非線形振動子多体系

京都大学理学部　蔵本由紀

リミットサイクル振動子は非平衡状態で機能する動的な機能単位である。そのような機能単位が多数集まって集団や場を構成するとき、そこに何が出現するかという問題は、さまざまなレヴェルにおける生体機能とのかかわりでたいへん関心がもたれる［１］が、非線形動力学や統計力学の新しいタイプの問題としても少なからぬ理論的関心を呼んでいる。以下では主として後者の立場から、この問題のユニークさ、過去においてどのような接近法が試みられ、現在どのようなことがわかっているなどかについて素描する。今後この方面に興味を持たれる方々のために、比較的多数の関連文献を末尾に示した。

振動子系集団の相転移として最も基本的なものは集団振動の自発的発生という現象であろう。これはスピン系における自発磁化の発生とのアナロジーが成り立つ。しかしオーダーパラメタが本質的にダイナミカルであり、したがって時間的並進対称性を破るタイプの相転移である点がきわめてユニークである。オーダーパラメターが固定点ではないアトラクターとして現れるようなタイプの相転移は振動子系に限らず、セルオートマトンやカオス結合系においても可能であり［２］、この種の相転移現象は理論的にも実際的にも今後ますます注目されるようになるであろう。

リミットサイクル振動子多体系を一般的に扱うことは全く不可能なので、集団振動の発生は現在までいくつかの特殊なケースについてしか調べられていない。最も詳しく調べられているのは、平均場結合をもつ位相モデル［３］である。個別振動子の位相を ϕ_i、自然振動数を ω_i とすると、ひとつの標準的モデルは

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N}\sum_j \sin(\phi_j - \phi_i) \quad , \tag{1}$$

によって表される［４，５］。結合によって振動子は互いに位相を揃えようとするが、ω_i の分布はそれを妨げようとする。その結果、結合強度がある値 K 以上で集団振動の発生が期待される。ω_i の分布 $g(\omega)$ が対称なひと山分布の場合には $t \to \infty$ における種々の集団的性質が解析的に解かれ、たとえば臨界結合強度 K、オーダーパラメタ曲線、真の振動数 ω の分布などに対する表式が知られている［５］。またオーダーパラメタの緩和に関する性質も最近明かになってきた［６ ～ ８］。また、臨界ゆらぎに関する議論もある［９］が、これについては今ひとつはっきりしない。

モデル（1）には当然次のような変形版や拡張が考えられる。

A. 結合を $\sin(\phi_j - \phi_i + \alpha)$ のように一般化する。$K > 0$ の場合、$|\alpha| < \pi/2$ ならば振動子は互いに位相を揃えようとし、$|\alpha| > \pi/2$ ならば互いに反位相になろうとする。一般の α に対しては解析は相当やっかいになるが、集団の定常的性質については、なおいくつかの事実が厳密に知られている［１０］。$|\alpha| < \pi/2$ ならばもちろん相転移は存在する。

B. 自然振動数を分布させるかわりに系にノイズを加えても相転移が可能と考えられる。白色ガウスノイズの場合には解析的な取扱が可能であり、転移点近傍の振舞いについていくつかの厳密な結果が得られている［５］。

C. （1）に $\cos\phi_i$ を付け加えたモデルを考える。この場合、各振動子の運動は $\dot{\phi}_i = \omega_i + \cos\phi_i$ によってあたえられる。このモデルは振動子が条件 $|\omega_i| < 1$ の下で興奮性素子になるという点が面白い。解析的扱いは困難になるが、ノイズがかかった場合について数値解析がなされている。相転移の特徴として、集団振動の発生に二つのタイプ（サドル・ノード タイプとホップ タイプ）が存在することがあげられる［１１］。両タイプが交代するあたりではきわめて複雑な分岐構造が存在することが理論的に示される［１２］。

D. 相互作用を位相差に関する高調波まで考慮する。この場合には、一種のクラスター化現象が起こることが理論的にわかっている［１３］。モデル（1）の範囲では、振動数分布やノイズ等の乱れがない場合には、集団全体が完全に位相同期する（$|\alpha| < \pi/2$ の場合）かまたは位相が完全に一様分布する（$|\alpha| > \pi/2$）のいずれかであるが、高調波を含む場合には、それぞれが完全に位相同期した複数のクラスターに集団全体がわかれるのである。クラスター化現象は最初平均場結合をもつカオス写像系において見いだされた［１４］が、振動子系でも比較的容易に実現するようである。

モデル（1）の大前提である大域結合性と位相記述という二つの大きな仮定のいずれかを外すとどうなるであろうか。（1）の近接相互作用版に関しては、計算機シミュレーションがある。この場合は系の次元と相転移との関係が問題になるが、シミュレーションは主として２次元格子に対してなされている［１５，１６］。格子点上に位相振動子を配列し、最近接相互作用のみを考える。シミュレーションによれば、集団振動の発生という相転移はその場合存在しないように見える。集団振動が発生するためには長距離の位相のオーダーが必要であるが、２次元ではそれは存在しないようである。しかし、シミュレーションは位相のオーダーとは異なる別のタイプの秩序の可能性（２

次元での存在は不明だが）を示唆している。それは振動数のオーダーである。同一の振動数を獲得した領域はマクロなクラスターを形成しうる、つまり振動数の長距離秩序は存在しうるが、それは必ずしも位相の長距離秩序の存在を意味しないのである。振動数のみの秩序状態は、ＸＹスピン系のＫＴ相にいささか類似している。上記Ｃの一般化をも考慮した格子上の位相振動子についてもシミュレーションがなされている［１７］。近距離相互作用系では相転移のみならず種々のパターンダイナミックスにも興味がある。$\alpha \neq 0$ の位相振動子系に対しては、回転螺旋波や時空カオスがシミュレーションによって見いだされている［１８］。

大域結合性は仮定したまま、振幅効果を考慮したモデルについても研究されている［１９ ～ ２２］。振動数が分布したギンツブルグ・ランダウ型の振動子モデル

$$\frac{dW_i}{dt} = (1 + i\omega_i)W_i - |W_i|^2 W_i + \frac{K}{N}\sum_j (W_j - W_i) \tag{2}$$

の解析によれば、集団振動だけでなく集団的カオス状態も現れるようである。しかし、この点に関する立ち入った解析はまだない。モデル（２）においては、非線形項と結合項の係数はともに実数であるが、これらを複素数とした複素ギンツブルグ・ランダウ型のモデル

$$\frac{dW_i}{dt} = W_i - (1 + ic_2) |W_i|^2 W_i + \frac{K}{N}(1 + ic_1) \sum_j (W_j - W_i) \tag{3}$$

も興味深い。上式のように、振動数分布などの乱雑性がない場合でも多様な集団的挙動、たとえばクラスタリングや集団カオスなどが見られることが最近の研究からわかってきた［２３］。

振動子集団の研究の焦点は単純な集団ダイナミックスから、集団カオスのようにより複雑なダイナミックスに移りつつあるように思われる。また、振動神経回路を意識したモデルの提案［２４，２５］や、位相モデルの視覚情報処理への応用に関する理論［２６ ～ ２８］も現れはじめている。

参考文献

[1] A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time* (Springer, New York, 1980).

[2] H. Chate and P. Manneville, Prog. Theor. Phys. **87** (1992), 1.

[3] A.T. Winfree, J. Theor. Biol. **16** (1967), 15.

[4] Y. Kuramoto, in *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, ed. H. Araki (Springer, New York), Lecture Notes in Physics **39** (1975), 356.

[5] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer, Berlin, 1984); Prog. Theor. Phys. Supple. **79** (1984), 223.

[6] Y. Kuramoto and I. Nishikawa, J. Stat. Phys. **49** (1987), 569.

[7] Y. Kuramoto and I. Nishikawa, in *Cooperative Dynamics in Complex Physical Systems*, ed. H. Takayama (Springer, Berlin, 1989), 300.

[8] S. Strogatz, R. Mirollo and P. Matthews, Phys. Rev. Letters **68** (1992), 2730.

[9] H. Daido. J. Stat. Phys. **60** (1990), 753.

[10] H. Sakaguchi and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **76** (1986), 576.

[11] S. Shinomoto and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **75** (1986), 1105.

[12] H. Sakaguchi, S. Shinomoto and Y. Kuramoto, Porg. Theor. Phys. **79** (1988), 600.

[13] K. Okuda, to appear in Physica D (1992).

[14] K. Kaneko, Physica **D41** (1990), 137; **D54** (1991), 5.

[15] H. Sakaguchi, S. Shinomoto and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **77** (1987), 1005.

[16] T. Aoyagi and Y. Kuramoto, Phys. Letters **55** (1991), 410.

[17] S. Shinomoto and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **75** (1986), 1319.

[18] H. Sakaguchi, S. Shinomoto and Y. Kuramoto, Prog. Theor. Phys. **79** (1988), 1069.

[19] Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. **56** (1976), 703.

[20] Y. Yamaguchi, K. Kometani and H. Shimizu, J. Stat. Phys. **26** (1981), 719.

[21] M. Shiino and M. Frankowicz, Phys. Letters **A136** (1989), 103.

[22] P. Matthews, R. Mirollo and S. Strogatz, Physica **D52** (1991), 293.

[23] 中川尚子、蔵本由紀、日本物理学会分科会（1992 年 9 月、東京）.

[24] Y. Kuramoto, Physica **D50** (1991), 15.

[25] Y. Kuramoto, T. Aoyagi, I. Nishikawa, T. Chawanya and K. Okuda, Prog. Theor. Phys. **87** (1992), 1119.

[26] H. Sompolinsky, D. Golomb and D. Kleinfeld, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **87** (1989), 7200; Phys. Rev. **A43** (1991), 6990.

[27] P. Baldi and M. Ronny, Neural Computation **2** (1990), 458.

[28] D.M. Kamen, P.J. Holmes and C. Koch, in *Models of Brain Function*, ed. R. Cotterill (Cambridge Univ. Press, 1989), 420.