

ミクロなレーザー方程式の厳密解

お茶の水大・人間文化 内山 智香子

お茶の水大・理・物理 柴田 文明

1. 序

レーザーは非平衡開放系の典型例であり、30年以上にわたる研究の歴史を持つ。これまで、初期のメーザーに対する古典的線形理論 (Shimoda, Takahashi, Townes) [1] に始まり、レーザー発振に関する半古典論 [2]、さらには揺らぎの効果を取り入れた半古典論 (フォッカー・プランク型の方程式) [3] がまず展開された。量子論的レーザー理論については、演算子を用いたランジュバン方程式の方法 [4]、光子数の固有状態を基底としたマスター方程式の方法 [5]、そして量子論的確率分布関数の方法 [6-8] など、様々な定式化がなされている。その後の発展を含めてレーザー理論は標準的なテキストに詳述されている [9-13]。これらの文献を眺めれば分かることだが、理論の全体は甚だ複雑な構成となっており (例えば、文献 7 を見よ)、基礎方程式に様々な近似を施し、それを数値的に解くことでレーザーの発振、及び飽和効果が論じられている。様々な近似とは、物質系の緩和時間は短いと考え、その変数を断熱的に消去するとか、あるいは、非線形項の大部分を捨てさるようなことを指す。

しかしながら、物質系と光子系との連立した量子論的な非線形方程式を揺動力と共に解くことには、今まで誰も成功していない。

一方、実験技術の進歩により、最近では容易にレーザー光を得ることができるようになった。しかし、それぞれが散逸機構を持っている原子系と光子系が強く相互作用している場合、系がどのようにして平衡状態から遠く隔たった定常状態へ落ち着き、レーザー光を放出し続けるのか、という基礎的ではあるが興味深い問題の厳密な取り扱いが、未だ手付かずのままである。上述のような、既存のレーザー理論では数多くの近似が為されているために、たとえば、定常発振に至るまでの短時間での振る舞い、また、原子系と光子系とが強く結合している場合を、正しく記述することができないからである。問題を扱う際の困難は、レーザーがミクロな非平衡結合開放系であり、かつ動的振る舞いを解析的に解かねばならないという点にある。

現在までの状況は、上述のごとくであるが、最近にいたって我々はミクロなレーザー方程式を厳密に解くことができた。この解を用いると、通常のレーザー作用はもとより、強結合状態での発振作用、短時間領域における過渡現象、といった多彩な局面の詳細を、全て統一的に理解できる。のみならず、初期時刻には位相がばらばらであった多くの原子が、フォトンに仲立ちとする相互作用を行うにつれて位相を揃え、コヒーレントな光を放出するまで

の機構(位相の自己組織化過程)や超放射現象も我々の定式化の延長線上にある。また、レーザー・カオスが近年話題となっているが、得られた厳密解を用いれば、量子散逸系におけるカオスに対する知見を得ることもできよう。レーザー系に限らず、化学反応のランダウ・ツェナー模型、局在電子格子系における非線形光学現象、ミューオン・スピン緩和(ゼロ磁場共鳴)現象等も我々の方法論で取り扱うことができるであろう。

以下では、2節でレーザー系の基本方程式について述べた後、3節でその厳密な解法、4節で物理量の平均値との関わり、5節で計算結果の具体的例について述べ、6節では本研究をまとめ、今後の課題を指摘しよう。

2. 基本方程式

レーザーは原子から誘導放出される光を用いて、位相の揃った光を共振器内で増幅し、コヒーレントな光を得る装置である。レーザー作用は、

- (1) 原子の反転分布を生成する機構(ポンピング)及び緩和機構、
- (2) レーザー光を放出する原子と電磁場との相互作用、
- (3) 共振器内の電磁場の減衰、

の3点に強く依存している。そこで、レーザー系のモデルを次のように設定する(1図)。まず、共振器内に置かれた活性原子の準位のうち、レーザー作用に直接関与する2準位のみを考える。(1)の機構を考慮に入れるために、この2準位原子がポンピングと緩和の両方を引き起こす役割を持つ"熱浴"と接触しているものとする。(2)については、この2準位原子と共振器内のある1つのモードの光子とが強く相互作用するものとする。さらに、この光子も熱浴と接触させることにより、(3)の機構を取り入れることにする。

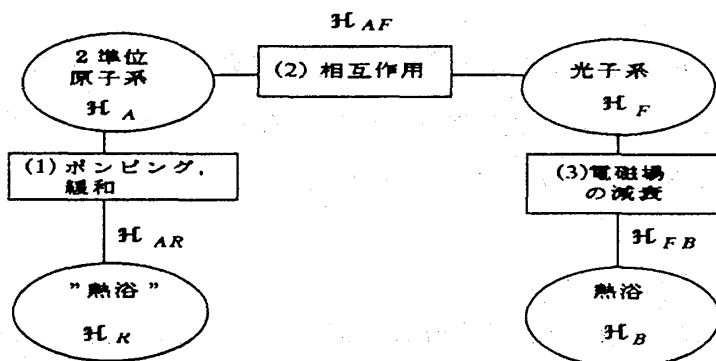


図1 レーザー系のモデル

** 量子論的リウビル方程式 **

このモデルにおいて、全系の密度演算子 $W(t)$ の時間発展は、リウビル方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t) = \frac{1}{i\hbar} [\mathcal{H}, W(t)] \quad (1)$$

によって記述される。ここで、ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_B + \mathcal{H}_{AF} + \mathcal{H}_{AR} + \mathcal{H}_{FB}, \quad (2)$$

であるものとし、系を構成している各部分のハミルトニアンを、原子系 \mathcal{H}_A 、光子系 \mathcal{H}_F とし、次のように定義する。

$$\mathcal{H}_A = \hbar\omega_0 S_z, \quad (3a)$$

$$\mathcal{H}_F = \hbar\omega_l b^+ b, \quad (3b)$$

(3a,b) 式において、 $\hbar\omega_0$ は 2 単位間のエネルギー差、 $\hbar\omega_l$ は注目している光子のエネルギーを表す。また、原子系に接触する "熱浴" のハミルトニアンを \mathcal{H}_R 、光子系に接触する熱浴を \mathcal{H}_B とする。原子系と光子系との相互作用 \mathcal{H}_{AF} 、原子系と "熱浴" との相互作用 \mathcal{H}_{AR} 、光子系と熱浴との相互作用 \mathcal{H}_{FB} の定義は、以下の如くである。

$$\mathcal{H}_{AF} = \hbar\Delta (bS_+ + b^+ S_-), \quad (3c)$$

$$\mathcal{H}_{AR} = \hbar g_R \mathbf{S} \cdot \mathbf{R}, \quad (3d)$$

$$\mathcal{H}_{FB} = \hbar g_B (b^+ B + b B^+), \quad (3e)$$

ここで、 Δ は原子系と光子系との相互作用の強さ、 g_R は原子系と "熱浴" との相互作用の強さ、 g_B は光子系と熱浴との相互作用の強さを表す。特に、原子系と光子系との相互作用に対しては、回転波近似を施したものをを用いている。

** 量子論的マスター方程式 **

(1) 式によって全系の時間発展が記述されるのだが、注目しているのは原子系と光子系であって、それぞれが接触している熱浴変数の時間発展の詳細を知る必要はない。このような場合の常套手段として、射影演算子の方法がある [14]。この方法は、熱浴との相互作用の影響は取り入れつつ、熱浴についての情報を縮約するものである。通常、熱浴はカノニカル分布をしているとして射影を行い、注目する変数の時間発展を知る。2つの熱浴についての

情報を縮約した後の密度演算子を新たに

$$\rho(t) \equiv Tr_R Tr_B W(t), \quad (4)$$

とすると(ここで、 Tr_R , Tr_B は熱浴 R, Bについての対角和をとることを意味する)、この密度演算子の時間発展を記述する量子論的マスター方程式

$$i\hbar \dot{\rho}(t) = [\mathcal{H}_A + \mathcal{H}_F + \mathcal{H}_{AF}, \rho(t)] + \Gamma_F \rho(t) + \Gamma_A \rho(t), \quad (5)$$

を得る。ここで、 \mathcal{H}_A , \mathcal{H}_F , \mathcal{H}_{AF} の定義は(3a,b,c)であり、また、

$$\Gamma_A X \equiv \phi_{+-} [S_+ X, S_-] + \phi_{-+} [S_- X, S_+] + \phi_{zz} [S_z X, S_z] + h.c., \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_F X \equiv & -i\delta\omega [b^* b, X] + \kappa \{ [b, X b^*] + [b X, b^*] \} \\ & + 2\kappa \bar{n} [b, [X, b^*]], \end{aligned} \quad (6b)$$

とする。(6a)式中の係数 $\phi_{\mu\nu}$ は、原子系の減衰を特徴付けており、原子系が接触している”熱浴”Rの相関関数を用いて表される量である：

$$\phi_{+-} \equiv \frac{g_R^2}{4} \int_0^\infty dt e^{-i\omega_0 t} \langle R_+(t) R_-(0) \rangle_R, \quad (7a)$$

$$\phi_{-+} \equiv \frac{g_R^2}{4} \int_0^\infty dt e^{i\omega_0 t} \langle R_-(t) R_+(0) \rangle_R, \quad (7b)$$

$$\phi_{zz} \equiv g_R^2 \int_0^\infty dt \langle R_z(t) R_z(0) \rangle_R, \quad (7c)$$

ここで、

$$\langle \dots \rangle_R \equiv Tr_R (\rho_R \dots), \quad (7d)$$

$$\rho_R \equiv e^{-\beta \mathcal{H}_R} / Tr_R e^{-\beta \mathcal{H}_R}, \quad R(t) \equiv e^{i\mathcal{H}_R t/\hbar} R(0) e^{-i\mathcal{H}_R t/\hbar}, \quad (7e)$$

である[15]。また、電磁場の減衰と振動数のシフトを特徴付けるパラメータ κ , \bar{n} , $\delta\omega$ は、

$$\kappa + i\delta\omega \equiv g_B^2 \int_0^\infty dt e^{i\omega_0 t} \langle [B(t), B^*(0)] \rangle_B, \quad (8a)$$

$$\kappa \bar{n} \equiv g_B^2 \operatorname{Re} \int_0^\infty dt e^{i\omega_1 t} \langle B^\dagger(0) B(t) \rangle_B \quad (8b)$$

$$\bar{n} \equiv \frac{1}{e^{h\omega_1/kT} - 1}, \quad (8c)$$

と定義してある [11]。(8) に現われる平均操作は、(7b) 式の R を B で置き換えたものである。以下では、光子系のエネルギーを $\delta\omega$ だけずれた角振動数 $\omega_L \equiv \omega_1 + \delta\omega$ を用いて表すことにする。

**** フォッカー・プランク方程式 (C数空間への移行) ****

(5) 式は演算子に対する方程式であるため、そのままでは解析的な取り扱いは不可能であろう。そこで、(5) 式を C 数空間に移行する。それには、コヒーレント状態を用いるのが便利である。これまでも、コヒーレント状態を用いたさまざまな定式化があるが [6-12]、ある段階で、断熱消去をはじめとするさまざまな近似が必ずなされている。ここでは、基本方程式 (5) を近似することなく C 数空間に移行するために、光子系に対してはボソンのコヒーレント状態を、原子系に対してはスピンのコヒーレント状態 [16,17] を適用する。

C 数空間に移行する際に用いたコヒーレント状態をあからさまに書けば、

$$|\theta, \phi; \beta\rangle \equiv |\theta, \phi\rangle \otimes |\beta\rangle \quad (9)$$

となる。ここで、 $|\theta, \phi\rangle$ は大きさ $1/2$ のスピンのコヒーレント状態を、 $|\beta\rangle$ はボソンのコヒーレント状態を表す。このコヒーレント状態を用いて、Normal mapping

$$F(t) \equiv \langle \theta, \phi; \beta | \rho(t) | \theta, \phi; \beta \rangle, \quad (10)$$

を施すことにより、次のようなフォッカー・プランク方程式を得る。

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t) = (\Psi_A + \Psi_{AF} + \Psi_F) F(t) \quad (11)$$

(11) 式において、

$$\Psi_A \equiv -i\omega_0 L_z - \frac{1}{2T_1} L^2 + \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) L_z^2 - i \frac{\sigma_0}{T_1} (\mathbf{L} \times \mathbf{M})_z, \quad (12a)$$

$$\Psi_{AF} = -i[\Delta\beta L_+ + \Delta\beta^* L_- + \Delta \frac{\partial}{\partial\beta^*} (\frac{1}{2}L_+ + M_+) - \Delta \frac{\partial}{\partial\beta} (-\frac{1}{2}L_- + M_-)] \quad (12b)$$

$$\Psi_F = (-i\omega_L + \kappa) \frac{\partial}{\partial\beta^*} \beta^* + (i\omega_L + \kappa) \frac{\partial}{\partial\beta} \beta + 2\kappa(\bar{n} + 1) \frac{\partial^2}{\partial\beta^* \partial\beta} \quad (12c)$$

である。(12a) 式中の L は "角運動量演算子" を、 T_1 は原子系の縦緩和時間、 T_2 は横緩和時間、 σ_0 はポンピングパラメータを表しており、以下のように定義する [18]。

$$\frac{1}{T_1} = 2\text{Re}(\phi_{+-} + \phi_{-+}^*) \quad (13a)$$

$$\frac{1}{T_2} = 2\text{Re}\phi_{zz} \quad (13b)$$

$$\sigma_0 = -\tanh(\hbar\omega_0/2k_B T) \quad (13c)$$

(13c)式は揺動散逸定理より定められた量であり、原子系と光子系との相互作用を切り離れたときの、原子系の定常状態における2準位の占有数の差に比例する。 T は原子系の接触している "熱浴" の温度である。通常、 T は正であり、原子のエネルギー状態は最終的に下準位に多く分布する様になる。しかし、負の T をとれば、原子のエネルギー状態を反転させることができる。 σ_0 をポンピングパラメータと呼ぶ所以である。また、(12a,b)式に現われる

M, m は

$$M = J m - \frac{i}{2} m \times L \quad (13d)$$

$$m = (\sin\theta \cos\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\theta) \quad (13e)$$

と定義されている。

(12b,c) 中の β はボソンのコヒーレント状態の固有値である。すなわち、

$$b|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle \quad (14)$$

ここで、後で便利なように(12) 式中の β を、 $\beta = \sqrt{(\bar{n}+1)\xi} e^{-i\psi}$ として書き換える。特に(12c) 式は、

$$\Psi_F = -\omega_L \frac{\partial}{\partial \psi} + \kappa [(\xi+2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4\xi} \frac{\partial^2}{\partial \psi^2}] \quad (12c')$$

となる。(12c') 式を見るとラゲールの微分方程式との関連が想起されよう。このことは、以後の展開で重要な役割を演ずることとなる [付録 (a9) 式参照]。

こうして、原子系及び光子系に対するコヒーレント状態を用いることにより、レーザー系の基本方程式を、近似することなくフォッカープランク方程式に移行することができた。C 数空間に移行してはいるものの、演算子の交換関係などの量子効果に関する情報はすべて微分演算子として残っている。

3. 解析解

(12) 式に於て、原子系に対しては "角運動量演算子" が、光子系に対しては (12c') の演算子が演算されている。この基本方程式を解くために、球関数とエルミト関数を用いた試みがある [19]。しかし、非常に複雑な理論となって解析解は得られない。

そこで我々は(11) 式を解析的に解くために、 $F(t)$ の原子系部分を展開するには球関数を [18]、光子系部分を展開するにはラゲール多項式とフーリエ級数を用いて [20]、次のような直交関数展開を行う：

$$F(t) \equiv \sum_{l=0}^{2J} \sum_{m=-l}^l \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{l,n}^{m,k}(t) Y_l^m(\theta, \phi) \Phi_n^k(\xi), \quad (15)$$

$$\Phi_n^k(\xi) \equiv \xi^{|k|/2} L_n^{|k|}(\xi) e^{-\xi} e^{ik\psi}, \quad (16)$$

ここで、 $Y_l^m(\theta, \phi)$ は球関数、 $L_n^{|k|}(\xi)$ はラゲールの随伴多項式を表している。

それぞれの関数系の直交関係 (付録 a) を用いて (11) 式の展開係数間の関係を調べると、ラゲールの随伴多項式の次数を示すサフィックス n 以外は、以下のベクトルの各要素間で

で閉じていることが分かった。

$$x_n = \left[\frac{1}{2} C_{0,n}^{0,-1}(t), \frac{\sqrt{3}}{2} C_{1,n}^{0,-1}(t), \sqrt{\frac{3}{2}} C_{1,n}^{-1,0}(t), \sqrt{\frac{3}{2}} C_{1,n}^{1,-2}(t) \right], \quad (17a)$$

$$z_n = \left[\frac{1}{2} C_{0,n}^{0,0}(t), \frac{\sqrt{3}}{2} C_{1,n}^{0,0}(t), \sqrt{\frac{3}{2}} C_{1,n}^{-1,1}(t), \sqrt{\frac{3}{2}} C_{1,n}^{1,-1}(t) \right]. \quad (17b)$$

そして、残されたラゲール展開の次数 n については以下の3項関係式

$$\dot{x}_n = \underline{p}_n x_{n-1} + \underline{q}_n x_n + \underline{r}_n x_{n+1}, \quad (18a)$$

$$\dot{z}_n = \underline{P}_n z_{n-1} + \underline{Q}_n z_n + \underline{R}_n z_{n+1}, \quad (18b)$$

が成り立っている。

式(18)中の係数行列の行列要素は、それぞれ、原子系の緩和時間 T_1 , T_2 、ポンピング強度 σ_0 、原子系と光子系の相互作用の強さ Δ 等を用いて表されている：

$$\underline{p}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2}n\eta \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{i}{2}n(\eta - 2\zeta) \\ in\eta & -in(\eta - 2\zeta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19a)$$

$$\underline{q}_n = \begin{bmatrix} \Xi_1 & 0 & \frac{i}{2}\eta & 0 \\ \frac{\sigma_0}{T_1} & \Xi_1 - \frac{1}{T_1} & \frac{i}{2}(\eta - 2\zeta) & -i\zeta(n+2) \\ 0 & -2i(n+1)\eta & \Xi_2 & 0 \\ -in & i(\eta - 2\zeta) & 0 & \Xi_3 \end{bmatrix}, \quad (19b)$$

$$\underline{r}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\zeta & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (19c)$$

$$\mathbf{P}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{i}{2}n\eta & -\frac{i}{2}n\eta \\ 0 & 0 & -\frac{i}{2}n(\eta - 2\zeta) & -\frac{i}{2}n(\eta - 2\zeta) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (20a)$$

$$\mathbf{Q}_n = \begin{bmatrix} -2n\kappa & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sigma_0}{T_1} & -2n\kappa - \frac{1}{T_1} & -i\zeta(n+1) & -i\zeta(n+1) \\ -\frac{i}{2}\eta & -i(\eta - 2\zeta) & \Xi_4 & 0 \\ -\frac{i}{2}\eta & -i(\eta - 2\zeta) & 0 & \Xi_4 \end{bmatrix}, \quad (20b)$$

$$\mathbf{R}_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i\zeta & 0 & 0 \\ 0 & 2i\zeta & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20c)$$

ここで、 $\eta \equiv \frac{\Delta}{\sqrt{1+n}}$ 、 $\zeta \equiv \Delta \cdot \sqrt{1+n}$ であり、 $\Xi_k (k=1,2,3,4)$ は

$$\Xi_1 \equiv i\omega_L - \kappa(2n+1), \quad (21a)$$

$$\Xi_2 \equiv i\omega_0 - 2n\kappa - \frac{1}{T_2}, \quad (21b)$$

$$\Xi_3 \equiv -i(\omega_0 - 2\omega_L) - 2\kappa(n+1) - \frac{1}{T_2}, \quad (21c)$$

$$\Xi_4 \equiv i(\omega_0 - \omega_L) - \kappa(2n+1) - \frac{1}{T_2}, \quad (21d)$$

と定義してある。

** 連分数解 **

直交関数展開して得られた関係式(18)は、3項間のみで閉じている。これは、甚だ特殊な結果で、普通はこうはいかない。今回、光子系部分を展開する際にラゲールの随伴多項式とフーリエ級数を選んだことによってはじめて、このような簡単な表式が得られたのである。Arimitsu-Shibata [19] らによる定式化は、同様な道筋を辿っているが、ラゲールの随伴多項式のかわりにエルミト関数を用いたために、彼らの得た表式は、甚だ複雑なものである。

さて、(18)式の3項関係式は、ラプラス変換を施すと、連分数の形に表すことができる(詳しい漸化式は付録b) :

$$a_0[s] = \frac{I}{s \cdot I - B_0 - B_0^+ \frac{I}{s \cdot I - B_1 - B_1^+ \frac{I}{s \cdot I - B_2 \dots B_2^-} B_1^-} B_1^-} \times [a_0(0) + B_0^+ \frac{I}{s \cdot I - B_1 - B_1^+ \frac{I}{s \cdot I - B_2 - B_2^+ \frac{I}{s \cdot I - B_3 \dots B_3^-} B_2^-} B_2^-} \times [a_1(0) + B_1^+ \times \dots$$

(22)

ここで、

$$a_n[s] \equiv \int_0^{\infty} dt a_n(t) e^{-st}, \quad (23)$$

であり、(18a) (18b) のそれぞれに対応して、次のような置き換えをすればよい。

$$a_n \rightarrow x_n, B_n^- \rightarrow \underline{p}_n, B_n \rightarrow \underline{q}_n, B_n^+ \rightarrow \underline{r}_n, \quad (24a)$$

$$a_n \rightarrow z_n, B_n^- \rightarrow \underline{P}_n, B_n \rightarrow \underline{Q}_n, B_n^+ \rightarrow \underline{R}_n. \quad (24b)$$

これまでレーザー系を厳密に解くことは不可能だと思われていたのだが、我々は解析解を以上のようなあからさまな連分数の形に得ることができた。

4. 平均値

次に、物理量 G の平均値を求めよう。原理的には、

$$\langle G \rangle_t = Tr_A Tr_F G W(t), \quad (25)$$

という操作をすればよい。ここで、 Tr_A は原子系についての対角和、 Tr_F は光子系についての対角和を表す。コヒーレント状態によって C 数空間に移行させた場合には、対角和は積分で表される[17] :

$$\langle G \rangle_t = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \cdot \left(\frac{\bar{n}+1}{2\pi}\right) \int_0^\infty d\xi \int_0^{2\pi} d\psi G^{(A)} F(t), \quad (25')$$

ただし、 $G^{(A)}$ は物理量 G の anti-normal mapping をとることを示し、また、原子系は 2 準位系である場合に限った。

(25) 式によれば、例えば、原子系の物理量を表すスピニ演算子の平均値を実際に求めることができ、

$$\langle S_{\pm} \rangle_t = \frac{2(\bar{n}+1)}{\sqrt{4\pi}} \times (\pm\sqrt{\frac{3}{2}} C_{1,0}^{\mp 1,0}(t)), \quad (26a)$$

$$\langle S_z \rangle_t = \frac{2(\bar{n}+1)}{\sqrt{4\pi}} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} C_{1,0}^{0,0}(t)\right), \quad (26b)$$

となる。また、光子の演算子の平均値も同様に計算できる。

$$\langle b^+ \rangle_t = \frac{2(\bar{n}+1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \times C_{0,0}^{0,-1}(t), \quad (27a)$$

$$\langle b^+ b \rangle_t = \frac{(\bar{n}+1)}{\sqrt{\pi}} \times (-(\bar{n}+1) C_{0,1}^{0,0}(t) - \bar{n} C_{0,0}^{0,0}(t)), \quad (27b)$$

従って、これらの物理量の平均値は、比較的低次の展開係数で簡単に表すことができることが分かった。さらに、都合がよいことには、(26), (27) 式にあらわれる展開係数は、すべて (17a,b) 式の $n=0$ の場合のベクトルの要素となっているのである！ そこで、スペクトルを得たい場合には (22) 式を計算すればよいし、平均値の時間発展を知りたい場合にはその逆変換をすればよい。あるいは、(18a,b) 式を数値的に解いてもよい。具体的な計算を行ったので、その結果を次に示そう。

5. 計算結果の具体例

初期時刻に、原子系は下単位にあり、光子系には全く光子が存在していない、

$$W(t=0) = |\beta_0\rangle\langle\beta_0| \otimes |\theta_0, \varphi_0\rangle\langle\theta_0, \varphi_0|, \quad (28)$$

$$\beta_0 = 0, \quad \theta_0 = \pi, \quad \varphi_0 = 0$$

という初期条件から出発したときの原子系の反転分布 $\langle S_z \rangle_t$ と、光子数 $\langle b^\dagger b \rangle_t$ の時間変化を追ってみた。

図2は、 $\kappa \ll \Delta \ll 1/T_1, 1/T_2$ ($\kappa T_1 = 0.05, \kappa T_2 = 0.1, \Delta/\kappa = 7.5$) の場合に、ポンピングのパラメータ σ_0 を -0.8 から 0.8 まで変化させたときの結果である。時間軸は、 κ^{-1} でスケールしてある。定性的には、原子系の反転分布も光子数も時間が経つにつれてある定常値に近づいていく。 σ_0 が大きくなるとともに、定常値は大きくなっていく。特に、 σ_0 が 0.4 と 0.8 の場合には、反転分布の定常値は正の値を取っており、(28) 式のような厳しい初期条件から出発しても、定常的な光の発振が見られる。

図3は、原子系と光子系の結合強度 Δ を大きくしたとき ($\kappa \ll 1/T_1, 1/T_2 \ll \Delta$) の図である。短時間領域で振動が現われ、原子系と光子系の間で、エネルギーをやり取りしている様子がよく分かる。最近、ピコ秒、フェムト秒のパルスが発生させることによって、超高速光学現象を観測することが行われている。ピコ秒、フェムト秒といった短時間領域では、図2のような過渡的な発振状態にあるはずである。ここで行った定式化にさらに工夫を加え、超短パルスの発生に関する知見を得ることもできよう。

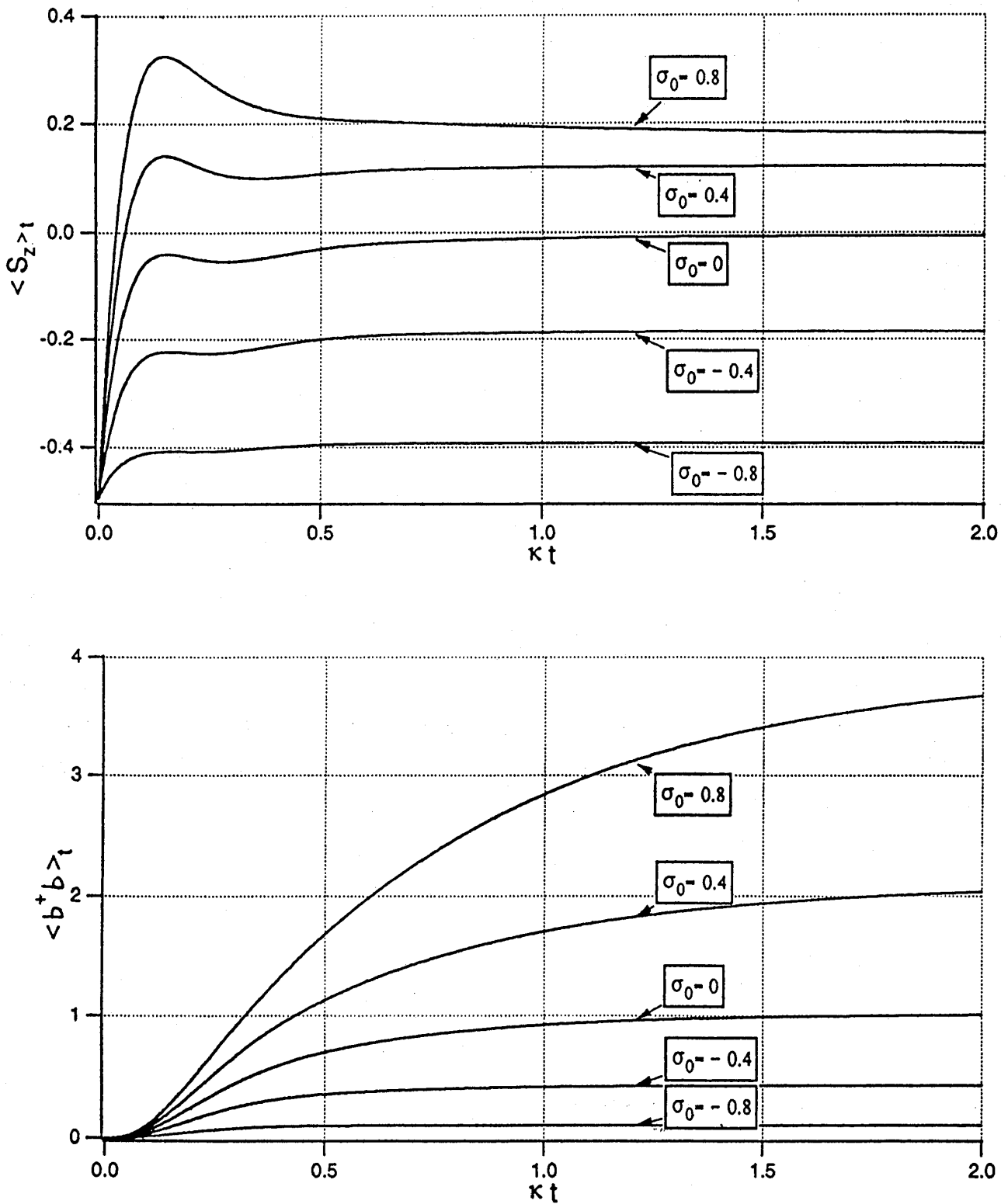


図2 $\kappa \ll \Delta \ll 1/T_1, 1/T_2$ ($\kappa T_1 = 0.05, \kappa T_2 = 0.1, \Delta/\kappa = 7.5, -0.8 \leq \sigma_0 \leq 0.8$) の場合の原子系の反転分布 $\langle S_z \rangle_t$ と、光子数 $\langle b^\dagger b \rangle_t$ の時間変化

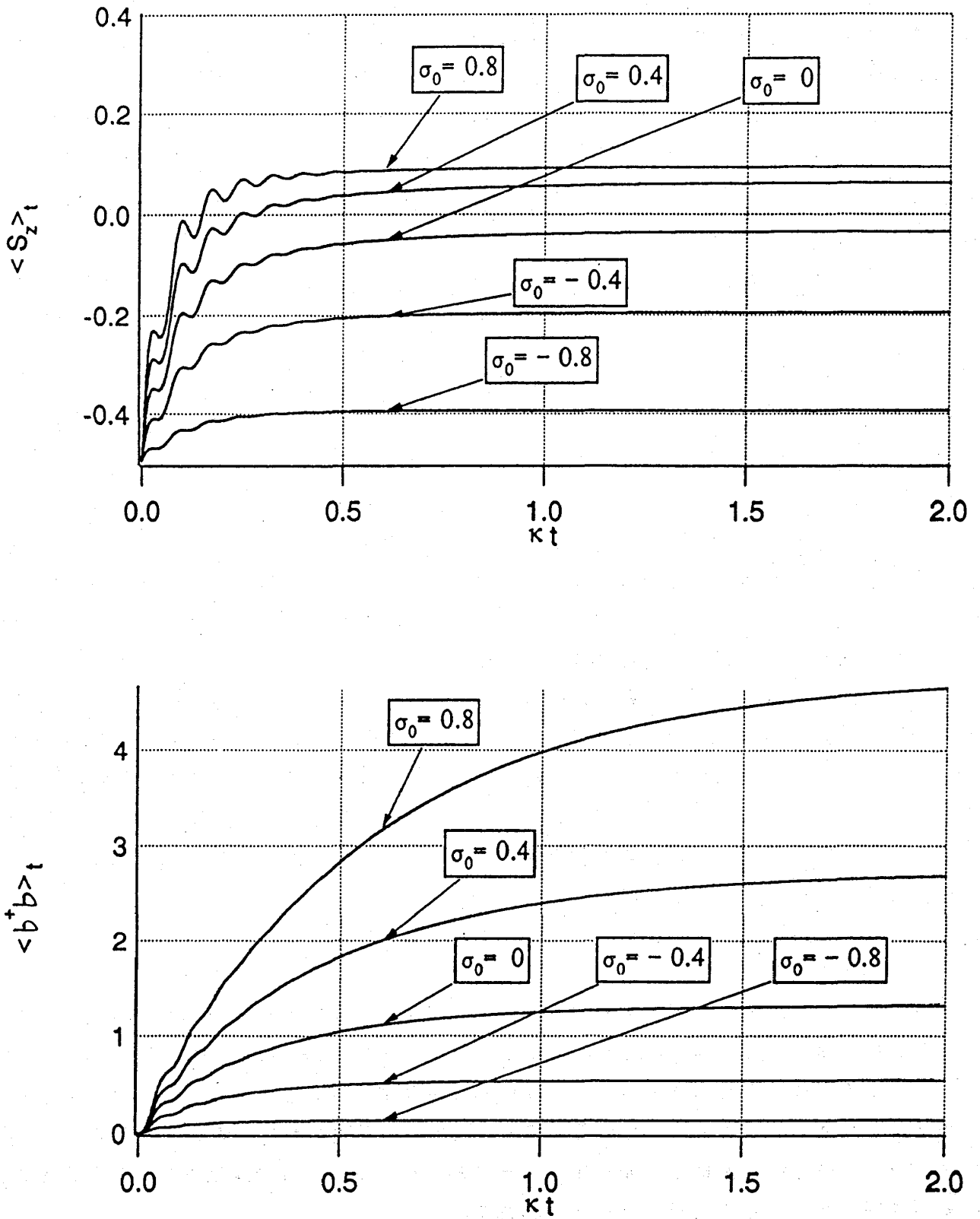


図3 $\kappa \ll 1/T_1, 1/T_2 \ll \Delta$ ($\kappa T_1 = 0.05, \kappa T_2 = 0.1, \Delta/\kappa = 50, -0.8 \leq \sigma_0 \leq 0.8$) の場合の原子系の反転分布 $\langle S_z \rangle_t$ と、光子数 $\langle b^+ b \rangle_t$ の時間変化

6. まとめと今後の課題

従来の量子論的レーザー理論の定式化を見ると、甚だ複雑なことになっており、数々の近似を施した末にようやくある極限での振る舞いを得ることができる程度だった。しかし、我々は前節までに述べた幾つかの工夫をすることにより、厳密な解析解を得ることができた。得られた表式により、通常のレーザー作用はもとより、短時間領域における過渡現象、強結合の発振現象などを統一的に理解することができる。また、 σ_0 のスイッチングで超短パルスを発生させることもできる。今後、パラメータを系統的に変化させて、数値計算を詳細に行っていく予定である。

ここで行った定式化を基にした、幾つかの発展方向が考えられる。

(1) レーザーにおける位相の自己組織化過程

レーザー光が放出される過程では、ある原子から自然放出によって生じた光が別の原子に吸収されることにより、原子間に光子を媒介とした結合が生じ、この過程を通して原子系全体の位相が揃い、さらには放出されるレーザー光も位相の安定したコヒーレントなものとなる、という道筋を辿っているはずである。しかし、このシナリオを遂行した仕事は存在しない。我々がここで確立した方法論を基に、初期時刻には位相がばらばらであった多くの原子が、フォトンを仲立ちとする相互作用を行うにつれて位相を揃え、コヒーレントな光を放出するまでの機構（自己組織化過程）を、明らかにしたい。

今回は、原子1個に対する定式化を行い、4次元のベクトル方程式 [(18)式]、および解析解 [(22)式] を得たのだが、多原子の問題にも容易に拡張できる、という見通しを現在持っている。それは、原子の数が増えていくに従って、ベクトルの要素の数が増え、 N 個の原子からなる系に対しては、 $4N$ 次元のベクトルの連立方程式を解くか、または、連分数を計算すればよい、というものである。基礎的な定式化を行うと共に、数値計算を詳細に行っていく予定である。

(2) 超放射現象

レーザー系を多原子の問題に拡張できれば、位相の自己組織化のみならず、超放射のダイナミクスをも論じることができよう。超放射はコヒーレントに結合した原子系が全体として巨大スピンを形成し、このスピンの励起状態から倒れていくときに強い光パルスを発する現象であるが、通常、巨大スピンの形成と存在は初めから仮定されている。原子系において巨大スピンの形成される機構と、光パルス放出の動的なメカニズムの詳細を、(1)の定式化に基づき明らかにすることができると思われる。

(3) 量子系におけるカオス

近年、レーザー系におけるカオスが話題となっている。減衰定数を変調させたり[21]、非線形媒質を用いる[22]など、様々な実験方法によるレーザー・カオスの発生が報告されている。理論面でも盛んに研究が行われているが、定式化は全て古典系に限られている。今回得た表式を用いて、量子散逸系のカオスの発生について調べることも今後の課題の一つとしたい。殊に、強結合極限ではカオスの発生が期待されるため、詳細に検討する。レーザー・カオス発生の機構に関しては、この他にもポンピングパラメータ[23]あるいは減衰定数を変調するという方法が考えられ、この問題にも取り組んでいきたい。

(4) その他の問題

ここでの方法論が適用できる物理系はレーザー系のみにとどまらない。例えば、化学反応のランダウ・ツェナー模型がある[24]。これは、金属などの結晶表面に原子やイオンが飛んできて吸着する現象などに適用される、ミクロな準位交差に対する模型である。この模型によって、原子やイオンが金属結晶内のフォノンなどと相互作用して運動エネルギーを失っていき、最終的には結晶表面の原子と化学結合をつくる過程が記述される。これまで、フォノンとの相互作用は確率過程で記述されてきたが[25]、我々の方法を用いれば、フォノンをボソン演算子で記述した定式化を行い、量子効果を考慮に入れることも容易にできよう。

また、局在電子格子系における非線形光学現象も取り扱うことができる。これは、光励起を受けた電子が格子と相互作用することによって引き起こされる多彩な緩和現象であり、興味深い問題である。

さらに、ミューオン・スピン緩和(ゼロ磁場共鳴)現象等も我々の方法論を用いて、解析的に厳密に取り扱うことができる。この問題については、量子論的な揺動を受ける緩和過程を記述する厳密解を既に得ている。

以上のように、ここで確立した方法論は、非平衡開放系の典型例であるレーザー系を厳密に解析的に取り扱い、そのダイナミクスを明らかにすることができるだけでなく、様々な問題に適用することができる。これにより、ミクロな非平衡散逸結合系の動的構造を統一的に理解する視点を与えることができよう。

付録 a 球関数、ラゲール関数の直交関係[26]

球関数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ の直交関係：

$$\int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{l_1}^{m_1}(\theta, \varphi) Y_{l_2}^{m_2}(\theta, \varphi) = \delta_{l_1, l_2} \delta_{m_1, m_2} \quad (\text{a1})$$

ラゲール多項式 $L_n^k(x)$ の直交関係：

$$\int_0^\infty dx e^{-x} x^k L_n^k(x) L_m^k(x) = \frac{(n+k)!}{n!} \delta_{n, m} \quad (\text{a2})$$

ラゲール多項式 $L_n^k(x)$ に関する公式：

$$L_n^k(x) = L_n^{k+1}(x) - L_{n-1}^{k+1}(x), \quad (\text{a3})$$

$$x L_n^k(x) = -(n+1) L_{n+1}^k(x) + (2n+k+1) L_n^k(x) - (n+k) L_{n-1}^k(x), \quad (\text{a4})$$

$$x L_n^k(x) = -(n+1) L_{n+1}^{k-1}(x) + (n+k) L_n^{k-1}(x), \quad (\text{a5})$$

$$x \left[\frac{d}{dx} L_n^k(x) \right] = n L_n^k(x) - (n+k) L_{n-1}^k(x) \quad (n \geq 1) \quad (\text{a6})$$

$$\frac{d^r}{dx^r} L_n^k(x) = (-)^r L_{n-r}^{k+r}(x) \quad (r \leq n) \quad (\text{a7})$$

$$e^{-ax} = \frac{1}{(1+a)^{1+k}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{1+a} \right)^n L_n^k(x) \quad , \quad 0 \leq x \leq \infty \quad (\text{a8})$$

$$\begin{aligned} & \kappa [(\xi+2) \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{k^2}{4\xi}] \xi^{k/2} L_n^k(\xi) e^{-\xi} \\ & = -\kappa \left(n + \frac{|k|}{2} \right) \xi^{k/2} L_n^k(\xi) e^{-\xi} \quad (\text{a9}) \end{aligned}$$

付録 b 連分数解

$$a_n[s] = u_{n-1}[s] \cdot a_{n-1}[s] + v_n[s], \quad (\text{b1})$$

$$v_n[s] = [s \cdot I - B_n - B_n^+ u_n[s]]^{-1} [a_n(0) + B_n^+ v_{n+1}[s]], \quad (\text{b2})$$

$$u_{n-1}[s] = [s \cdot I - B_n - B_n^+ u_n[s]]^{-1} B_n^-, \quad (\text{b3})$$

$$a_{-1}[s] = 0, \quad a_N[s] = 0, \quad v_{N+1}[s] = 0. \quad (\text{b4})$$

参考文献

- [1] K.Shimoda, H.Takahashi, and C.H.Townes : J. Phys. Soc. Jpn. 12 (1957) 686.
- [2] W.E. Lamb Jr.: Phys. Rev. 134(1964)1429.
- [3] H.Risken : Z.Physik, 186(1965)85 ; 191(1966)302;
H.Risken and H.Vollmer : Z.Physik 201(1967)323 ; 204(1967)240.
- [4] H.Haken : Z. Phys. 181(1964)96 ; M.Lax: Phys.Rev. 145(1966)110.
- [5] M.O.Scully and W.E. Lamb Jr. : Phys. Rev. Lett. 16(1966)853 ;
M.O.Scully and W.E. Lamb Jr. : Phys. Rev. 159(1967)208.
- [6] J.P.Gordon : Phys. Rev. 161(1967)367.
- [7] H.Haken, H.Risken and W.Weidlich : Z Physik 206(1967)355;
M.Lax and H.Yuen : Phys. Rev.172(1968)362.
- [8] M.Lax and W.H.Louisell : IEEE J. QE-3 (1967) 47; Phys. Rev. 185 (1969) 568.
- [9] H.Haken : Laser Theory, Encyclopedia of Physics, vol. XXV/2c
(Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1970).
- [1 0] W.H.Louisell : Quantum Statistical Properties of Radiation (John Wiley & Sons, New York, 1973).
- [1 1] F.Haake : Springer Tracts Mod. Phys. No.66, 98 (Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1973).
- [1 2] M.Sargent III, M.O.Scully, and W.E. Lamb : Laser Physics
(Addison-Wesley, Reading, MA 1974).
- [1 3] H.Risken : The Fokker-Planck Equation (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1984, 1989).

- [1 4] S.Nakajima : Prog. Theor. Phys. 20 (1958)948 ;
R.Zwanzig : J. Chem. Phys.33 (1960)1338;
See also, S.Chaturvedi and F.Shibata : Z.Physik B 35 (1979)297;
F.Shibata and T.Arimitsu : J.Phys. Soc. Jpn. 49(1980)891.
- [1 5] 例えば次の文献を見よ N.Hashitsume, F.Shibata and M.Shingu : J. Stat.
Phys.17(1977)155 ; F.Shibata, Y.Takahashi and N.Hashitsume : ibid. 171.
- [1 6] J.M.Radcliff : J.Phys.A4 313(1971) ; F.T.Arecchi, E.Courtens, R. Gilmore and
H.Thomas : Phys. Rev. A6 (1972) 2211.
- [1 7] Y.Takahashi and F.Shibata : J. Phys. Soc. Jpn.,38 (1975) 656 ; J. Stat. Phys.
14 (1976) 49.
- [1 8] F.Shibata : J. Phys. Soc. Jpn., 49 (1980) 15; F.Shibata and M.Asou : ibid, 49
(1980)1234; 50 (1981)1846; 50 (1981)2481.
- [1 9] T. Arimitsu and F. Shibata : J. Phys. Soc. Jpn.,52 (1983) 772;
T.Arimitsu and Y.Takada : 53(1984)2233.
- [2 0] H.Risken, L. Schoendorff, and K. Vogel : Phys. Rev. A42 (1990) 4562;
J.Eiselt and H.Risken : Phys. Rev A43 (1991)346;
I.K.Mortimer and H.Risken : Phys. Rev. A44 (1991)617;
M.J.Werner and H.Risken :Phys. Rev. A44 (1991)4623.
- [2 1] J.R.TreDicce, F.T.Arrechi, G.P.Puccioni, A.Poggi, and W. Gadomski : Phys. Rev.
A34(1986)2073.
- [2 2] K.Ikeda, H. Daido and O.Akimoto : Phys. Rev. Let. 45(1980)709.
- [2 3] T.Ogawa : Doctor Thesis 1990 (Tokyo Univ.) ;
T.Ogawa : Phys. Rev. A37 (1988) 4286.
- [2 4] C.Zener : Proc. R. Soc. London, A137 (1932) 696.
- [2 5] Y.Kayanuma : J. Phys. Soc. Jpn. 53(1984)108 ; 118 ; ibid,54(1985)2037.
- [2 6] Z.X.Wang and D.R.Guo : Special functions (World Scientific, Sinfapore , NewJersey,
London, Hong Kong, 1989).