位相演算子とその応用

— 量子光学系におけるコヒーレンスと散逸 —

日立製作所基礎研究所　番　雅司

1　はじめに

位相変数を量子力学的演算子として取り扱おうという試みは，Dirac[1] や Heitler[2] による電磁場の量子化の仕事に遡ることができる．しかし，量子力学的位相演算子が積極的に用いられ始めたのは最近のことである．特に，量子光学の分野における光子数スクウィージング [4, 5] や光子数の量子非破壊測定 [6] の解析において，位相演算子は重要な役割を果たす．

まず初めに，位相演算子の従来からの取り扱い [3] とその問題点を簡単に纏める [7, 8]．古典電磁気学において電磁場の複素振幅を位相と振幅に分けたように，位相演算子を調和振動子の消滅演算子 a の "polar decomposition" によって定義する．

$$a = e^{-i\phi}\sqrt{N}, \qquad \hat{d} \equiv e^{-i\phi} = \frac{1}{\sqrt{N+1}}a. \tag{1}$$

ここで，$N = a^\dagger a$ は光子数演算子である．以下では，位相変数ϕそのものではなく位相因子$\hat{d}$を単に位相演算子と呼ぶことにする．このように定義された位相演算子は次のような性質を持っている．

$$\hat{d}^\dagger|n\rangle = |n+1\rangle, \quad \hat{d}|n\rangle = |n-1\rangle, \quad \hat{d}|0\rangle = 0. \tag{2}$$

このように定義された位相演算子$\hat{d}$の定義における問題点は次の2点である [7, 8]．

- Nとϕは正準交換関係を満足しない．$[\phi, N] \neq i$
- 演算子 $\hat{d}$ は非ユニタリー演算子である．

$$\hat{d}\hat{d}^\dagger = 1, \qquad \hat{d}^\dagger\hat{d} = 1 - |0\rangle\langle 0| \tag{3}$$

第1番目の問題点は物理量の位相に関する2π-周期性によるものである．これは位相演算子としてϕではなく$\hat{d}$を用いることによって回避できる．重要なのは第2の問題点である．位相因子の意味を考えれば演算子$\hat{d}$はユニタリー演算子であるべきである．また，演算子$\hat{d}$がユニタリー演算子でないために，

$$\hat{s} = i\frac{\hat{d} - \hat{d}^\dagger}{2}, \qquad \hat{c} = \frac{\hat{d} + \hat{d}^\dagger}{2}. \tag{4}$$

で定義される sin，cos 演算子は

$$[\hat{c}, \hat{s}] = -\frac{i}{2}|0\rangle\langle 0|, \qquad \hat{c}^2 + \hat{s}^2 = 1 - \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| \tag{5}$$

なる性質を持つ．sin，cos 関数の意味を考えれば，$[\hat{c},\hat{s}]=0$ と $\hat{c}^2+\hat{s}^2=1$ が満たされるべきである．これらの原因は粒子数演算子 N のスペクトルに下限が存在することである．即ち，$\hat{d}|0\rangle=0$ なる関係式に原因がある．これは，エネルギー演算子に共役な量として時間演算子が存在しない理由と同様である．

以下では，この数学的困難を克服し，ユニタリー演算子として位相演算子を導入できる方法論を展開する [9]．さらに，この方法論の有用性を量子光学 [10] と Thermofield Dynamics[11, 12] において議論すると共に，時間演算子への応用についても議論する [9]．

2　相対粒子数状態と位相演算子

一般に，2 つの調和振動子から構成される系を考える．2 つの振動子を $\mathrm{A}(a,a^\dagger)$，$\mathrm{B}(b,b^\dagger)$ と表わす．これらの調和振動子の意味は後で考えることにする．全系 A+B に対する Fock 空間は次の完全正規直交系で張られる．

$$S_{A+B}=\{|m,n\rangle=|m\rangle_A\otimes|n\rangle_B\,|\,m,n=0,1,\ldots,\infty\}\,, \tag{6}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}|m,n\rangle\langle n,m|=1\,,\qquad \langle n_1,m_1|m_2,n_2\rangle=\delta_{m_1m_2}\delta_{n_1n_2}\,. \tag{7}$$

ここで，$|m\rangle_A$ と $|n\rangle_B$ はそれぞれの調和振動子の粒子数固有状態である．

状態 $|m,n\rangle$ を用いて次の状態を定義する．

$$|n,m\rangle\!\rangle=\theta(n)|m+n,m\rangle+\theta(-1-n)|m,m-n\rangle\,. \tag{8}$$

ここで，$n\geq 0$ に対して $\theta(n)=1$ であり，$n<0$ に対して $\theta(n)=0$ である．このようにして定義された状態は，調和振動子 A と B の粒子数差 (相対粒子数) 演算子 $\hat{N}=a^\dagger a-b^\dagger b$ の固有状態である．

$$\hat{N}|n,m\rangle\!\rangle=n|n,m\rangle\!\rangle\,. \tag{9}$$

以下，状態 $|n,m\rangle\!\rangle$ を相対粒子数状態と呼ぶことにする [9]．定義から明らかなように，n は $-\infty$ から $+\infty$ までの整数値をとる．また，相対粒子数状態 $|n,m\rangle\!\rangle$ は完全正規直交系を張る．

$$S_R=\{|n,m\rangle\!\rangle\,|\,m\geq 0,-\infty<n<\infty\,,\,m,n\in Z\}\,, \tag{10}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n,m\rangle\!\rangle\langle\!\langle m,n|=1\,,\qquad \langle\!\langle m_1,n_1|n_2,m_2\rangle\!\rangle=\delta_{m_1m_2}\delta_{n_1n_2}\,. \tag{11}$$

相対粒子数演算子 $\hat{N}=a^\dagger a-b^\dagger b$ のスペクトルには通常の粒子数演算子のような下限は存在しない．従って，相対粒子数演算子に共役な演算子として位相演算子を定義すれば，先に述べたような数学的問題は起こらない．そこで，位相演算子 $\hat{D}$ を次のように定義する．

$$\hat{D}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n,m\rangle\!\rangle\langle\!\langle m,n+1|\,. \tag{12}$$

このように定義された演算子は

$$\hat{D}\hat{D}^\dagger = \hat{D}^\dagger\hat{D} = 1\,, \tag{13}$$

$$\hat{D}|n,m\rangle\!\rangle = |n-1,m\rangle\!\rangle\,, \qquad \hat{D}^\dagger|n,m\rangle\!\rangle = |n+1,m\rangle\!\rangle\,, \tag{14}$$

を満足する．従って，位相演算子$\hat{D}$はユニタリー演算子であり，相対粒子数の "displacement operator" である．また，$\hat{D}$と$\hat{N}$の間には，次の交換関係が成り立つ．

$$[\hat{D},\hat{N}] = \hat{D}\,. \tag{15}$$

位相演算子$\hat{D}$は次のように表わすこともできる．

$$\hat{D} = \sum_{n=0}^{\infty}(\hat{d}_A^\dagger)^n(\hat{d}_A)^{n+1}\otimes|n\rangle_{BB}\langle n| + \sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle_{AA}\langle n|\otimes(\hat{d}_B^\dagger)^{n+1}(\hat{d}_B)^n\,. \tag{16}$$

ここで，$\hat{d}_A$と$\hat{d}_B$はそれぞれの調和振動子に対する "polar decomposition" による位相演算子である．

$$\hat{d}_A = (aa^\dagger)^{-1/2}a\,, \qquad \hat{d}_B = (bb^\dagger)^{-1/2}b\,. \tag{17}$$

このようにして定義された位相演算子$\hat{D}$を RNS 位相演算子と呼ぶことにする．RNS 位相演算子の物理的意味は以下の節で議論する．

RNS 位相演算子$\hat{D}$の固有状態は次の式で与えられる．

$$|\phi,m\rangle\!\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|n,m\rangle\!\rangle e^{-in\phi}\,, \tag{18}$$

位相ϕの定義域は，$\phi_0-\pi\le\phi<\phi_0+\pi$である．ここで，$\phi_0$は大きさ 2πの定義域を定めるパラメータである．この任意性は位相の 2π周期性に起因する．実際，(14) から (18) が$\hat{D}$の固有状態であることは明らかである．

$$\hat{D}|\phi,m\rangle\!\rangle = e^{-i\phi}|\phi,m\rangle\!\rangle\,, \qquad \hat{D}^\dagger|\phi,m\rangle\!\rangle = e^{i\phi}|\phi,m\rangle\!\rangle\,. \tag{19}$$

相対粒子数状態 $\{|n,m\rangle\!\rangle\}$ が完全正規直交系を張ることを用いれば，位相固有状態の集合 $\{|\phi,m\rangle\!\rangle\,|\,\phi_0-\pi\le\phi<\phi_0+\pi, m\ge 0\}$ が全空間 (A+B) で完全正規直交系を張ることが導かれる．

$$\langle\!\langle m_1,\phi_1|\phi_2,m_2\rangle\!\rangle = \delta_{m_1m_2}\delta(\phi_1-\phi_2)\,, \qquad \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi\,|\phi,m\rangle\!\rangle\langle\!\langle m,\phi| = 1\,. \tag{20}$$

位相固有状態を用いると RNS 位相演算子$\hat{D}$，cosine 演算子$\hat{C}=\dfrac{\hat{D}+\hat{D}^\dagger}{2}$，sine 演算子$\hat{S}=i\dfrac{\hat{D}-\hat{D}^\dagger}{2}$は次のように表わされる．

$$\hat{D} = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi|\phi,m\rangle\!\rangle\,e^{-i\phi}\,\langle\!\langle m,\phi|\,, \tag{21}$$

$$\hat{C} = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi|\phi,m\rangle\!\rangle\,\cos\phi\,\langle\!\langle m,\phi|\,, \tag{22}$$

$$\hat{S} = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi|\phi,m\rangle\!\rangle\,\sin\phi\,\langle\!\langle m,\phi|\,. \tag{23}$$

$\hat{C}$と$\hat{S}$は次の関係式を満足する．

$$[\hat{C},\hat{S}]=0\,,\qquad \hat{C}^2+\hat{S}^2=1\,, \tag{24}$$

$$[\hat{C},\hat{N}]=-i\hat{S}\,,\qquad [\hat{S},\hat{N}]=i\hat{C}\,. \tag{25}$$

また，$\hat{D}=\exp(-i\hat{\Phi})$ を満足するエルミート演算子$\hat{\Phi}$は，位相固有状態を用いて次のように定義される．

$$\hat{\Phi}=\sum_{m=0}^{\infty}\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi} d\phi\,|\phi,m\rangle\!\rangle\,\phi\,\langle\!\langle m,\phi|\,. \tag{26}$$

このとき粒子数–位相交換関係は

$$[\hat{\Phi},\hat{N}]=i\left\{1-2\pi\sum_{m=0}^{\infty}|\phi_0-\pi,m\rangle\!\rangle\langle\!\langle m,\phi_0-\pi|\right\}\,, \tag{27}$$

となる．右辺第２項は位相の 2π-周期性に起因するものである．このことについては後で議論する．

演算子$\hat{N}$，$\hat{D}$，$\hat{C}$，$\hat{S}$の間に成り立つ交換関係を用いると，次の不確定性関係が得られる．

$$[(\Delta N)^2+\frac{1}{4}]\cdot(\Delta D)^2\geq\frac{1}{4}\,, \tag{28}$$

$$[(\Delta N)^2+\frac{1}{4}]\cdot[(\Delta C)^2+(\Delta S)^2]\geq\frac{1}{4}\,, \tag{29}$$

$$\Delta N\cdot\Delta S\geq\frac{1}{2}|\langle\hat{C}\rangle|\,,\qquad \Delta N\cdot\Delta C\geq\frac{1}{2}|\langle\hat{S}\rangle|\,. \tag{30}$$

ここで注意しなければいけないのは，通常よく用いられる粒子数–位相不確定性関係

$$\Delta N\cdot\Delta\Phi\geq\frac{1}{2}\,, \tag{31}$$

は厳密には成立しないということである．この関係は，平均粒子数$\bar{n}$が，$\bar{n}\gg 1$ を満たす準古典領域においてのみ近似的に成り立つものである．

3　量子光学における位相の量子力学的取り扱い

3.1　RNS 位相演算子の量子光学への応用

前節で導入された RNS 位相演算子$\hat{D}$を量子光学の問題に応用する [10, 13]．この場合，RNS 位相演算子を用いることによって，信号モードの光子の非古典的性質の解析が可能になる．以下の議論を簡単にする為に，注目する物理系を単一モードの光子系 $\mathrm{A}(a,a^\dagger)$ であると仮定する．ところで，RNS 位相演算子$\hat{D}$を定義するためには，相対粒子数状態 $\{|n,m\rangle\!\rangle\}$ を導入しなければならない．このために，仮想的な光子系Bを導入する．信号モード A と仮想モード B を用いることによって，相対粒子数状態を定義することができ，RNS 位相演算子$\hat{D}$を導入できる．注目する信号モード A を全系 (A+B) の部分系として取り扱う．このように仮想モードの導入によって，量子光学系に位相演算子$\hat{D}$を定義することができる．

物理的な結果を得るためには，仮想的な光子系を導入することによって増えた自由度に対してある種の条件を課さなければならない．この条件として次のものを採用する．

- 光子系Ａの状態は注目している信号モードの物理的状態 $|\psi\rangle_A$ とする．例えば，コヒーレント状態やスクィーズド状態等である．
- 仮想的な光子系Ｂの状態は常に真空 $|0\rangle_B$ であると仮定する．

従って，物理量の期待値を計算する場合の全系の物理的状態 $|\Psi\rangle\!\rangle$ として，次の形の状態ベクトルを用いる．

$$|\Psi\rangle\!\rangle = |\psi\rangle_A \otimes |0\rangle_B. \tag{32}$$

ここで，$|\psi\rangle_A$ は注目する信号モードの物理的状態であり，$|0\rangle_B$ は仮想モードの真空状態である．この仮定の正当性は，以下の考察，及び例題から確かめられる．以下，(32) を物理的状態と呼ぶことにする．

物理的状態 (32) における演算子 $\hat{D}$，$\hat{C}$，$\hat{S}$ 等の期待値は次のようになる [10, 13]．

$$\langle\!\langle \hat{D}^n \rangle\!\rangle = \langle \hat{d}_A^n \rangle, \qquad \langle\!\langle \hat{D}^{\dagger n} \rangle\!\rangle = \langle \hat{d}_A^{\dagger n} \rangle, \tag{33}$$

$$\langle\!\langle \hat{C} \rangle\!\rangle = \langle \hat{c}_A \rangle, \qquad \langle\!\langle \hat{S} \rangle\!\rangle = \langle \hat{s}_A \rangle, \tag{34}$$

$$\langle\!\langle \hat{C}^2 \rangle\!\rangle = \langle \hat{c}_A^2 \rangle + \frac{1}{4}|{}_A\langle 0|\psi\rangle_A|^2, \tag{35}$$

$$\langle\!\langle \hat{S}^2 \rangle\!\rangle = \langle \hat{s}_A^2 \rangle + \frac{1}{4}|{}_A\langle 0|\psi\rangle_A|^2. \tag{36}$$

ここで，$\langle\!\langle \cdots \rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Psi | \cdots | \Psi \rangle\!\rangle$，$\langle \cdots \rangle = {}_A\langle \psi | \cdots | \psi \rangle_A$ であり，$|0\rangle_A$ は信号モード (A 系) の真空状態である．また，$\hat{d}_A$ は従来の “polar decomposition” による信号モードの位相演算子であり，$\hat{c}_A$ と $\hat{s}_A$ は $\hat{d}_A$ を用いて定義される cosine 演算子と sine 演算子である．(33)—(36) からわかるように，RNS 位相演算子 $\hat{D}$ と従来の “polar decomposition” による位相演算子 $\hat{d}_A$ との差は，物理量の揺らぎに現れる．この差は，信号モードの物理的状態に占める真空成分の割合に比例して大きくなる．従来の単純な “polar decomposition” による位相演算子の定義では，このような真空の揺らぎが考慮されていなかった為に，$\hat{d}$ が非ユニタリー演算子になる等の不都合が生じたのである．従って，真空の揺らぎが無視できるような準古典的領域では $\hat{D}$ と $\hat{d}_A$ の差は無視できるので，“polar decomposition” による位相演算子の導入が許される．

3.2 Pegg-Barnett 位相演算子

以上の結果を，Pegg と Barnett による位相演算子 [14]–[18] と比較してみる．まず，Pegg と Barnett による位相演算子理論を簡単に纏める．Pegg と Barnett は，無限次元空間である Fock 空間 $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |n\rangle, \ldots\}$ を (s+1)-次元空間 $\{|0\rangle, |1\rangle, \ldots, |s\rangle\}$ に制限し，この有限次元空間上で位相演算子を定義した．彼らの方法は，すべての物理量を (s+1)-次元空間上で計算し，最後に $s \to \infty$ という極限をとるというものである．Pegg と Barnett による位相演算子 (以下，PB 位相演算子と呼ぶ) は次のように定義される．

$$\hat{D}_{\mathrm{PB}}^{(s)} = \sum_{n=0}^{s-1} |n\rangle\langle n+1| + e^{-i(s+1)(\phi_0-\pi)}|s\rangle\langle 0|. \tag{37}$$

ここでは注目する信号モードのみを考え，添え字Aは省略した．このように有限次元空間上で定義されるPB位相演算子はユニタリー演算子であり，次の関係を満足する．

$$\hat{D}_{\rm PB}^{(s)}|s\rangle = |s-1\rangle\,, \cdots, \hat{D}_{\rm PB}^{(s)}|n\rangle = |n-1\rangle\,, \cdots, \hat{D}_{\rm PB}^{(s)}|1\rangle = |0\rangle\,,$$
$$\hat{D}_{\rm PB}^{(s)}|0\rangle = e^{-i(s+1)(\phi_0-\pi)}|s\rangle\,. \tag{38}$$

このように，Pegg と Barnett の定式化においては s+1 個の状態を周期的に結び付けることによって，“polar decomposition” による位相演算子の場合のように $\hat{d}|0\rangle = 0$ という下限が現れないようにしている．(38) からわかるように，このことが可能になったのは (37) の右辺第2項の存在による．そして，有限次元空間においてのみ (37) の右辺第2項が意味を持つ．

PB 位相演算子の固有状態は次の式で与えられる．

$$|\phi_m^s\rangle = \frac{1}{\sqrt{s+1}}\sum_{n=0}^{s} e^{-in\phi_m^s}|n\rangle\,. \tag{39}$$

ここで，$\phi_m^s = \phi_0 - \pi + \dfrac{2\pi m}{s+1}$ $(m = 0, 1, \ldots, s)$ である．有限次元に制限したために位相は有限個の離散的な値しか取れない．この位相固有状態は (s+1)-次元空間において完全正規直交系を張る．PB 位相演算子の固有状態を用いると $\hat{D}_{\rm PB}^{(s)} = \exp[-i\hat{\Phi}_{\rm PB}^{(s)}]$ を満足するエルミート演算子 $\hat{\Phi}_{\rm PB}^{(s)}$ を次のように定義できる．

$$\hat{\Phi}_{\rm PB}^{(s)} = \sum_{m=0}^{s} |\phi_m^s\rangle\phi_m^s\langle\phi_m^s|\,. \tag{40}$$

(s+1)-次元空間においては物理系の任意の状態 $|\psi\rangle$ は

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{s} a_n|n\rangle \tag{41}$$

と展開できる．このとき，物理量は次のように計算される．

$$\langle f(\phi)\rangle = \lim_{s\to\infty}\langle\psi|f(\hat{\Phi}_{\rm PB}^{(s)})|\psi\rangle\,. \tag{42}$$

ここで，極限 $s\to\infty$ はすべての計算の最後で取られる．このようにして計算される物理量は，RNS 位相演算子を用いて表わされた物理量を，物理状態 $|\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle\otimes|0\rangle$ を用いて期待値を計算した結果と一致する．このことは以下で “probability operator measure” を用いて証明する．ここで注意しておきたいことは，PB 位相演算子理論では明らかに可換でない演算操作の順序の入れ替えを行っているということである．可換でない演算操作とは，期待値の計算と $s\to\infty$ という極限操作である．本来，Fock 空間は無限次元空間である．一方，RNS 位相演算子理論ではこのような数学的に正当化されない操作は行っていない．また，以下の節で議論するように，相対粒子数状態に基づく位相演算子理論は量子光学以外の分野でも有効な方法であることが理解できるであろう．

3.3 位相確率密度分布

次に，RNS 位相演算子$\hat{D}$の固有状態 $\{|\phi,m\rangle\!\rangle\}$ を用いて "Probability Operator Measure(POM)" を導入する [19]．位相ϕに対する POM は次のように定義される．

$$\hat{\Pi}(\Delta)=\int_{\phi\in\Delta}d\phi\,\hat{\pi}(\phi)\,,\quad \hat{\pi}(\phi)=\sum_{m=0}^{\infty}|\phi,m\rangle\!\rangle\langle\!\langle m,\phi|\,. \tag{43}$$

ここで，$\Delta\subseteq I_\phi=[\phi_0-\pi,\phi_0+\pi)$ である．このとき，$\hat{\Pi}(\Delta)$ は次の性質を満足する．

$$\hat{\Pi}\geq 0\,,\quad \hat{\Pi}(I_\phi)=1\,,\quad \hat{\Pi}(\emptyset)=0\,, \tag{44}$$

$$\hat{\Pi}(\cap_k\Delta_k)=\prod_k\hat{\Pi}(\Delta_k)\,,\quad \hat{\Pi}(\cup_k\Delta_k)\leq\sum_k\hat{\Pi}(\Delta_k)\,. \tag{45}$$

最後の関係式において等号は$\Delta_i\cap\Delta_j=\emptyset\,(i\neq j)$ の場合に成り立つ．

POM $\hat{\Pi}(\Delta)$ (or $\hat{\pi}(\phi)$) を用いると，物理的状態 $|\Psi\rangle\!\rangle=|\psi\rangle\otimes|0\rangle$ における位相変数に対する確率密度分布 $P(\phi)$ は次の式で与えられる．

$$P(\phi)=\langle\!\langle\Psi|\hat{\pi}(\phi)|\Psi\rangle\!\rangle=\frac{1}{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty}e^{in\phi}\langle n|\psi\rangle\right|^2\,. \tag{46}$$

このとき，物理量の平均値は

$$\langle f(\hat{\Phi})\rangle=\langle\!\langle\Psi|f(\hat{\Phi})|\Psi\rangle\!\rangle=\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi f(\phi)P(\phi)\,, \tag{47}$$

となる．例えば，$\hat{D}$，$\hat{C}$，$\hat{S}$等の平均値は次のように計算される．

$$\langle\hat{D}^n\rangle=\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi\,e^{-in\phi}P(\phi)\,,\quad \begin{pmatrix}\langle\hat{C}^n\rangle\\ \langle\hat{S}^n\rangle\end{pmatrix}=\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi}d\phi\begin{pmatrix}\cos^n\phi\\ \sin^n\phi\end{pmatrix}P(\phi) \tag{48}$$

また，位相–粒子数交換関係 (27) の平均値を計算すれば次のようになる．

$$\langle[\hat{\Phi},\hat{N}]\rangle=i\{1-2\pi P(\phi_0-\pi)\} \tag{49}$$

右辺第 2 項は，系の位相の値が定義域の境界値 $(\phi=\phi_0-\pi)$ を取る確率を表わしている．ϕ_0は任意に選べる基準値であるので，位相の値の分布の広がりが 2πに比べて十分に小さければ，$\langle[\hat{\Phi},\hat{N}]\rangle\approx i$ と近似でき，準古典的な描像が成り立つ．

ところで，Pegg-Barnett 位相演算子の理論において物理量の平均値は

$$\langle f(\phi)\rangle=\lim_{s\to\infty}\langle\psi|f(\hat{\Phi}^{(s)}_{\rm PB})|\psi\rangle \tag{50}$$

によって計算できるが，

$$\phi^s_m=\phi_0-\pi+\frac{2\pi m}{s+1}\longrightarrow\phi\quad(s\to\infty) \tag{51}$$

$$\phi^s_{m+1}-\phi^s_m=\frac{2\pi}{s+1}\longrightarrow d\phi\quad(s\to\infty) \tag{52}$$

であることを用いれば，(50) は次のようになる．

$$\langle f(\phi)\rangle = \int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi} d\phi\, f(\phi)P(\phi)\,. \tag{53}$$

ここで，$P(\phi)=\dfrac{1}{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi}\langle n|\psi\rangle\right|^2$ である．これは，(47) と同一である．従って，RNS 位相演算子理論と PB 位相演算子理論は代数的構造等の数学的性質は全く異なるが，物理量の期待値に関しては同一の結果を与えることがわかる．

次に，RNS 位相演算子理論における dynamics の計算方法を説明する．注目する信号モードの Hamiltonian $\mathcal{H}$が与えられたとき，信号モードの時刻 t における状態 $|\psi(t)\rangle_A$は，Schrödinger 方程式より，

$$|\psi(t)\rangle_A = \exp[-it\mathcal{H}]|\psi\rangle_A\,, \tag{54}$$

となる．一方，仮想モードは仮定により常に真空状態であると仮定されるので，

$$|\phi(t)\rangle_B = |0\rangle_B\,, \tag{55}$$

である．従って，RNS 位相演算子理論において物理量を計算する時刻 t での物理的状態は次の式で与えられる．

$$|\Psi(t)\rangle\!\rangle = |\psi(t)\rangle \otimes |0\rangle\,. \tag{56}$$

ここで，添え字 A,B は省略した．この状態を用いて POM の期待値を計算すれば時刻 t での位相確率密度 $P(\phi,t)$ は次のようになる．

$$P(\phi,t) = \frac{1}{2\pi}\left|\sum_{n=0}^{\infty} e^{in\phi}\langle n|\psi(t)\rangle\right|^2\,. \tag{57}$$

また，注目する信号モードの状態が密度行列で表わされる場合，

$$\rho_A(t) = \exp[-it\mathcal{H}]\rho_A \exp[it\mathcal{H}]\,, \tag{58}$$

となり，仮想モード密度行列は $|0\rangle_{BB}\langle 0|$ となるので，全系の物理的状態の密度行列は次のようになる．

$$W(t) = \rho(t)\otimes|0\rangle\langle 0|\,. \tag{59}$$

従って，時刻 t での位相確率密度は次の式で与えられる．

$$P(\phi,t) = \mathrm{Tr}[W(t)\hat{\pi}(\phi)] = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{i(m-n)\phi}\langle m|\rho(t)|n\rangle\,. \tag{60}$$

以上のことから，RNS 位相演算子理論における Dynamics の計算の困難さは，通常の量子力学または統計力学のそれと同じ程度である．仮想モード導入によって自由度が増えた影響が計算に及ぼす影響は殆どない．通常の枠組みで問題が解けていれば，その結果をそのまま用いて，RNS 位相演算子理論における位相に関する dynamics の問題を扱うことができる．

3.4 応用

以下では，例として非線形振動子と減衰振動子を考える．まず初めに，非線形振動子を考えよう [19]．このモデルは，光 Kerr 効果による自己位相変調を記述する．非線形振動子のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \omega a^\dagger a + \frac{1}{2} g (a^\dagger a)^2 , \tag{61}$$

で与えられる．相互作用定数 g は 3 次の非線形感受率に比例する．初期状態としてコヒーレント状態 $|\alpha\rangle$ を仮定すると，時刻 t での系の状態は次のようになる．

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\bar{n}/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{-in\theta - igtn^2/2} |n\rangle . \tag{62}$$

ここで，$\alpha = \sqrt{\bar{n}} e^{-i\theta}$ と置いた．従って，(57) の位相確率密度 $P(\phi, t)$ は次の式で与えられる．

$$P(\phi, t) = \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{n}^{n/2}}{\sqrt{n!}} e^{-\bar{n}/2} \cdot e^{i(n\theta - n\phi - gtn^2/2)} \right|^2 . \tag{63}$$

まず，$\bar{n} \gg 1$ の場合を考える．このとき，$P(\phi, t)$ は次のようなガウス分布で近似できる．

$$P(\phi, t) \approx \sqrt{\frac{2\bar{n}}{\pi[1 + (2gt\bar{n})^2]}} \exp\left[-2\bar{n} \frac{(\phi - \theta - gt\bar{n})^2}{1 + (2gt\bar{n})^2} \right] \tag{64}$$

ただし，$\bar{n}gt \ll 1$ とした．一般に，時間 t のオーダーは光子が非線形媒質を通過する時間 ($t \approx L/c$，L:試料の大きさ，c:光速) であり，また 3 次の非線形感受率は非常に小さいと考えられる．従って，gt は非常に小さく，2 つの条件 $\bar{n} \gg 1$ と $\bar{n}gt \ll 1$ は両立すると考えてよい．このとき，位相と粒子数の揺らぎ，及び位相–粒子数不確定性関係は次のようになる．

$$\Delta\phi_t^2 \approx \frac{1}{4\bar{n}} + \bar{n}(gt)^2, \qquad \Delta n_t^2 \approx \bar{n}, \tag{65}$$

$$\Delta\phi_t^2 \Delta n_t^2 \approx \frac{1}{4} + (\bar{n}gt)^2 . \tag{66}$$

この場合は，準古典的な不確定性関係 $\Delta\phi\Delta n \geq \frac{1}{2}$ が成り立っている．

一方，$\bar{n} \ll 1$ のとき位相確率密度 $P(\phi, t)$ は次のように近似できる．

$$P(\phi, t) \approx \frac{1}{2\pi} [1 + 2\sqrt{\bar{n}} \cos(\phi - \theta - gt/2) + \sqrt{2}\bar{n} \sin 2(\phi - \theta - gt)] . \tag{67}$$

このとき，位相の揺らぎは次の式で与えられる．

$$\Delta\phi_t^2 \approx \frac{\pi^2}{3} - 4\sqrt{\bar{n}} \cos(\theta + gt/2) + \frac{1}{2} \bar{n} \cos 2(\theta + gt) . \tag{68}$$

ここで，簡単のために $\phi_0 = 0$ と置いた．また，位相が完全に不確定な状態での位相揺らぎの大きさは

$$\Delta\phi^2 = \frac{\pi^2}{3} , \tag{69}$$

である．このとき，Δn は十分に小さくてよいので準古典的な不確定性関係$\Delta\phi\Delta n \geq \frac{1}{2}$は明らかに成り立たない．

次の例として，減衰振動子を考えよう．減衰振動子に対する Liouville-von Neumann 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(t) = -i\ \omega\ [a^\dagger a, \rho(t)] + \kappa\bar{n}([a^\dagger, \rho(t)a] + [a^\dagger\rho(t), a]) \\ + \kappa(\bar{n}+1)([a\rho(t), a^\dagger] + [a, \rho(t)a^\dagger]) \tag{70}$$

で与えられる．従って，(60) から減衰振動子の位相確率密度 $P(\phi,t)$ に対する運動方程式は次のようになる．

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\phi,t) = -\omega\frac{\partial}{\partial\omega}P(\phi,t) + \frac{\kappa}{2\pi}\sum_{m,n=0}^{\infty} e^{i(m-n)\phi}\langle m|\rho(t)|n\rangle \\ \times[(\bar{n}+1)(\sqrt{n}-\sqrt{m})^2 + \bar{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{m+1})^2]\,. \tag{71}$$

特に，平均粒子数$\bar{n}$が十分に大きい準古典的な場合 ($\bar{n} \gg 1$)，$P(\phi,t)$ は次の Fokker-Planck 方程式を満足する．

$$\frac{\partial}{\partial\phi}P(\phi,t) = -\omega\frac{\partial}{\partial\phi}P(\phi,t) + D\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}P(\phi,t) \tag{72}$$

ここで，位相拡散係数は $D = \frac{1}{2}\kappa\cosh\beta\omega$ で与えられる．また，$\bar{n} \ll 1$ の場合は方程式は閉じた形にならず，数値計算に拠らなければならない．

4 位相演算子の Thermofield Dynamics への応用

第2節で導入した RNS 位相演算子理論を Thermofield Dynamics[20]–[23] へ応用する [9]，[11, 12]．第2節で相対粒子数状態を定義する為に，2つの調和振動子を考えた．第3節では RNS 位相演算子理論を量子光学へ応用した際，2つの調和振動子のうちの1つを注目する信号モードとし，もう1つの調和振動子を相対粒子数状態 $\{|n,m\rangle\rangle\}$ を導入するための仮想モードと仮定したが，位相演算子を Thermofield Dynamics へ応用する場合は，調和振動子 B$(b^\dagger,b)$ が調和振動子 A$(a^\dagger,a)$ の tilde 共役であると仮定する．

$$b = \tilde{a}\,, \qquad b^\dagger = \tilde{a}^\dagger\,. \tag{73}$$

ここで，tilde 共役は次のように定義される．

$$(AB)\tilde{} = \tilde{A}\tilde{B}\,, \quad (\tilde{A})^\dagger = (A^\dagger)\tilde{}\,, \quad (\tilde{A})\tilde{} = A\,, \quad (aA+bB)\tilde{} = a^*\tilde{A} + b^*\tilde{B}\,. \tag{74}$$

この場合に注意しなければならないのは，振動子 B は決して仮想的なモードではないということである．従って，振動子 B の状態はハミルトニアンによって時間発展し，第3節のように常に真空状態であるとは仮定しない．Thermofield Dynamics の詳細については文献 [20]–[23] を参照されたい．

Thermofield Dynamics では，系の状態の時間発展は次の方程式によって決定される．

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}|0(t)\rangle\,. \tag{75}$$

ここで，$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} - \tilde{\mathcal{H}}$であり，$\mathcal{H}$は系のハミルトニアン，$\tilde{\mathcal{H}}$はその tilde 共役である．調和振動子の場合，$\mathcal{H} = \omega a^\dagger a$ であるので

$$\hat{\mathcal{H}} = \omega\hat{N}\,, \qquad \hat{N} = a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a}\,, \tag{76}$$

となる．

演算子$\hat{N}$は，物理系とその tilde 共役系での粒子数の差を表わしている．従って，第2節で行ったように$\hat{N}$に共役な演算子として位相演算子$\hat{D}$ を定義することができる．更に同様にして，$\hat{N}$と$\hat{D}$の固有状態の作り，2つの完全正規直交系 $\{|n,m\rangle\!\rangle\}$ と $\{|\phi,m\rangle\!\rangle\}$ を構成することができる．これらを用いると，任意の状態 $|\Psi(t)\rangle$ は次のように表わすことができる．

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t;n,m)|n,m\rangle\!\rangle\,. \tag{77}$$

$$|\Psi(t)\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\int_{\phi_0-\pi}^{\phi_0+\pi} d\phi\, g(t;\phi,m)|\phi,m\rangle\!\rangle\,. \tag{78}$$

ここで，$f(t;n,m)$ と $g(t;\phi,m)$ はそれぞれの展開係数である．従って，(75) と (76) から展開係数に対する運動方程式は次のようになる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - in\omega\right) f(t;n,m) = 0\,, \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} - \omega\frac{\partial}{\partial\phi}\right) g(t;\phi,m) = 0\,. \tag{79}$$

特に，定常状態では，

$$f(t;n,m) = \delta_{n,0} f(m)\,, \qquad g(t;\phi,m) = g(m)\,. \tag{80}$$

となる．これは，定常状態では粒子数状態に関して密度行列が対角化され，位相が完全に不確定であることを表わしている．

Thermofield Dynamics における RNS 位相演算子$\hat{D}$は，量子光学の場合のようにある種の量子の位相を表わすのではなく，系のコヒーレンス(密度行列の非対角成分の情報)を表わしている．従って，Thermofield Dynamics の枠組みで RNS 位相演算子の dynamics を調べることによって，系の時間発展に伴うコヒーレンスの変化を調べることができる．

簡単な例として，減衰振動子を考えよう．Thermofield Dynamics において減衰振動子の状態 $|\psi(t)\rangle$ の時間発展は次の方程式で記述される．

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}|\psi(t)\rangle \tag{81}$$

$$\hat{\mathcal{H}} = H - \tilde{H} + i\hat{\Pi} \tag{82}$$

$$H = \omega a^\dagger a \tag{83}$$

$$\hat{\Pi} = -\kappa[(2\bar{n}+1)(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger\tilde{a}) - 2\bar{n}a^\dagger\tilde{a}^\dagger - 2(\bar{n}+1)a\tilde{a} + 2\bar{n}]\,. \tag{84}$$

ここで，$K_+ = a^\dagger \tilde{a}^\dagger$，$K_- = a\tilde{a}$，$K_0 = \frac{1}{2}(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a} + 1)$ と置けば，(82)—(84) は次のようになる．

$$\hat{\mathcal{H}} = \omega \hat{N} + 2i\kappa \left[(\bar{n}+1)K_- + \bar{n}K_+ - (2\bar{n}+1)K_0 + \frac{1}{2}\right]. \tag{85}$$

$\{K_+, K_+, K_0\}$ は SU(1,1) Lie 代数の generator である．また，$[\hat{N}, K_\pm] = [\hat{N}.K_0] = 0$ である．よって，SU(1,1) Lie 代数に対する Baker-Housdorff の公式を用いると解は次のように表わされる．

$$|\psi(t)\rangle = e^{\kappa t - i\omega \hat{N}} \exp[A_+(t)K_+] \exp[\ln A_0(t) \cdot K_0] \exp[A_-(t)K_-] |\psi(0)\rangle \,, \tag{86}$$

$$A_+(t) = \frac{2\bar{n}\sinh \kappa t}{\cosh \kappa t + (2\bar{n}+1)\sinh \kappa t} \tag{87}$$

$$A_-(t) = \frac{2(\bar{n}+1)\sinh \kappa t}{\cosh \kappa t + (2\bar{n}+1)\sinh \kappa t} \tag{88}$$

$$A_0(t) = \left(\frac{1}{\cosh \kappa t + (2\bar{n}+1)\sinh \kappa t}\right)^2 . \tag{89}$$

$$\tag{90}$$

この結果を用いて位相演算子の平均値を計算すると次のようになる．

$$\langle \hat{D}(t) \rangle = e^{-i\omega t + \kappa t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_-(t)^k A_0(t)^{m+1} A_+(t)^l \langle\langle m+l, 1 | \psi(0) \rangle \tag{91}$$

$$\times \frac{(m+k)!(m+l)!}{k!l!m!(m+1)!} [(m+k+1)(l+k+1)]^{1/2} . \tag{92}$$

特に，$\kappa t \gg 1$ の場合，次のようになる．

$$\langle \hat{D}(t) \rangle \approx \mathrm{const} \cdot e^{-i\omega t - \kappa t}, \qquad \Delta \hat{D}(t)^2 \approx 1 - \mathrm{const} \cdot e^{-2\kappa t} . \tag{93}$$

従って，系のコヒーレンスは指数関数的に減衰し，$\langle \hat{D}(\infty) \rangle = 0$ と $\Delta \hat{D}(\infty)^2 = 1$ となる．これは平衡状態では位相が完全に不確定であることを表わしている．

位相確率分布関数 $P(\phi, t)$ を用いて，情報エントロピー $S(t)$ を

$$S(t) = -\int_{\phi_0 - \pi}^{\phi_0 + \pi} d\phi \, P(\phi, t) \ln P(\phi, t) \tag{94}$$

と定義すれば，次の式が成り立つ．

$$\frac{d}{dt} S(t) = \kappa \int_{\phi_0 - \pi}^{\phi_0 + \pi} d\phi \left(\frac{\partial \ln P(\phi, t)}{\partial \phi} \right)^2 \geq 0 . \tag{95}$$

ここで，位相の 2π 周期性 $P(\phi_0 - \pi, t) = P(\phi_0 + \pi, t)$ を用いた．平衡状態 $(t = \infty)$ では，$S(\infty) = \max$ となり，$P(\phi, \infty) = \frac{1}{2\pi}$ が得られる．即ち，位相が完全に不確定であることがわかる．

5　連続スペクトルへの応用と時間演算子

RNS 位相演算子の Thermofield Dynamics への応用を引き続き考える．これまでは，離散スペクトルを扱ってきたが，この節では，系のハミルトニアンが連続スペクトルを持つ場合を考える．そこで，$|E\rangle$ をハミルトニアン Hの固有状態とし，$|\tilde{E}\rangle$ のその tilde 共役とする．

$$H|E\rangle = E|E\rangle\,, \qquad \tilde{H}|E\rangle = E|\tilde{E}\rangle\,. \tag{96}$$

そこで，$|E_1, E_2\rangle = |E_1\rangle \otimes |\tilde{E}_2\rangle$ と定義し，相対粒子数状態に対応して，次の状態を定義する．

$$|E,\epsilon\rangle\!\rangle = \theta(E)|\epsilon + E, \epsilon\rangle + \theta(-E)|\epsilon, \epsilon - E\rangle\,. \tag{97}$$

ここで，$\epsilon \geq 0$，$-\infty < E < \infty$ であり，$\theta(E)$ は通常のステップ関数である．このとき，集合 $\{|E,\epsilon\rangle\!\rangle\,|\,\epsilon \geq 0, -\infty < E < \infty\}$ は完全正規直交系を張る．

$$\langle\!\langle \epsilon_1, E_1|E_2, \epsilon_2\rangle\!\rangle = \delta(\epsilon_1 - \epsilon_2)\delta(E_1 - E_2)\,, \qquad \int_0^\infty d\epsilon \int_{-\infty}^\infty dE\,|E,\epsilon\rangle\!\rangle\langle\!\langle \epsilon, E| = 1\,. \tag{98}$$

また，$|E,\epsilon\rangle\!\rangle$ は Thermofield Dynamics の時間発展 generator である演算子$\hat{\mathcal{H}} = H - \tilde{H}$の固有状態である．

$$\hat{\mathcal{H}}|E,\epsilon\rangle\!\rangle = E|E,\epsilon\rangle\!\rangle\,. \tag{99}$$

以下，状態 $|E,\epsilon\rangle\!\rangle$ も相対粒子数状態と呼ぶことにする．

相対粒子数状態 $\{|E,\epsilon\rangle\!\rangle\}$ を用いて，ユニタリー演算子$\hat{D}(\xi)$ を次のように定義する．

$$\hat{D}(\xi) = \int_0^\infty d\epsilon \int_{-\infty}^\infty dE\,|E - \xi, \epsilon\rangle\!\rangle\langle\!\langle \epsilon, E|\,. \tag{100}$$

この定義から明らかなように，$\hat{D}(\xi)$ はパラメータ Eに対する変位演算子 (displacement operator) である．このとき，次の関係が成り立つ．

$$[\hat{D}(\xi), \hat{\mathcal{H}}] = \xi\hat{D}(\xi)\,, \qquad \hat{D}(\xi)|E,\epsilon\rangle\!\rangle = |E - \xi, \epsilon\rangle\!\rangle\,. \tag{101}$$

集合 $\{\hat{D}(\xi)\,|\,\xi \in R\}$ を考えると，この集合は，“one-parameter unitary group” となり，$\hat{D}(\xi)$ はξに関して強連続でる．ここで，強連続とは，ノルム位相に関して連続であることを意味する．このとき，関数解析で有名な Stone の定理が成り立つ．Stone の定理によって，

$$\hat{D}(\xi) = \exp(-i\xi\hat{T})\,, \tag{102}$$

を満足するエルミート演算子$\hat{T}$の存在が保証される．(101) と (102) により，$\hat{T}$は次の交換関係を満たす．

$$[\hat{T}, \hat{\mathcal{H}}] = i\,. \tag{103}$$

これは，演算子$\hat{T}$が時間発展の generator $\hat{\mathcal{H}}$ に共役な演算子であることを表わしている．また，演算子$\hat{T}$の固有状態は

$$|\tau,\epsilon\rangle\!\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty dE\,|E,\epsilon\rangle\!\rangle e^{-iE\tau}\,, \tag{104}$$

で与えられ，集合 $\{|\tau,\epsilon\rangle\rangle\}$ は完全正規直交系を張る．

次に，演算子$\hat{T}$に時間発展を考える．Thermofield Dynamics において，演算子の時間発展は

$$\frac{d}{dt}A = i[\hat{\mathcal{H}}, A], \tag{105}$$

で与えられるので，(103) より次の式が得られる．

$$\frac{d}{dt}\hat{T} = i[\hat{\mathcal{H}}, \hat{T}] = 1\,. \tag{106}$$

この式から，次の関係式が成り立つ．

$$d\tau_t = dt\,. \tag{107}$$

ここで，τ_tは演算子$\hat{T}$の期待値である．$\tau_t = \langle\hat{T}(t)\rangle$．この関係式は，時間 t の進み dt と，$\hat{T}$ の期待値の時間間隔 dt のにおける変化分 $d\tau_t$が等しいことを表わしている．また，時間の原点 (或は，初期状態) を適当に選ぶことによって，$\tau_t = t$ とできる．以上のことから，演算子$\hat{T}$は時間演算子の意味を持っていることがわかる．さらに，(103) から不確定性関係

$$\Delta\tau\Delta E \geq \frac{1}{2}, \tag{108}$$

が得られる．この関係式は時間–エネルギー不確定性関係に対応している．

以上のことから，連続スペクトルに対する相対数状態を用いることによって時間演算子$\hat{T}$を定義することができた．時間演算子$\hat{T}$は系のエネルギー演算子ではなく，時間発展 generator に共役な演算子として定義された．この点に関してこの節で展開した理論は，Prigogine–Misra の理論 [24, 25] と同等なものであり，演算子$\hat{T}$は彼らの言うところの内部時間である．我々は，相対粒子数状態を用いて時間演算子の具体的な構成方法を示したのである．Prigogine–Misra の理論に従えば，エントロピー演算子等も導入することができる．ここで強調しておきたいことは，量子光学における位相演算子，Thermofield Dynamics の枠組みにおけるコヒーレンスの時間発展，そして Prigogine–Misra の理論における時間演算子，これらすべてが相対粒子数状態という共通の基礎の上に構築できるということである．

6 まとめ

本報告では，相対粒子数状態に基づく位相演算子理論の基礎的な事項を説明し，量子光学における位相変数の量子力学的取り扱いの問題や Thermofield Dynamics への応用，更に時間演算子の定義に関する問題を取り扱った．RNS 位相演算子理論の応用としては，光子数の非破壊測定や光子数のスクィージング，更に干渉計における光子の非古典的状態の解析等の量子光学の問題や，Thermofield Dynamics におけるコヒーレンスの減衰の解析等 [26] が考えられる．また，微小接合容量を持つ Josephson 接合における位相変数の量子化も問題にも応用できる [27]．これらの問題は現在進行中であり，別の機会に報告したい．

参考文献

[1] P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. London, Ser.**A109** (1925) 642.

[2] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation*, Oxford University Press (1954).

[3] R. Loudon, *The Quantum Theory of Light*, Oxford University Press (1973).

[4] M. Kitagawa and Y. Yamamoto, Phys. Rev. **A34** (1986) 3974.

[5] Y. Yamamoto, S. Machida, N. Imoto, M. Kitagawa and G. Björk, J. Opt. Soc. Am. **B4** (1987) 1645.

[6] N. Imoto, H. A. Haus and Y. Yamamoto, Phys. Rev. **A32** (1985) 2287.

[7] L. Susskind and J. Glogower, Physics **1** (1964) 49.

[8] P. Carruthers and M. M. Nieto, Rev. Mod. Phys. **40** (1968) 411.

[9] M. Ban, J. Math. Phys. **32** (1991) 3077.

[10] M. Ban, J. Opt. Soc. Am. **B9** (1992) 1189.

[11] M. Ban, Phys. Lett. **A155** (1991) 397.

[12] M. Ban, Physica **179A** (1991) 103.

[13] M. Ban, "*Phase Operator in Quantum Optics*", Phys. Lett. **A** (1992) submitted .

[14] D. T. Pegg and S. M. Barnett, Europhys. Lett. **6** (1988) 483.

[15] S. M. Barnett and D. T. Pegg, J. Mod. Opt. **36** (1989) 7.

[16] D. T. Pegg and S. M. Barnett, Phys. Rev. **A39** (1989) 1605.

[17] S. M. Barnett and D. T. Pegg, Phys. Rev. **A41** (1990) 3427.

[18] Y. K. Tsui and F. Reid, Phys. Rev. **A46** (1992) 549.

[19] M. Ban, Opt. Commun. (1992) in press.

[20] Y. Takahashi and H. Umezawa, Collect. Phenom. **2** (1975) 55.

[21] N. P. Landsman and Ch. G. Weert, Phys. Rep. **145** (1987) 141.

[22] T.Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[23] T.Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 53.

[24] B. Misra, I. Prigogine and M. Courbage, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **76** (1979) 4768.

[25] I. Prigogine, *From Being to Becoming*, Freeman and Company, San Francisco, 1984.

[26] M. Ban, Found. Phys. Lett. (1992) in press.

[27] M. Ban, Phys. Lett. **A152** (1991) 223.