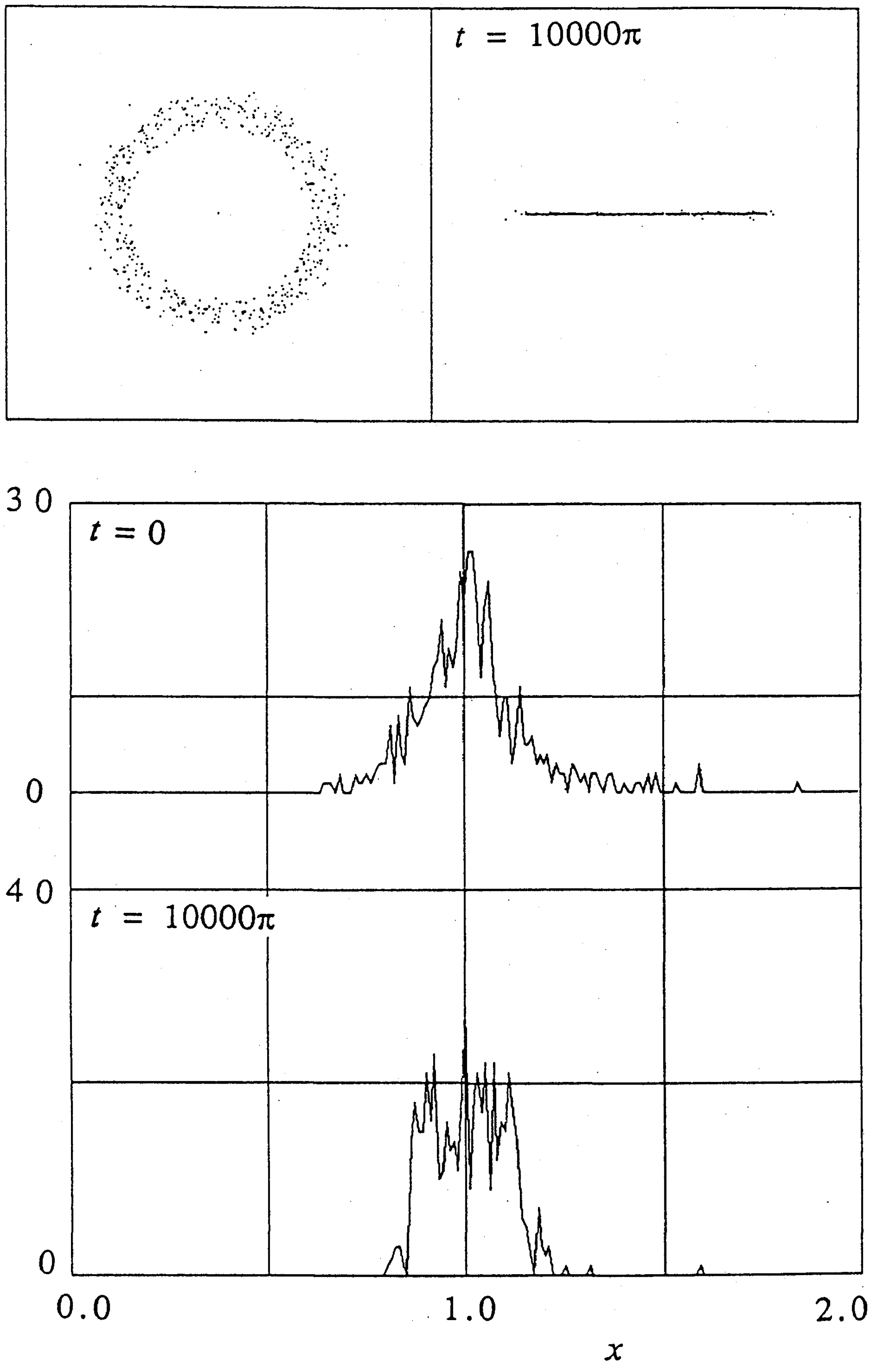


図 4.13: 質量を指数分布させた場合

力学的エネルギーが減れば軌道半径も小さくなるから，衝突によってエネルギーが減るとすべての粒子が中心天体に落ち込んでしまうのではないかという疑問がある．確かに，粒子が完全にランダムな軌道をまわっており，全角運動量がほとんど0であれば，あり得るかも知れない．けれども私達は軌道が大体似ている場合を考えているので，そのようなことにはならない．衝突による運動エネルギーの損失は $(v_i - v_j)^2$程度であり，私達の場合運動エネルギーそのものよりずっと小さい．それゆえ，粒子はもとの軌道の近くに留まり，やがて無衝突状態に落ちつく．

環を粘性流体として扱った理論では動径方向に広がっていくことは不可避とされた．私たちの理論では最終的に無衝突状態になり，動径方向の粘性による運動量の運搬がなくなるので，このことから免れるのである．

現実の環を構成する粒子が領域IないしIIに含まれているかは興味深いことである．e_tの実験データが不足しているため断言は出来ないが，私達は少なくとも環の進化の初期段階では含まれていたのではないかと考える．というのは先にも述べたように，e_nが小さくなればe_tに関する条件は緩くなり，$e_n < 1/3$であれば，e_tに関わらず式4.61の統計的収束条件を満たすからである．

4.7.2 今後の方向

残された研究課題には次のようなものがある．物理的な興味と天文学的な興味の，大きくいって2つの方向があるだろう．

物理的興味 リングレットの配置を決めるものは何か．最終的に何本のリングレットが出来るのか．その間隔は何で決まるのか．個々の粒子の初期位置に敏感なのか，それとも配置の統計的パラメータで大体決まるのだろうか．リングレットの間隔や太さは，ほぼ均等になるのだろうか，それともフラクタル構造だろうか．近年自然界の様々な構造の中に，フラクタルが見い出され大きな注目を浴びている．惑星環リングレットもフラクタル構造を持つといわれ，私達のモデルでできるリングレットがどのようになっているかは興味深い．

天文学的興味 より現実の環に近いモデルではどうなるだろうか．私達の研究は非弾性衝突によるリングレット形成を純粋な形で証明するために，最も単純なモデルを用いている．よって，この結果を現実の環にそのまま適用することは出来ない．そのためにはまず，粒子の大きさの分布や形の不規則性などを考慮しなければならない．また，中心の惑星の赤道面が膨らんでいることにより，粒子の軌道の近点が移動したり軌道面が赤道面に近付く効果，あるいは外側の衛星の重力の効果など，考慮しなければならない要因が沢山ある．これらのことを理論的にも，数値実験においても取り込んでいって，モデルを精密にしていく方向．

リングレット形成をより視覚的に明確に見せるために，また統計的性質を調べるために，数値実験における粒子数をさらに増やす必要がある．粒子数1万あれば，粒子配置図上でリングレットがもっとはっきり見えるはずである．

4.8 結論

衝突は，エントロピーを生み出し多体系を乱雑な方向に進化させるのが自然であるように思われる．けれども，非弾性衝突は，多体系をより秩序づけることが出来，そのとき衝突で生み出されるエントロピーは熱放射として外部へ捨てられてしまうのである．

4.9 この章の付録

4.9.1 距離と速度で角運動量と離心率を表すこと

1. 粒子 i の角運動量 $\boldsymbol{L}_i$ は，次のように計算できる．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}_i &= \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{v}_i \\ &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ R & 0 & 0 \\ u_c + u/2 & V + v/2 & w \end{vmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -w/2 \\ V + v/2 \end{pmatrix} R. \end{aligned} \tag{4.79}$$

同様にして j も，

$$\boldsymbol{L}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ w/2 \\ V - v/2 \end{pmatrix} R \tag{4.80}$$

となる．よって i と j の差は

$$\boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{L}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ -w \\ v \end{pmatrix} R \tag{4.81}$$

となる．

2. Laplace-Runge-Lenz ベクトル $\boldsymbol{\epsilon}_i$ は，次のように計算できる．

$$\boldsymbol{\epsilon}_i = \boldsymbol{v}_i \times \boldsymbol{L}_i - \boldsymbol{r}_i / r_i$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_c + u/2 & V + v/2 & w/2 \\ 0 & -wR/2 & (V + v/2)R \end{vmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} (V + v)VR - 1 \\ -(u_c + u/2)VR \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{4.82}$$

同様にして j も，

$$\epsilon_j = \begin{pmatrix} (V - v)VR - 1 \\ -(u_c - u/2)VR \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.83}$$

となる．よって i と j の差は

$$\epsilon_i - \epsilon_j = \begin{pmatrix} 2v \\ -u \\ 0 \end{pmatrix} VR \tag{4.84}$$

となる．

4.9.2 二つの軌道の自乗平均距離

式 4.45 の座標の選び方より，粒子の軌道は次のように表される．

$$\boldsymbol{r}(\theta) = \frac{L^2}{1 - \epsilon \cos(\theta - \omega)} \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ i \sin\theta \end{pmatrix}. \tag{4.85}$$

ここで，θ は真近点角，ω は近日点引数である．$h \equiv L - 1 \ll 1$ 及び $\epsilon \ll 1$ を用いて，1次の近似をとると

$$\boldsymbol{r}(\theta) = (1 - 2h + \epsilon \cos(\theta - \omega)) \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ i \sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.86}$$

となる．

軌道 1, 2 の間の距離の自乗平均は，

$$D_{12}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \min_{\phi} [\boldsymbol{r}_1(\theta) - \boldsymbol{r}_2(\phi)]^2 d\theta \tag{4.87}$$

と表される．関数 $\min_\phi$ は，それぞれの θ について $[\boldsymbol{r}_1(\theta) - \boldsymbol{r}_2(\phi)]^2$ を最小にするように，粒子 2 の真近点角 ϕ を選ぶことを意味する．ここで，

$$-2h + \epsilon \cos(\theta - \omega) = -2h + \epsilon_x \cos\theta + \epsilon_y \sin\theta \equiv \delta(\theta) \tag{4.88}$$

を導入すれば,

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{r}_1(\theta)-\boldsymbol{r}_2(\phi)]^2 &= [(\cos\theta-\cos\phi)+(\delta_1(\theta)\cos\theta-\delta_2(\phi)\cos\phi)]^2 \\ &+ [(\sin\theta-\sin\phi)+(\delta_1(\theta)\sin\theta-\delta_2(\phi)\sin\phi)]^2 \\ &+ [i_1\delta_1\sin\theta-i_2\delta_2\sin\phi]^2 \qquad (4.89)\end{aligned}$$

と書き換えられる．まず，θとϕの関係は0次近似で

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{r}_1(\theta)-\boldsymbol{r}_2(\phi)]^2 &= (\cos\theta-\cos\phi)^2+(\sin\theta-\sin\phi)^2+o(i,\epsilon,h) \\ &= 2-2\cos(\theta-\phi)+o(i,\epsilon,h) \qquad (4.90)\end{aligned}$$

となるが，式4.90は$\theta=\phi$で最小になる．それゆえ，$\Delta h=h_1-h_2$などを使って，

$$\begin{aligned}&\min_{\phi}[\boldsymbol{r}_1(\theta)-\boldsymbol{r}_2(\phi)]^2 \approx [\boldsymbol{r}_1(\theta)-\boldsymbol{r}_2(\theta)]^2 \\ &= [\delta_1(\theta)-\delta_2(\theta)]^2\cos^2\theta+[\delta_1(\theta)-\delta_2(\theta)]^2\sin^2\theta \\ &+ [i_1\delta_1(\theta)-i_2\delta_2(\theta)]^2\sin^2\theta \\ &= [-2h_1+2h_2+(\epsilon_{x1}-\epsilon_{x2})\cos\theta-(\epsilon_{y1}-\epsilon_{y2})\sin\theta]^2+(i_1-i_2)^2\sin^2\theta \\ &= (-2\Delta h+\Delta\epsilon_x\cos\theta+\Delta\epsilon_y\sin\theta)^2+\Delta i\sin^2\theta \qquad (4.91)\end{aligned}$$

となる．以上のことから，

$$\begin{aligned}D_{12}^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}[(-2\Delta h+\Delta\epsilon_x\cos\theta+\Delta\epsilon_y\sin\theta)^2+\Delta i\sin^2\theta]d\theta \\ &= 4\Delta h^2+\frac{\Delta\epsilon_x^2+\Delta\epsilon_y^2}{2}+\frac{\Delta i^2}{2} \qquad (4.92)\end{aligned}$$

となる．ここで，式4.80，4.83, 4.84を用いて，

$$\begin{aligned}L_i &= \sqrt{(V\pm v/2)^2+(w/2)^2} \\ &\approx V\pm v/2, \\ \Delta\epsilon_x &\approx 2v, \\ \Delta\epsilon_y &\approx u, \\ i_i &= \tan^{-1}\frac{L_{iy}}{L_{iz}}\approx\pm w/2 \qquad (4.93)\end{aligned}$$

と計算できるから，$\Delta h,\Delta\epsilon_x,\Delta\epsilon_y,\Delta i$ は

$$\begin{aligned}\Delta h &\approx v, \\ \Delta\epsilon_x^2+\Delta\epsilon_y^2 &\approx 4v^2+u^2, \\ \Delta i &\approx w \qquad (4.94)\end{aligned}$$

と分かる．最後にこれらを式4.90に代入して，

$$D_{12}^2 = (u^2 + 12v^2 + w^2)/2 \tag{4.95}$$

が得られる．

4.9.3 衝突で二つの軌道が近付く条件

この節では，n_2やt_2によらず式4.58が正になるためのe_n, e_tの条件を求める．一般にn_2, t_2は

$$n_2 = -\cos\phi, \;\; t_2 = \sin\phi \tag{4.96}$$

とかける．これを式4.58に代入すると，

$$f = (1-e_n^2)(1-e_t^2)(4+\beta) - \frac{(3+\beta)^2}{4}(e_n - e_t)^2 \sin^2 2\phi \tag{4.97}$$

となる．これが正定になるには最小値が正であれば良い．fは$\sin 2\phi = 1$のとき最小値をとる．よって，もとめる条件は一つにまとめられる．次の式が成り立つとき，D_{ij}^2はどのような衝突でも減少する．

$$(1-e_n^2)(1-e_t^2) - \frac{(3+\beta)^2}{4(4+\beta)}(e_n - e_t)^2 > 0. \tag{4.98}$$

4.9.4 ΔD_{ij}^2の統計

一つの粒子に注目してそれを固定して考えたとき，他の粒子はある決まった方向から均一な流束で飛んでくるものとする．第4.4.2節の議論から，二つの軌道の距離は簡単に

$$D_{ij}^2 = u^2 + 4v^2 + w^2 \tag{4.99}$$

とかける．衝突によって相対速度がu, w方向からv方向に移る場合この距離は増大する可能性がある．そこで，w方向の相対速度が支配的であるような2つの粒子を考え，正面衝突や，かするような衝突の場合を平均した$\langle D_{ij}^2 \rangle$が減少するような条件を求めよう．

粒子iが$(R, 0, 0)$にあるとする．粒子jがz方向からiに衝突するとき，式4.80，4.81における接線方向と法線方向の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{4.100}$$

$$\boldsymbol{t} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi \\ -\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.101}$$

とかける．ここでθ, ϕは接触する点の極座標である．点$(R+x, y, \sqrt{d^2-x^2-y^2})$と$(R+x+\delta x, y+\delta y, \sqrt{d^2-(x+\delta x)^2-(y+\delta y)^2})$の間の領域に衝突する確率は，

$$\delta p \propto \delta x \delta y \propto \sin\theta \cos\theta \, \delta\phi \, \delta\theta \tag{4.102}$$

であることから，次の式が得られる．

$$\langle \Delta D_{ij}^2 \rangle \equiv \frac{\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \Delta D_{ij}^2 \sin\theta \cos\theta}{\int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \, \sin\theta \cos\theta}. \tag{4.103}$$

w成分が支配的である場合を考えているので，$\boldsymbol{v} = (0, 0, w)$とおいて，

$$\begin{aligned} \Delta D_{ij}^2 &= (EME-M)_{33} w^2 \\ &= (e_n^2 n_3^2 \sum m_j n_j^2 + 2 e_n e_t n_3 t_3 \sum m_j n_j t_j + e_t^2 t_3^2 \sum m_j t_j^2 - 1) w^2 \end{aligned} \tag{4.104}$$

ここで$(EME-M)_{33}$は行列の$(3,3)$成分を表す．式4.55，4.57より，ΔD_{ij}^2に関して次の式が得られる．

$$\Delta D_{ij}^2 = [e_n^2 n_3^2 (1+3n_2^2) + 2 e_n e_t n_3 t_3 (3 n_2 t_2) + e_t^2 t_3^2 (1+3t_2^2) - 1] w^2. \tag{4.105}$$

式4.105を式4.103に代入すると，D_{ij}^2の変化の平均は

$$\langle \Delta D_{ij}^2 \rangle = \frac{w^2}{4}(3e_n^2 - 2 e_n e_t + 3 e_t^2 - 4) \tag{4.106}$$

と求まる．u成分が支配的な場合も同様である．この式は$e_n < 1/3$のときe_tに関わらず負になる．

第 5 章

終りに

5.1 今後の課題

以上非弾性多体系がクラスターを作ることと，それを実証するためのシミュレーション手法について述べてきた．今後に残された課題には次のようなものがある．

二、三次元空間のクラスターについて

1. より単純なシミュレーション結果を得られるような初期条件やモデルをさがす．
2. より規模の大きいシミュレーションを行なって，実験式の精度を高める．
3. 単純な場合について理論的な考察を行ない，それを取り掛かりにして一般の場合に拡張する．

リングレットの形成について

1. より現実の環に近付くようモデルを精密化する．粒子を増やしたり，中心天体の形状効果や相互重力を入れるためには，アルゴリズムの工夫はもとより、並列計算機を利用するなどより高い計算能力が不可欠である。
2. 現在のモデルでできる環の構造をフラクタルなどの観点から考察する．
3. モンテカルロシミュレーションの意味について再検討する．

MD 手法について

1. より大規模なシミュレーションを行なうため並列計算機に適用できるようにする．
2. Rapaport の方法に合わせて，アルゴリズムを変更しなければならなかったことは，もっと良いデータ構造があり得るのではないかということを暗示する．

一次元空間のクラスタについて

質量スペクトルは付録2に示すように説明されたが，この理論は，クラスターの場所の分布を含まない．そのため中心部に大きいクラスターが，周辺部に小さいクラスターが現れる傾向はまだ説明できない．

上に挙げたのは，本論文の内容の直接の精密化であるが，自由空間や重力場中とは違う系，例えば相互重力系やバネで結ばれた系，あるいは反発力を持つ粒子などを考えることもできるだろう．

5.2　謝辞

本論文をまとめるにあたり，沢山の方の御指導，御助言，御助力を頂きました．ここにその方々の名前を上げて，感謝の気持ちを表します．

まず指導教授である慶應義塾大学理工学部の安西祐一郎教授に感謝します．有益な御助言の他論文審査の労をとって頂いた，同山本喜一助教授および国立天文台の木下宙教授に感謝します．木下教授にはリングレット関係の研究において多大な御協力を得，志田に不足している天文学の常識なども補って頂きました．修士課程の時の指導教授であり暖かく見守って下さった電気通信大学の故池野信一教授，いつも志田を過大に評価して下さる慶應義塾大学理工学部所真理雄教授，ありがとうございました．

クラスター形成に関しては，興味を持って下さった久保亮五先生，数学的証明をして下さった慶應義塾大学理工学部渋谷政昭教授の他，同辻一彦助教授，高野宏専任講師にお世話になりました．イベント表縮小アルゴリズムに関しては，慶應義塾大学理工学部天野英晴専任講師，Dr. John Gennari 客員助教授（現 Univ. of Wisconsin），現東京工科大学の工藤智博博士，安西・天野研究室の博士課程山本吉伸氏に相談にのって頂きました．リングレット関係では，宇宙科学研究所の清水幹夫教授，東京大学の杉本大一郎教授，Univ. of Carifornia at Davis の Dr. William G. Hoover，慶應義塾大学理工学部の若林信義教授に御指導頂きました．当時国立天文台，現木更津高専関口昌由さんには天文関係の文献検索に御協力頂きました．また，川合敏雄研究室の修士課程鈴木清弘君にも御協力頂きました．

志田の何よりの誇りはこれほどまでに先生方に恵まれていることです．

その他，慶應義塾大学理工学部の安西・天野研究室のみなさん，朴泰佑助手をはじめとする川合敏雄研究室の皆さんにはお世話になりました．ありがとうございました．

参考文献

[1] Berni J. Alder and T. E. Wainwright. Studies in molecular dynamics. I. General method. *The Journal of Chemical Physics*, 11:459–466, August 1959.

[2] Suguru Araki. The dynamics of particle disks— II. Effects of spin degrees of freedom. *Icarus*, 76:182–198, 1988.

[3] D. E. Barton and C. L. Mallows. The randomization bases of the problem of the amalgamation of weighted means. *J. R. Statist. Soc. B*, 23:423–433, 1961.

[4] André Brahic. Systems of colliding bodies in a gravitational field: I—Numerical simulation of the standard model. *Astronomy and Astrophysics*, 54:895–907, 1977.

[5] André Brahic. Systems of colliding bodies in a gravitational field: II. Effect of transversal viscosity. *Astronomy and Astrophysics*, 59:1–7, 1977.

[6] André Brahic and Bruno Sicardy. Apparent thickness of Saturn's rings. *Nature*, 289:447–450, February 1981.

[7] Frank G. Bridges, Artie P. Hatzes, and D. N. C. Lin. Structure, stability and evolution of Saturn's rings. *Nature*, 309:333–335, May 1984.

[8] James L. Elliot, Edward Dunham, and Robert L.Millis. Discovering the rings of Uranus. *Sky and Telescope*, 53:412–416, 1977.

[9] Peter Goldreich and Scott Tremaine. Towards a theory for the Uranian rings. *Nature*, 277:97–99, January 1979.

[10] R. L. Graham, D. E Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

[11] Richard Greenberg and André Brahic, editors. *Planetary Rings*. University of Arizona Press, Tucson, Arizona, 1984.

[12] Artie P. Hatzes, Frank G. Bridges, and D. N. C. Lin. Collisional properties of ice spheres at low impact velocities. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society of London*, 231:1091–1115, 1988.

[13] Toshio Kawai and Koichiro Shida. An inelastic collision model for the evolution of "planetary rings". *Journal of the Physical Society of Japan*, 59:381–388, January 1990.

[14] Ryogo Kubo. An analytic method in statistical mechanics. *Busseiron Kenkyu*, 1:1–13, 1943.

[15] D. N. C. Lin and P. Bodenheimer. On the stability of Saturn's rings. *The Astrophysical Journal*, 248:L83–L86, September 1981.

[16] Tobias G. Owen, Edward Danielson Allan F. Cook, Candice Hansen, Virginia L. Hall, and Thomas Duxbury. Jupiter's ring. *Nature*, 281:442–446, 1979.

[17] H. Salo. Numerical simulations of collisions between rotating particles. *Icarus*, 70:37–51, 1987.

[18] Koichiro Shida and Yuichiro Anzai. Reduction of the event list for molecular dynamic simulation. *Computer Physics Communication*, To be published, 1991.

[19] Koichiro Shida and Toshio Kawai. Cluster formation by inelastic collision in one-dimensional space. *Physica A*, 159:145–160, 1989.

[20] Koichiro Shida, Kiyohiro Suziki, and Toshio Kawai. Formation of sharp ringlets by inelastic collision. *Journal of Physical Society of Japan*, 60:3953–3966, November 1991.

[21] Masaaki Sibuya, Toshio Kawai, and Koichiro Shida. Equipartition of particles forming clusters by inelastic collisions. *Physica A*, 167:676–689, 1990.

[22] Bradford A. Smith et al. Encounter with Saturn: Voyager 1 imaging science results. *Science*, 212:163–191, 1981.

[23] Bradford A. Smith et al. A new look at the Saturn system: the Voyager 2 images. *Science*, 215:504–537, 1982.

[24] Bradford A. Smith et al. Voyager 2 at Nepture: Imaging science results. *Science*, 246:1422–1449, December 1989.

[25] Dominique Spaute and Richard Greenberg. Collision mechanics and the structure of planetary ring edges. *Icarus*, 70:289–302, 1987.

[26] Jan Trulsen. Numerical simulation of jetstreams— I: The three-dimensional case. *Astrophyscs and Space Science*, 17:241–262, 1972.

[27] Jan Trulsen. Numerical simulation of jetstreams— II: The two-dimensional case. *Astrophyscs and Space Science*, 18:3–20, 1972.

[28] W. R. Ward. On the radial structure of Saturn's rings. *Geophysical Research Letters*, 8:641–643, 1981.

[29] G. K. Zipf. *Human Behavior and the Principle of Least Effort*. 1949.