

## 厳密対角化法による量子スピン系の研究

神戸大理 利根川 孝

## §1. はじめに

最近の電子計算機の急速な発達に伴って、厳密対角化法を用いた低次元多体量子系、特にその基底状態の研究が数多くなされている。この方法は、多体量子系を計算機を用いて研究する為のもう1つの有力な方法であるモンテカルロ法と比較して、取り扱える系の大きさが厳しく制限されるが、正確な結果が得られるという利点を持っている。量子系を取り扱うとき、その対象は、フェルミ粒子系、量子スピン系、およびボーズ粒子系の3つに大別できる。本稿では、我々が数年前から厳密対角化法を用いて調べてきた、競合する相互作用を持つ1次元量子スピン系(スピンの大きさ  $S$  は  $1/2$  の場合と  $1$  の場合とを考慮)の基底状態について、紙面の許す範囲で解説する。この系は、相互作用の競合のために生じるフラストレーションに対する量子効果を調べるという意味で、興味ある研究対象である。

§2.  $S=1/2$  の場合

異方的な交換相互作用を考慮して、系を記述するハミルトニアンを次のように書く：

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & 2J_1 \sum_{l=1}^N \left\{ \gamma (S_l^x S_{l+1}^x + S_l^y S_{l+1}^y) + \delta S_l^z S_{l+1}^z \right\} \\ & + 2J_2 \sum_{l=1}^N \left\{ \gamma (S_l^x S_{l+2}^x + S_l^y S_{l+2}^y) + \delta S_l^z S_{l+2}^z \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $S_l^\alpha$  ( $\alpha = x, y, z$ ) は  $l$  番目の格子点を占める、大きさが  $1/2$  のスピン演算子  $\vec{S}_l$  の  $\alpha$  成分； $J_1$  は反強磁性的 ( $J_1 > 0$ ) あるいは強磁性的 ( $J_1 < 0$ ) な最近接相互作用定数で、 $J_2$  は反強磁性的 ( $J_2 \geq 0$ ) な第2近接相互作用定数； $\gamma, \delta$  は相互作用の異方性を記述するパラメーター； $N$  は系全体のスピン数である。境界条件としては、周期的境界条件 ( $\vec{S}_{l+N} = \vec{S}_l$ ) を仮定する。また、相互作用の異方性に関しては、等方的 ( $\gamma = \delta = 1$ ) な場合、XY型の異方性 ( $\gamma = 1, 0 \leq \delta < 1$ ) の場合、およびIsing型の異方性 ( $0 \leq \gamma < 1, \delta = 1$ ) の場合を考える。さらに、 $N$  は偶数であるとし、以下で、 $J_1$  の絶対値に対する  $J_2$  の比を  $j$  とおく ( $j = J_2/|J_1|$ )。

与えられた  $N$  の値に対して、(1)式で与えられるハミルトニアン  $\mathcal{H}$  に相当する行列の大きさは  $2^N \times 2^N$  である。全スピンの  $z$  成分  $S_{\text{tot}}^z = \sum_{l=1}^N S_l^z$  が  $\mathcal{H}$  と交換することを用

いと、この行列は、 $S_{tot}^z$  の  $N+1$  個の固有値  $M$  ( $M=0, \pm 1, \dots, \pm N/2$ ) に対応して、大きさが  $N C_{(N/2)+M} \times N C_{(N/2)+M}$  の  $N+1$  個の行列に分解できる。これらの  $N+1$  個の行列の最低固有値  $E_0(N, M)$  とそれらに対応する固有関数とを求めれば、有限系の基底状態における種々の物理量を厳密に計算することができる。スピン数  $N$  が 20 までの有限系で得られた結果を外挿することにより、無限系 ( $N \rightarrow \infty$ ) の基底状態の性質を調べる。以下では、 $J_1 > 0$  および  $J_1 < 0$  の両方の場合について、このような方法で求められる  $j$  対  $\gamma$  平面上または  $j$  対  $\delta$  平面上での無限系の基底状態の相図を議論する。

## 2.1 $J_1 > 0$ での基底状態の相図

$J_1 > 0$  での無限系の基底状態に関して、いくつかの特別な場合について以前から次のようなことが分かっている。

- (i)  $j=0$  で、 $\gamma=\delta=1$  あるいは  $\gamma=1, 0 \leq \delta < 1$  であれば、基底状態は励起状態との間にエネルギーギャップを持たない spin-fluid 相にある。<sup>1)</sup>
- (ii)  $j=0$  で、 $0 \leq \gamma < 1, \delta=1$  であれば、基底状態は励起状態との間にエネルギーギャップを持つ Néel 相にある。
- (iii)  $j=1/2$  であれば、 $\gamma$  および  $\delta$  の値に依らずに、基底状態は励起状態との間にエネルギーギャップを持つ dimer 相<sup>1)</sup>にある。<sup>2,3)</sup>
- (iv)  $\gamma=0, \delta=1$  (完全な Ising 極限) のときには、基底状態は、 $0 \leq j < 1/2$  であれば、Néel 相にあり、 $j > 1/2$  であれば、励起状態との間にエネルギーギャップを持つ (2,2) antiphase 相にある。

さて、我々の数値計算の結果によれば、<sup>4-6)</sup>  $J_1 > 0$  の場合、 $N$  や  $j, \gamma, \delta$  の値に依らずに、 $E_0(N, 0) < E_0(N, M)$  ( $M = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N/2$ ) が成り立つ。すなわち、基底状態を特徴づける  $M$  の値  $M_g(N)$  は、常に 0 に等しい。従って、 $N \rightarrow \infty$  を含むすべての  $N$  の値に対して、基底状態のエネルギー  $E_g(N)$  は  $E_g(N) = E_0(N, 0)$  で与えられると考えられる。(spin-fluid 相, dimer 相, Néel 相, (2,2) antiphase 相に対しても  $M_g(\infty)$  の値は勿論 0 である。) 上で述べた (i)-(iii) から、 $\gamma$  および  $\delta$  を与えて  $j$  を変化させるとき、 $\gamma=1, 0 \leq \delta \leq 1$  では spin-fluid 相から dimer 相への、また  $0 \leq \gamma < 1, \delta=1$  では Néel 相から dimer 相への相転移が起こることが予想される。<sup>1,7)</sup> これらの相転移に関する相図を得るために、次の式

$$\Delta(N) = E_0(N, 1) - E_g(N) \quad (2)$$

で定義される 1 重項-3 重項エネルギーギャップ  $\Delta(N)$  の  $j$  依存性を  $N=6, 8, \dots, 20$  に対して計算し、現象論的繰り込み群の方法<sup>8-10)</sup>を用いて、相転移を与える  $j$  の値  $j_c$  を評価した。<sup>11)</sup> 種々の  $\gamma, \delta$  の値に対する  $j_c$  の結果をまとめて得られる相図を図 1 に示す。例

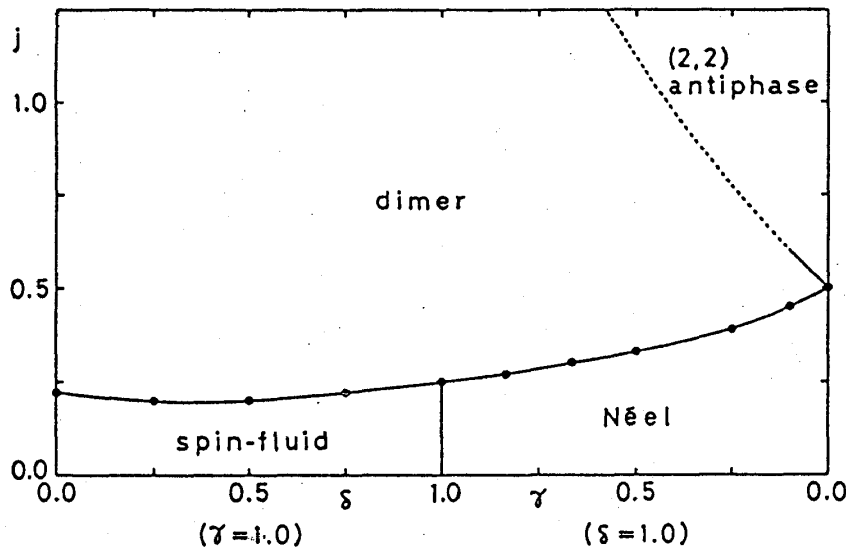


図1  $J_1 > 0$  の場合の無限系の基底状態の相図. 実線は計算で求めた相境界線, 点線は予想される相境界線を示す.

例えば,  $\gamma = \delta = 1.0$  での  $j_c$  の値は,  $j_c = 0.25 \pm 0.01$  であり, これは我々が以前に別の方法で評価した値  $j_c = 0.30 \pm 0.01^{4)}$  よりやや小さく, 最近 Okamoto-Ueno<sup>12)</sup> が界面の方法を適用して求めた値  $j_c \sim 0.26$  に非常に近い. また,  $\gamma = 1.0, \delta = 0.0$  では  $j_c = 0.22 \pm 0.01$  であり, これは我々の以前の値  $j_c = 0.35 \pm 0.01^{5)}$  よりかなり小さい.

上述の (iv) から,  $0 < \gamma < 1, \delta = 1$  の場合には,  $j$  の値をさらに増すと, dimer 相から (2,2) antiphase 相への相転移が起こることが予想される. 実際,  $0 < \gamma \ll 1$  では, この相転移を与える  $j$  の値  $j'_c$  を,  $\gamma$  の 1 次の範囲で正確に  $j'_c = (1 + 2\gamma)/2$  と求めることができ,<sup>13)</sup> この結果も図1に示してある.  $j_c$  の値を得たときと同様な方法を用いて, 一般の  $\gamma$  での  $j'_c$  の値を十分な精度で求めるには, より大きい  $N$  に対する  $\Delta(N)$  の値を計算する必要があり, この点は今後の研究課題の1つである.

## 2.2 $J_1 < 0$ での基底状態の相図

$J_1 < 0$  での無限系の基底状態に関しても, 以前から次のようなことが分かっている.

(v)  $j = 0$  かつ  $\gamma = 1, 0 \leq \delta < 1$  であれば, 基底状態は spin-fluid 相にある.

(vi)  $j = 0$  かつ  $0 \leq \gamma < 1, \delta = 1$  であれば, 基底状態は励起状態との間にエネルギーギャップを持つ強磁性相にある.

(vii)  $\gamma = 0, \delta = 1$  (完全な Ising 極限) のときには, 基底状態は,  $0 \leq j < 1/2$  であれば, 強磁性相にあり,  $j > 1/2$  であれば, (2,2) antiphase 相にある.

さらに, 我々の厳密対角化法の結果によれば,

(viii)  $\gamma = 1, \delta = 0$  (完全な XY 極限) のときには,  $j_c = 0.22 \pm 0.01$  として, 基底状態は,  $0 \leq j < j_c$  であれば, spin-fluid 相にあり,  $j > j_c$  であれば, dimer 相にある. 完全な XY

極限におけるこの結果は、ハミルトニアンが変換  $S_i^x \rightarrow (-1)^i S_i^x$ ,  $S_i^y \rightarrow (-1)^i S_i^y$  に対して不変であることと、上述の  $J_1 > 0$  の場合の結果とから得られる。

(ix)  $\gamma = \delta = 1$  (等方的な相互作用) のときには、基底状態は、 $0 \leq j < 1/4$  であれば、励起状態との間にエネルギーギャップを持たない強磁性相にあり、 $j > 1/4$  であれば、磁化を持たない相にある。<sup>14)</sup>

まず、 $\gamma = 1, 0 \leq \delta < 1$  の場合の基底状態の相図を議論しよう。この場合にも、基底状態を特徴づける  $M$  の値  $M_g(N)$  は、 $N, j, \delta$  の値に依らずに 0 である。<sup>15)</sup> このことと上述の (v), (viii) とより、 $\gamma = 1, 0 \leq \delta < 1$  の場合にも、 $j$  の増加とともに、spin-fluid 相から dimer 相への相転移が起こることが期待される。 $J_1 > 0$  の場合と同様にして、いくつかの  $\delta$  に対して、 $\Delta(6), \Delta(8), \dots, \Delta(20)$  の  $j$  依存性を計算し、現象論的繰り込み群の方法<sup>8-10)</sup> を用いて  $j_c$  の値を評価した。<sup>16)</sup> これらの結果をまとめて得られる相図を図 2(a) に示す。

次に、 $0 \leq \gamma < 1, \delta = 1$  の場合には、 $M_g(N)$  の値は  $N$  は勿論  $j$  や  $\gamma$  によって変化する。<sup>15)</sup> 従って、基底状態のスピン当りの磁化  $m_g(N)$  を  $m_g(N) = 2M_g(N)/N$  で定義すれば、その値も  $N, j, \gamma$  によって変化する。上の (vii) で述べたように、 $\gamma = 0, \delta = 1$  のときには、無限系の基底状態は、 $0 \leq j < 1/2$  ならば  $m_g(\infty)$  がその最大値 1 をとる強磁性相にあり、 $j > 1/2$  ならば  $m_g(\infty) = 0$  の (2,2) antiphase 相にある。一方、 $0 < \gamma \lesssim 0.7$  を満たす  $\gamma$  に対する計算結果によると、有限系 ( $N = 8, 12, 16, 20$ ) の基底状態の磁化  $m_g(N)$  の値は、 $j$  が増すとともに、1 から 0 まで、ステップ状に  $4/N$  きざみで減少する。このことは、 $j$  対  $\gamma$  平面上の無限系の基底状態の相図において、強磁性相と (2,2) antiphase 相との間

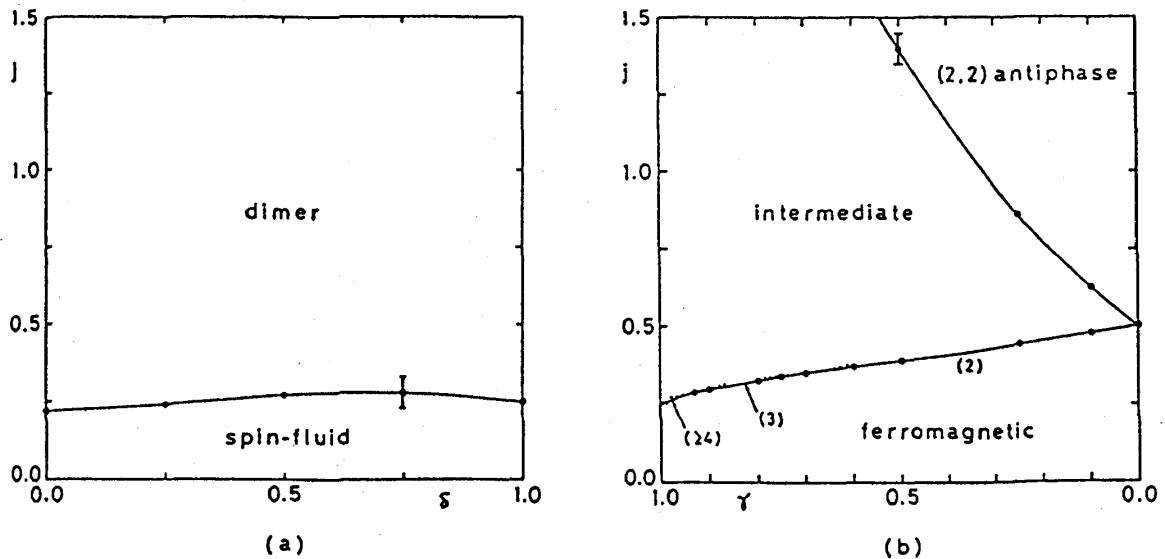


図 2  $J_1 < 0$  のときの無限系の基底状態の相図. (a) 相互作用の異方性が XY 型の場合 ( $\gamma = 1, 0 \leq \delta < 1$ ), (b) 相互作用の異方性が Ising 型の場合 ( $0 \leq \gamma < 1, \delta = 1$ ).

に飽和していない有限の磁化 ( $0 < m_g(\infty) < 1$ ) をもつ中間相が現れることを意味している。ここで、強磁性相と中間相とに関連した小さい方の  $j$  の臨界値を  $j_{c1}$  で、また、中間相と (2,2) antiphase 相とに関連した大きい方の  $j$  の臨界値を  $j_{c2}$  で表す。有限系における最初の磁化のステップを与える  $j$  の値がほとんど  $N$  に依らないことから、 $j_{c1}$  の値は容易に求められ、結果は例えば  $\gamma=0.25$  に対して  $j_{c1}=0.440 \pm 0.001$  となる。<sup>15)</sup> 一方、 $j_{c2}$  の値は次のようにして決められる。最初に、種々の  $j$  の値に対して

$$\Delta'(N) = E_0(N, 2) - E_0(N, 0) \quad (3)$$

で定義される  $\Delta'(N)$  ( $N=8, 12, 16, 20$ ) を計算する。次に、各々の  $j$  に対して、 $\Delta'(N)$  が  $1/N$  についての 2 次式で表されると仮定して  $N \rightarrow \infty$  への外挿を行い、 $\Delta'(\infty)$  の値を評価する。最後に、 $\Delta'(\infty)=0$  となる  $j$  の値を求めると、それが  $j_{c2}$  を与える。このようにして決められた  $j_{c2}$  の値は、例えば  $\gamma=0.25$  に対して  $j_{c2}=0.855 \pm 0.010$  である。<sup>15)</sup>  $\gamma \gtrsim 0.7$  を満たす  $\gamma$  に対しては、 $m_g(N)$  の  $j$  依存性は  $0 < \gamma \lesssim 0.7$  の場合と比較してやや複雑になるが、少なくとも無限系の基底状態における強磁性相から中間相への相転移については、本質的な違いはなく、この場合も  $j_{c1}$  の値を容易に求めることができる。<sup>15)</sup>

以上のようにして求められた種々の  $\gamma$  に対する  $j_{c1}$  および  $j_{c2}$  の値を用いると、 $0 \leq \gamma < 1$ ,  $\delta=1$  の場合の基底状態の相図が図 2(b) のように得られる。この図で、強磁性相と中間相との間の相境界線 (2), (3), ( $\geq 4$ ) は、それぞれ、強磁性相の不安定性が 2-マグノン状態, 3-マグノン状態,  $n(\geq 4)$ -マグノン状態に対して起こっていることを示している。<sup>15)</sup> 詳細は省略するが、文献 15) では、 $j_{c1} < j < j_{c2}$  における  $m_g(\infty)$  の  $j$  依存性などについての議論も行われている。中間相に対しては、解析的な研究<sup>17,18)</sup> もなされており、それらの結果とも合わせて考えると、少なくとも境界線 (2) の近傍では、中間相は、無限の ( $N$  に比例する) 数の 2-マグノン束縛状態がお互いに斥力的な相互作用をしながら運動している状態で記述される相であると見なすことができる。また、中間相においては、基底状態と励起状態との間にエネルギーギャップが存在しないことなども分かっている。<sup>17)</sup>

### §3. $S=1$ の場合

‘スピンの大きさ  $S$  が整数で、等方的な最近接交換相互作用で記述される 1 次元反強磁性体の基底状態が、励起状態との間に有限な大きさのエネルギーギャップ (Haldane gap と呼ぶ) を持つ新しい相 (Haldane 相) にある’ という Haldane の予言<sup>19,20)</sup> 以来、特に  $S=1$  の場合について、数多くの研究がなされている。(これらの詳細については、田崎<sup>21)</sup> および勝又<sup>22)</sup> による最新の解説などを参照されたい。前者は理論的側面、後者は実験

的側面からの解説である。) 我々は, 1 年程前から,  $S=1$  の場合の Haldane 相に対する反強磁性的な第 2 近接相互作用の影響を, 厳密対角化の方法を用いて調べている.<sup>23,24)</sup> ここでは, その研究の一部を紹介する.

周期的境界条件を仮定して, 系を記述するハミルトニアンを

$$\mathcal{H} = 2J_1 \sum_{l=1}^N \vec{S}_l \cdot \vec{S}_{l+1} + 2J_2 \sum_{l=1}^N \vec{S}_l \cdot \vec{S}_{l+2} \quad (4)$$

と書く. ここで,  $\vec{S}_l$  は  $l$  番目の格子点を占める大きさが 1 のスピン演算子;  $J_1 (> 0)$  および  $J_2 (\geq 0)$  は, それぞれ反強磁性的な最近接および第 2 近接相互作用定数;  $N$  (偶数) は系全体のスピン数である. 以下でも,  $j = J_2/J_1$  とおく. 今の場合にも, 勿論,  $\mathcal{H}$  と  $S_{i\alpha}^z$  とは交換し, 数値計算の結果は, 基底状態を特徴づける  $S_{i\alpha}^z$  の固有値  $M$  の値  $M_g(N)$  が  $N, j$  に依らずに 0 に等しいことを示している.

最初に, (2) 式と同様に定義される 1 重項-3 重項エネルギーギャップ  $\Delta(N)$  を議論する. この量は Haldane 相に関連した重要な物理量の 1 つであり, その  $N \rightarrow \infty$  での極限值  $\Delta(\infty)$  が Haldane gap に相当する. 種々の  $j$  の値に対して,  $\Delta(6), \Delta(8), \dots, \Delta(16)$  を計算し, これらを主として Shanks 法<sup>25)</sup> を用いて外挿することにより,  $\Delta(\infty)$  の値を評価した.  $j=0.0$  での結果は  $\Delta(\infty)/J_1 = 0.8220 \pm 0.0005$  であり, これはすでに得られている結果<sup>26,27)</sup> と良く一致している. 一般の  $j$  に対する結果を図 3 に示す. この図では,  $\Delta(\infty)/(J_1+J_2)$  が  $j$  の関数としてプロットしてある. この量は,  $J_1=0$  の場合と  $J_2=0$  の場合とで, 同じ値  $0.8220 \pm 0.0005$  をとるべき量である. (後者の場合, (4) 式のハミルト

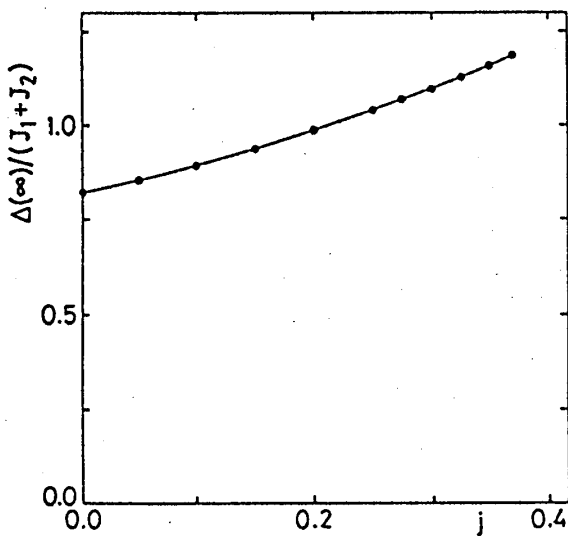


図 3 (左図)  $\Delta(\infty)/(J_1+J_2)$  の  $j$  依存性.

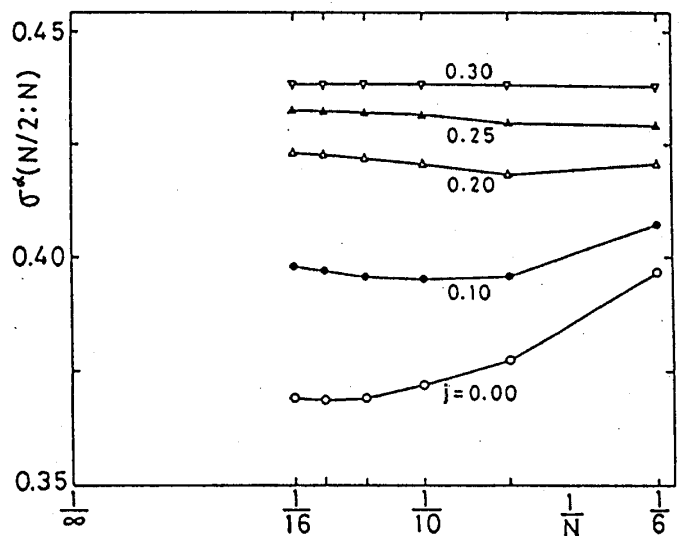


図 4 (右図) いくつかの  $j$  に対する,  $\sigma^\alpha(N/2; N)$  の  $1/N$  依存性.

ニアンは、最近接相互作用定数が  $J_2$  で与えられる、独立な 2 つの 1 次元  $S=1$  反強磁性体から成る系を記述している。) このようにして、図 3 に示されている結果は、 $j$  の増加が  $\Delta(\infty)$  の本質的な増加を導くことを明かにしている。

次に、もう 1 つの重要な量である、den Nijs-Rommelse<sup>28)</sup> によって導入された string order parameter  $O_{\text{string}}^\alpha$  を議論する。我々はこの量を次のように定義する：

$$O_{\text{string}}^\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \sigma^\alpha(N/2; N), \quad (5)$$

$$\sigma^\alpha(\ell; N) = - \left\langle \Phi_g(N) \left| S_1^\alpha \exp \left( i\pi \sum_{n=2}^{\ell} S_n^\alpha \right) S_{1+\ell}^\alpha \right| \Phi_g(N) \right\rangle. \quad (6)$$

ここで、 $\Phi_g(N)$ 、 $\sigma^\alpha(\ell; N)$  は、それぞれ  $N$  スピン系の基底状態の固有関数、string 相関関数である。Kennedy-Tasaki<sup>29,30)</sup> によって議論されているように、 $O_{\text{string}}^\alpha$  が有限であるということは、 $Z_2 \times Z_2$  という隠された対称性の自発的な破れの反映であり、この対称性の破れが有限な大きさの  $\Delta(\infty)$  を導く。図 4 にいくつかの  $j$  の値に対する  $\sigma^\alpha(N/2; N)$  の計算結果を示す。(  $j=0.0$  の場合については、すでに  $N=14$  までの計算がなされている。<sup>31,32)</sup> この図より、 $O_{\text{string}}^\alpha$  が  $j$  の増加とともに増加することが容易に分かる。

上述のような  $\Delta(\infty)$  および  $O_{\text{string}}^\alpha$  の  $j$  依存性に対する結果から、反強磁性的な第 2 近接相互作用の存在、すなわち反強磁性的な最近接相互作用と反強磁性的な第 2 近接相互作用との間の競合が、Haldane 相を安定化するという結論を得ることができる。

我々は、

$$\omega_g^\alpha(\ell; N) = \langle \Phi_g(N) | S_1^\alpha S_{1+\ell}^\alpha | \Phi_g(N) \rangle \quad (7)$$

で定義される Néel 相関関数  $\omega_g^\alpha(\ell; N)$  およびその波数  $q$  空間におけるフーリエ変換

$$S_g^\alpha(q; N) = \sum_{\ell=0}^{N-1} \exp(-iq\ell) \omega_g^\alpha(\ell; N) \quad (8)$$

に対する計算も行った。その結果、 $j$  の値に依らずに、無限系の基底状態は Néel 型の長距離秩序をもたないことや、 $j < \bar{j}$  ( $\sim 0.38$ ) の時には  $\omega_g^\alpha(\ell; \infty)$  が整合的 (commensurate) な振舞いを示し、 $j > \bar{j}$  の時には  $\omega_g^\alpha(\ell; \infty)$  が不整合的 (incommensurate) あるいは高次の整合的 (higher-order-commensurate) な振舞いを示すことなどが明らかになった。

#### §4. おわりに

厳密対角化法を用いた、競合する相互作用を持つ 1 次元量子スピン系の基底状態に関する我々の研究を中心に述べた。  $S=1/2$  の場合については、かなりの研究の蓄積があり、相図ばかりでなく、エネルギー<sup>4,5,14,15)</sup> 1 重項-3 重項エネルギーギャップ<sup>4,13,15)</sup>

静的スピン相関関数,<sup>4,5,14,15)</sup> dimer long-range order parameter,<sup>4)</sup> 磁化曲線,<sup>4,6)</sup> 動的スピン相関関数<sup>13,17,33)</sup> などもかなり詳しく調べられている。

一方,  $S=1$  の場合については, 相互作用の競合に関する研究は始まったばかりである。現在, (4) 式 of the ハミルトニアンに Zeeman 項  $-H^z \sum_{i=1}^N S_i^z$  が加わった場合の基底状態を調べている ( $J_2=0$  に対してはすでにいくつかの研究があり, Luttinger 液体の描像がよく成り立つことが分かっている。<sup>34-36)</sup>). 今後, (4) 式において, 一方または両方の相互作用を異方的にした場合や, それに  $D \sum_{i=1}^N (S_i^z)^2$ ,  $K \sum_{i=1}^N (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1})^2$  などの項を加えた場合, 更に相互作用定数が相互作用ボンドの位置によって交互に異なった値をとる場合, などの基底状態を順次調べる予定である。これらの場合において,  $J_2=0$  ととると, Haldane 相の他に, Néel 相, large- $D$  相, XY 相, 強磁性相, dimer 相, trimer 相などが基底状態の相図に現れることが分かっている。<sup>37)</sup> これらに対する反強磁性的な第 2 近接相互作用の影響に興味を持って研究を進める。

本稿で述べた  $S=1/2$  の場合の研究は, 原田勲氏(岡山大理), 五十嵐潤一氏(阪大理)と共同で, また  $S=1$  の場合の研究は, 鍋木誠氏(神戸大教養), 原田勲氏, 市川直子氏(神戸大理)と共同で行ったものである。大行列の対角化のために, 前者の研究では, 滝本淳一氏(分子研)よりご提供いただいた coordinate relaxation 法によるプログラム, および西森秀稔氏(東工大理), 田口善弘氏(東工大理)よりご提供いただいた Lanczös 法によるプログラム (TITPACK Ver. 1)<sup>38)</sup> を利用した。また, 後者の研究では, 西森秀稔氏による Lanczös 法のプログラム (TITPACK Ver. 2)<sup>39)</sup> を参考にし, 西野友年氏(阪大理)の two-dimensional search 法<sup>40)</sup> に対する新しい考え方をを用いて, 鍋木誠氏が作成したプログラム<sup>41)</sup> を利用した。これらの方々に厚くお礼申し上げます。なお, 前者の研究の一部は, 文部省科学研究費補助金(一般研究(C), No. 61540265)により, 後者の研究の一部は, 文部省科学研究費補助金(重点領域研究(1), No. 03247102)により行われた。

## 文 献

- 1) F. D. M. Haldane: Phys. Rev. B **25** (1982) 4925; **26** (1982) 5257 (Erratum).
- 2) C. K. Majumdar: J. Phys. C **3** (1970) 911.
- 3) B. S. Shastry and B. Sutherland: Phys. Rev. Lett. **47** (1981) 964.
- 4) T. Tonegawa and I. Harada: J. Phys. Soc. Jpn. **56** (1987) 2153.
- 5) T. Tonegawa and I. Harada: Proc. Int. Conf. on Magnetism, Paris, 1988, J. Phys. (Paris) Suppl. **49** (1988) C8-1411.
- 6) T. Tonegawa and I. Harada: Proc. 2nd Int. Symp. on High Field Magnetism, Leuven,



- 1988, *Physica B* **155** (1989) 379.
- 7) K. Kuboki and H. Fukuyama: *J. Phys. Soc. Jpn.* **56** (1987) 3126.
  - 8) H. H. Roomany and H. W. Wyld: *Phys. Rev. D* **21** (1980) 3341.
  - 9) R. Botet and R. Jullien: *Phys. Rev. B* **27** (1983) 613.
  - 10) T. Sakai and M. Takahashi: *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** (1990) 2688.
  - 11) T. Tonegawa and I. Harada: 日本物理学会 (1991年春) 講演予稿集第3分冊, p.476.
  - 12) K. Okamoto and Y. Ueno: 日本物理学会 (1991年秋) 講演予稿集第3分冊, p.454.
  - 13) J. Igarashi and T. Tonegawa: *Phys. Rev. B* **40** (1989) 756.
  - 14) T. Tonegawa and I. Harada: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 2902.
  - 15) T. Tonegawa, I. Harada and J. Igarashi: *Prog. Theor. Phys. Suppl. No.101* (1990) 513.
  - 16) T. Tonegawa and I. Harada: 11) の結果と合わせて投稿準備中.
  - 17) J. Igarashi: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 4600.
  - 18) I. Harada and T. Tonegawa: *Proc. Yamada Conf. XXV on Magnetic Phase Transition, Osaka, 1990*, *J. Magn. Magn. Mat.* **90 & 91** (1990) 234.
  - 19) F. D. M. Haldane: *Phys. Lett.* **93A** (1983) 464.
  - 20) F. D. M. Haldane: *Phys. Rev. Lett.* **50** (1983) 1153.
  - 21) 田崎晴明: *固体物理* **27** (1992) 1.
  - 22) 勝又紘一: *固体物理* **27** (1992) 9.
  - 23) T. Tonegawa, M. Kaburagi, N. Ichikawa and I. Harada: *Computational Approaches in Condensed Matter Physics*, Springer Proc. Phys., ed. S. Miyashita, M. Imada and H. Takayama (Springer, Berlin, 1992) に印刷中.
  - 24) T. Tonegawa, M. Kaburagi, N. Ichikawa and I. Harada: *J. Phys. Soc. Jpn.* に投稿予定.
  - 25) D. Shanks: *J. Math. Phys.* **34** (1955) 1.
  - 26) M. P. Nightingale and H. W. J. Blöte: *Phys. Rev. B* **33** (1986) 659.
  - 27) T. Sakai and M. Takahashi: *Phys. Rev. B* **42** (1990) 1090.
  - 28) M. den Nijs and K. Rommelse: *Phys. Rev. B* **40** (1989) 4709.
  - 29) T. Kennedy and H. Tasaki: *Phys. Rev. B* に印刷中.
  - 30) T. Kennedy and H. Tasaki: *Commun. Math. Phys.* に印刷中.
  - 31) S. M. Girvin and D. P. Arovas: *Physica Scripta* **T27** (1989) 156.
  - 32) Y. Hatsugai and M. Kohmoto: *Phys. Rev. B* **44** (1991) 11789.
  - 33) J. Igarashi and T. Tonegawa: *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** (1989) 2147.
  - 34) T. Sakai and M. Takahashi: *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 760.

- 35) T. Sakai and M. Takahashi: *Phys. Rev.* **43** (1991) 13383.
- 36) T. Sakai and M. Takahashi: *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 3615.
- 37) 例えば, 文献 30) の Fig. 1.1, Fig. 1.2 や K. Nomura and S. Takada: *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 389 の Fig. 1 を参照.
- 38) H. Nishimori and Y. Taguchi: *Prog. Theor. Phys. Suppl. No.87* (1986) 247; 田口善弘, 西森秀稔: *物性研究* **45** (1986) 299.
- 39) 西森秀稔: *物性研究* **56** (1991) 494.
- 40) H. Q. Lin: *Phys. Rev. B* **42** (1990) 6561.
- 41) M. Kaburagi, T. Tonegawa and T. Nishino: *Computational Approaches in Condensed Matter Physics*, Springer Proc. Phys., ed. S. Miyashita, M. Imada and H. Takayama (Springer, Berlin, 1992) に印刷中.