

素粒子のヤンミルズ・ヒッグス場理論におけるカオス

九州芸術工科大学 河辺哲次

1. はじめに

素粒子論の基礎を与えるヤンミルズ(Yang-Mills)場 (非可換ゲージ場) 理論は、物質の基本粒子クォークのダイナミクスを支配する。特に、ヤンミルズ場とヒッグス場が共存する系のカオス現象は、クォークの閉じ込め問題 (自然界に単独のクォークが存在しない謎)、格子ゲージ理論、素粒子の多重発生問題などに関連して議論されている。また、この系は、モノポールが局在するため、空間的に非均一であり、ハミルトン系の時空カオスのモデルとしても興味がある。

私達は、これまでにヤンミルズ場のウー・ヤン(Wu -Yang)・モノポール解のカオス構造を解析し¹⁾、さらに、より現実的な系であるヤンミルズ・ヒッグス(Yang-Mills-Higgs)系のトフーフト・ポリヤコフ('tHooft-Polyakov)・モノポール解を調べ、レギュラー (オーダー) 相とカオス相の二相が存在することを見出した²⁾。また、最近、一様な空間近似モデルを用いて、二相の力学的性質を解析した³⁾。このヤンミルズ・ヒッグス系は相対論的な超伝導体モデル (ギンツブルグ・ランダウ方程式) とも関係しており、レギュラー相とカオス相の二相及びその相転移構造は、物理的に興味がある。本研究では、これまでの解析法と結果を述べ、併せて、今後の課題や問題点などを議論した。

2. ヤンミルズ・ヒッグス系とモノポール解

SU(2)ヤンミルズ・ヒッグス系を記述するラグランジアンを次式で与える⁴⁾。

$$L = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a - V(\phi)$$

このモデルはSU(2)ゲージ理論の自発的対称性の破れの結果としてU(1)ゲージの電磁場を記述する。これから得られる場の方程式は、次の様な古典解を持つ⁵⁾。

ヤンミルズ場	$A_0^a = 0$ $A_i^a(\xi, \tau) = -v \varepsilon_{aij} \xi_j [1 - G(\xi, \tau)] \xi^{-2}$
ヒッグス場	$\phi_a(\xi, \tau) = -v \xi_a H(\xi, \tau) \xi^{-2}$

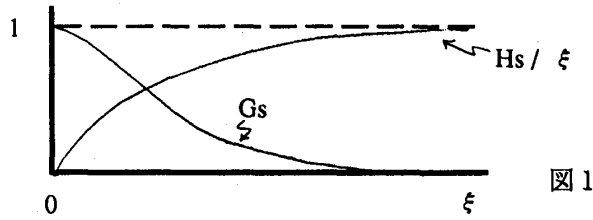
ここでGとHは次の場の運動方程式に従う。

(τ = 時間、 ξ = 距離)

$$\xi^2 (\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2) G = -H^2 G - G(G^2 - 1)$$

$$\xi^2 (\partial_\tau^2 - \partial_\xi^2) H = -2G^2 H - \kappa H(H^2 - \xi^2)$$

この系には、モノポール定常解 G_s, H_s が存在する (図1)。



3. 数値実験^{1, 2)}

この系は解析的には解けない無限自由度系なので、次の様なアプローチをとる。

Fermi-Pasta-Ulam法による
系の離散化

空間離散 $\xi = i \times a$
 $i = 1, 2, \dots, N$
 a = 格子間隔

N個の非線形振動子の系の
モード展開

$$G(i, \tau) = G_s(i) + \delta G(i, \tau)$$

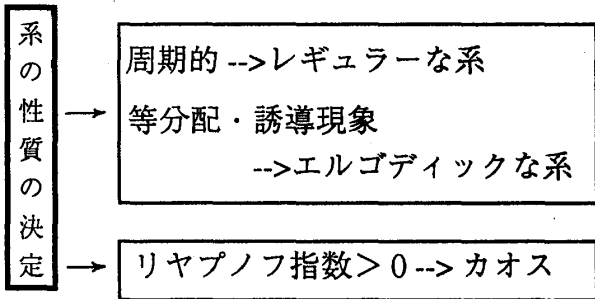
$$H(i, \tau) = H_s(i) + \delta H(i, \tau)$$

ゆらぎ $\delta G(i, \tau)$

$$\delta G(i, \tau) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{j=1}^{N-1} \psi_G(j, \tau) \sin\left(\frac{\pi i j}{N}\right)$$

モード間のエネルギー交換

E_j : j モードエネルギーの振舞

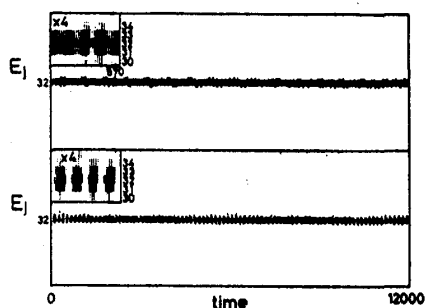


初期のゆらぎはヤンミルズ場だけに与える。特に、 $j = N/2$ モードのみを励起する。ゆらぎ（摂動）の強さを次式で定義する。

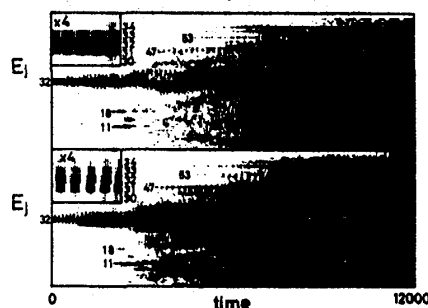
$$A \equiv \psi_G(j=\frac{N}{2}, \tau=0)$$

3—1. モード間のエネルギー分配 (図2)

計算は8次のRunge-Kutta法で行なう。図より明らかなように、ゆらぎが小さい場合、 $j=32$ の初期励起モードとその近傍だけが存在し、系はレギュラーである。他方、ゆらぎが大きい時は、すべてのモードが励起してエルゴディックな系になっている。



($A=0.1$ の場合： E_{32} とその周辺だけ励起される。上はヤンミルズ場、下はヒッグス場)



($A=1.5$ の場合： E_1 から E_{64} まで すべて励起される。)

図2 $N=64$, $\kappa=1.0$ の場合

3—2. 誘導現象の存在 (図3)

ある特定の基準振動（モード）だけを励起すると、しばらくの間は、そのモードだけが存在する。しかし、ある時間（誘導期間）過ぎると、カスケード的に他のモードにエネルギー移行を起こし、やがて、全てのモードが励起される事がある。これを、誘導現象と呼ぶ。図から明らかな様に、ゆらぎが大きい場合に、この現象が観測される。

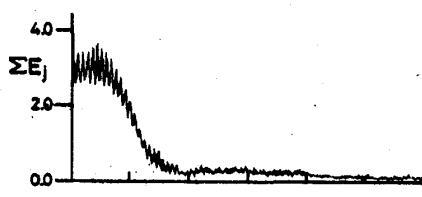


図3 $A=2.1$, $a=0.1$,
 $N=128$ の場合

3-3. 最大リヤプノフ指数 (図4)

エルゴディックな系は、必ずしもカオティックな系ではない。リヤプノフ指数 σ が正の一定値をとれば、系はカオスである。図より $A \geq A_c$ ($A_c \sim 1.0$) でカオス状態が現われている事が分かる。

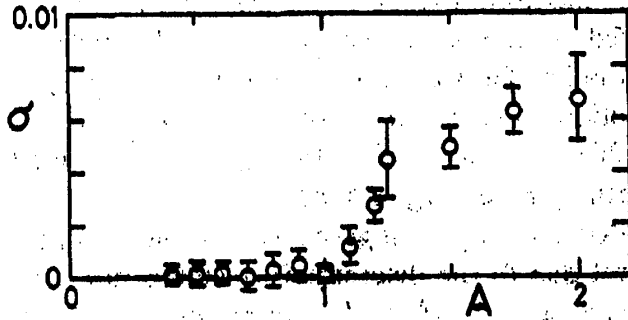


図4 $N=64, \kappa=1.0$ の場合

3-4. 場の配位の時間発展 (図5)

場の時間発展からモノポール・コアの内と外の変化の様子が分かる。

($N=64, A=1.5, \kappa=1.0$ の場合)

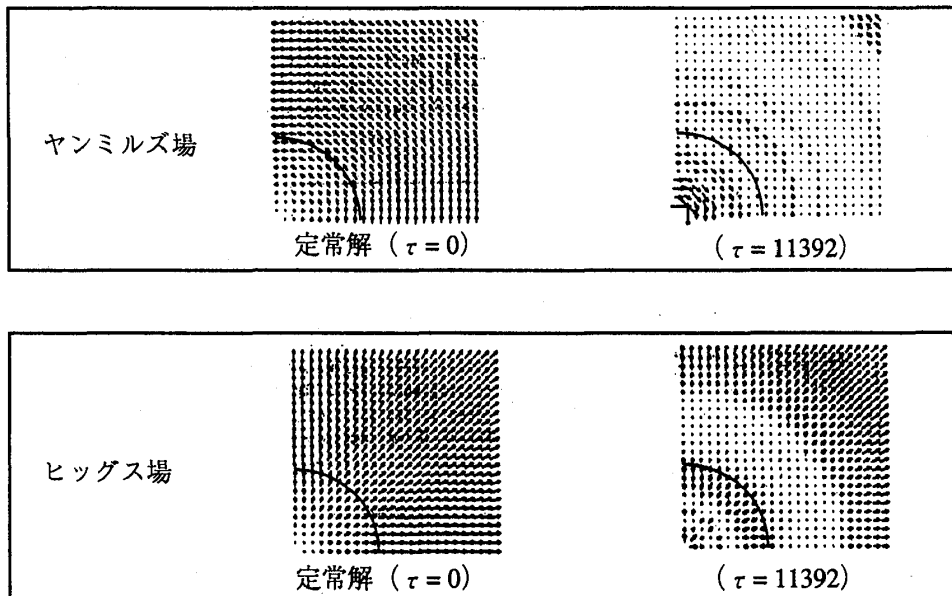


図5

4. 空間一様な場のモデルとハミルトン力学系³⁾

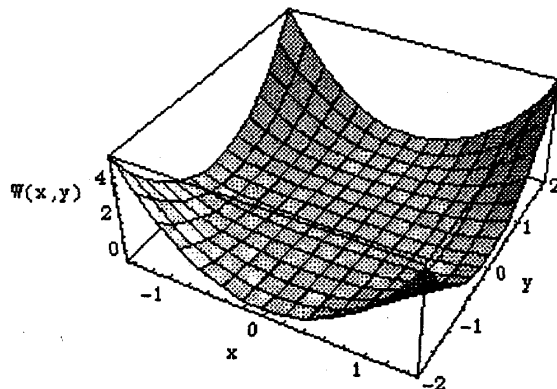
以上の解析でSU(2)ヤンミルズ・ヒッグス系には、ゆらぎの大きさによってカオス相とオーダー相の二相が存在することが分かった。また、ヤンミルズ場だけでは常にカオティックな状態であるから¹⁾、この結果は、ヒッグス場が系をオーダー化させることを意味する。

これらは、物理的に興味ある結果なので、もっと簡単なモデルを用いて再検討したい。空間変動が時間変動に比べて無視できる様な領域を考え、場が空間的に一様であると仮定する。この様なモデル (Homogeneous model) をとると、SU(2)ヤンミルズ・ヒッグス系は次のハミルトン力学系と等価になる。(x = ヤンミルズ場、y = ヒッグス場)

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + W(x, y)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}k(y^2 - 1)^2$$

この力学系のダイナミクスは、ポテンシャルW内での粒子の運動で分かる。特に、粒子の軌跡のポアンカレ断面やリヤプノフ指数の振舞を調べることによって、系の可積分性や解の分岐現象等が決定できる。



4-1. ポアンカレ断面 (図6)

結合定数 κ が大きい領域では、カム (KAM) トーラスや不動点が存在しレギュラーな状態である。 κ の減少と共にトーラスの破壊が起こりカオティックな状態に移行する。これは、ハミルトン力学系で典型的に見られるオーダー相からカオス相への相転移である。系がカオティックになるのはポテンシャルの x^2y^2 項のためである。この項は、所謂、ヤンミルズ古典力学をコルモゴロフのK系にする元である。この項は κ の増加と共に抑えられる。従って、ヒッグス場による系のオーダー化がここでも確認できる。

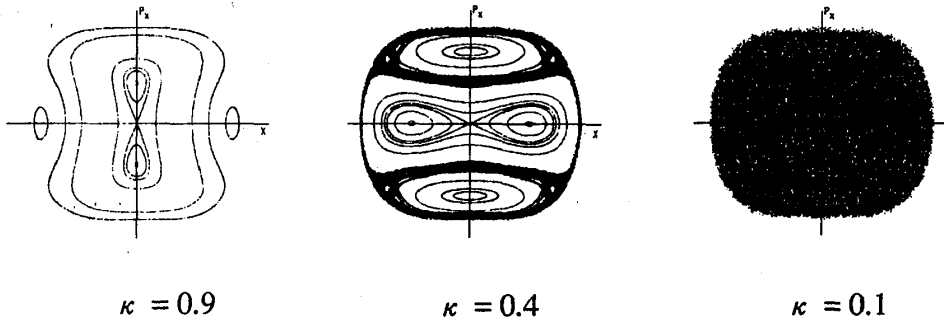


図6

4-2. リヤプノフ・スペクトラム (図7)

結合定数 κ には臨界値が存在し、オーダー相ではリヤプノフ指数はゼロであり、カオス相では約 2.67 である。この値は、ローレンツモデルとほぼ同じ大きさで強いカオス状態である事を示唆する。

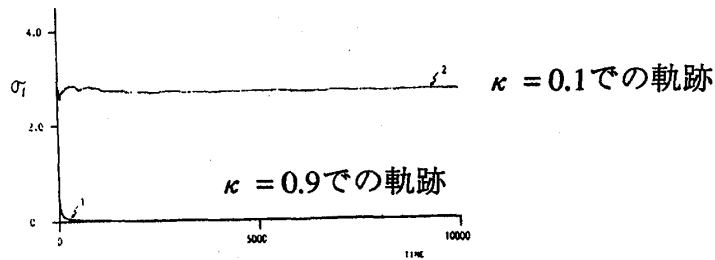


図7

5. まとめ

SU(2)ヤンミルズ・ヒッグス系は、古典場の理論の枠内で、ゆらぎの大きさによりカオス相とレギュラー（オーダー）相が存在し、その間には相転移的構造があること、また、系のオーダー化はヒッグス場の寄与で起こる事などが分かった。更に、空間一様近似の場のモデルにおいても、同様の結果が得られた。

この「カオス相」と「オーダー相」が、格子ゲージ理論での「閉じ込め相」と「非閉じ込め相」と、どの様な関係にあるのかを明らかにする事は重要である。最近、非可換格子ゲージ理論でカオスが現われることが報告されている⁶⁾。また、カオスによるK-S（コルモゴロフ・シナイ）エントロピーの増大と、クォーク・グルーオン・プラズマでの多重発生機構との関係も議論されている。このように素粒子の現象のなかには、カオスと深く関わるものが存在しており、これらは今後の研究課題である。しかしながら、現在なされている議論は古典カオスのレベルであり、量子系への拡張という難しい問題がある。また、大自由度系の時空カオスを、どの様に捉えたらよいのかという基本的な問題もある。

一方、観点を換えれば、SU(2)ヤンミルズ・ヒッグス場方程式は、いわば非線形現象の両極にあるカオスとソリトンが共存する系を記述しており、非線形物理としても興味ある対象である。また、ハミルトン系の時空カオスに対するモデルと見れば、モノポールのために非均一な空間でのカオス問題であり、新しい内容を含んでいる可能性があるだろう⁷⁾。

終わりに、本研究は、九州大学教養部の太田正之輔氏との共同研究であることを申し添えます。

参考文献

- 1) T. Kawabe and S. Ohta : Phys. Rev. D41 (1990) 1983
- 2) T. Kawabe and S. Ohta : Phys. Rev. D44 (1991) 1274
- 3) T. Kawabe : Phys. Lett. B274 (1992) 399
- 4) H. Georgi and S. L. Glashow: Phys. Rev. Lett. 28 (1972) 1494

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\epsilon^{abc}A_\mu^b A_\nu^c \quad (\text{ゲージ場のテンソル})$$

$$D_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a - e\epsilon^{abc}A_\mu^b \phi^c \quad (\text{共変微分})$$

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda(\phi \cdot \phi - v^2)^2 \quad (\text{ヒッグスポテンシャル})$$

この理論には3種類のゲージ場 A_μ^a と3種類のヒッグス・スカラー場 ϕ^a が含まれる ($a=1,2,3$, $\mu=0,1,2,3$)。

- 5) G. 't Hooft : Nucl. Phys. B79 (1974) 276
A. M. Polyakov : Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz. 20 (1974) 430
- 6) B. Muller and A. Trayanov : Phys. Rev. Lett. 64, 3387 (1992)
- 7) 保存系カオスの一例 T. Kawabe and S. Ohta : Phys. Rev. A41 (1990) 720