

Statistical Mechanical Rules Underlying Annihilation and
Creation of Solitons in a Driven Non-linear Schrödinger Equation

筑波大学 物質工学系 金野秀敏
Los Alamos 国立研究所 P. Lomdahl

1. はじめに

大自由度のカオスへの関心が益々高まってきている。大自由度の離散写像 (Coupled Map Lattice) から出現する時空パタンの分類、性質については金子らによる系統的な詳しい研究がある。しかし、(i)非線形の大自由度カオスの本質が離散写像で何処までとらえうるか? (ii)偏微分方程式で記述される物理モデルと離散モデルとの粗視化した物理量間の統計力学的な対応関係等は厳密な意味ではわかって居らず、今後に残された課題も多い。又、少数自由度系で用いられてきたカオスの解析手法の単純な適用は大自由度系の数値計算結果、あるいは、実験結果の解析には必ずしも有効とはならず、新しい解析法の必要性が望まれている。

近年、非平衡系に於ける"ソリトン"に対する外場、散逸の影響にも関心が持たれる様になってきた。この背景には、非平衡系での多彩なバグン形成や乱流現象をも含めた非線形現象を"ソリトン"をノーマルモードとする描像[1]で統一的に把握しようとする構想がある。

また、"ソリトン"と"カオス"の接点が明確な形で出現して来た。3次元の基礎方程式から運減摂動[2]を用い高次の摂動項を持つ1次元非線形シュレジンガー(NLS)方程式を導出し議論する事がしばしば行われてきた。NLS方程式のソリトンの時間発展に関しては薩摩、矢島[3]で詳しく調べられた。しかし、(i)ランダムに局在"ソリトン"が生成・消滅する状況が相加的外力駆動下のNLS方程式から出現する事、(ii)"ソリトン"と"輻射"の2次の相互作用が"ソリトンのカオス化"にとり重要である事が野崎と戸次[4]により示された。"ソリトン"の"カオス"との共存は他方、一般化されたKuramoto-Sivashinski(KS)方程式[5]でも研究されて来た[6]が(i)"ソリトン"の生成・消滅過程の仕掛はどのような相互作用に基づくのか?、(ii)散逸、エネルギーの注入の基でソリトンはどのような様な多様な挙動をするのか?等は一般の"ソリトン"系で必ずしも良く理解されて居ない。

別種の摂動下の非線形シュレジンガー方程式に従う局在した"ソリトン"の分離過程の存在は文献[7]で示された。また、"ソリトン"と"ホール" (Hole) の相互作用により1つの生成消滅過程を形成しうる場合は修正KS方程式で示された[8]。しかし、3次元に於けるノーマルモードとしての"ソリトン"が存在しうる非平衡系の可能なパターンは、まだまだ多彩であり、その動的挙動定量化等多くの課題が残されている。

ここでは、外場と散逸が存在しない場合には厳密なソリトン解が存在する系に摂動を越えた大きな外場が作用している場合の"ソリトン"の多体系の統計力学的性質をソリトンの波動の振幅や間隔の確率分布、ソリトン数の確率過程等を用いてとらえた結果について報告する。

2. モデル

今回、採用したモデルは野崎、戸次ら[4]がプラズマ中の非線形波動のモデルとして報告してきた次の様なモデルである:

$$i \Psi_t + \Psi_{xx} + 2 |\Psi|^2 \Psi = -i \gamma \Psi + i \varepsilon \exp(-i \omega t), \quad (1)$$

ここで、散逸係数 γ が時間変化しない時、系のエネルギーは時間と共に減少するがエネルギーの注入項 $i \varepsilon$ の存在のため定常状態が実現する。散逸と外場の存在しない NLS 方程式には無限個の保存量が存在したが、(1) ではこれらの保存量は消失している。1 ソリトンと輻射場に対応する低自由度系が構成出来、摂動が小さな場合“1 ソリトン”状態が依然としてアトラクタの役割を果たしているが示され、外場強度 ε の増加に伴う分岐現象も研究された。しかし、多“ソリトン”系の物理過程としての定量化は未だ不十分である。

3. 数値計算結果

図 1 (a) にパラメータとして $\gamma = 0.01, \varepsilon = 0.1735, \omega = 1$ を取り、初期値として $\Psi(x, 0) = 1 + 0.01 \cos(\eta x)$ を取った場合の“ソリトン”の時空発展の初期過程の様子を示す。ソリトン格子の発生後、コヒーレントな“ソリトン”の分裂、融合が次々と起こっている事がわかる。図 1 (b) に“ソリトン”の定常過程の分裂、融合の様子を示す。分裂、融合の際の対称性が破れている事が見てとれる。この対称性の破れは散逸のあるソリトン系に普遍的な性質である事を強調しておく。以下に示す分布関数は、初期過程の非定常部分を除き、定常とみなされる部分のみの統計を取った。

図 2 に“ソリトン”の波高分布を示す。振幅が 1 付近の“ソリトン”の数が多い事がわかる。1 ソリトン解に基付き固有値の時間変化に対する確率微分方程式を導出すると、ピークの位置高い方へのシフトが説明出来ない。この不一致の理由は、図 1 に見られる“ソリトン”の素過程(規則)を見れば明かなように“1 ソリトン”解に摂動が加わった系として同定が出来ないのは明かである。しかし、確率分布の形は

$$P_H(\eta) = P_0 \eta^a \exp(-b \eta^2), \quad (2)$$

となり (a, b : あてはめ定数)、相乗性(パラメトリック)雑音を有する非線形確率微分方程式から得られる確率分布で同定されうる事が示唆される。この事実は、(1) 式からバックグラウンドの運動 $c(t)$ を引き去った時、 $c(t)$ は相乗性外場として系に作用するので、 $c(t)$ に輻射の効果も取り入れると考えれば、(2) の形に書ける理由も推察されよう。2 ソリトン解に基付き 2 つの固有値の時間変化の非線形確率微分方程式を設定し、数値実験を説明するモデルを作ることも出来る。しかし、あてはめ定数なしのモデルを導出する事には、まだ、成功していない。

図 3 に“ソリトン”の波数スペクトルを示す。又、図 4 にソリトンの間隔分布を示す。図 3 の波数スペクトルには大きなピークが存在する。このモデル計算では周期的境界条件を設定して計算を行った。従って、波数スペクトルとソリトン間の間隔分布、及び、ソリトンの平均プロフィールには次のような関係式が存在する：

$$\langle E(k) \rangle = (\langle N \rangle / 2) |F_{2\text{-soliton}}(k)|^2 \{ -1 + 2 \operatorname{Re}(1/(1-p(k))) \}, \quad (3)$$

ここで、 $p(k)$ はソリトン間の間隔分布のフーリエ変換、 $P_2\text{-soliton}(k)$ は2ソリトン状態の平均プロフィールを表す。2ソリトン解を取り、その固有値の取る確率が(2)で決まるとし、図4の間隔分布を採用して理論計算を実行したが、数値計算の高波数側の盛り上がりが見えなかった。この理由は、自由場の2ソリトン解に比べて、外場が存在する時にはパルス幅が狭く圧縮されている事を意味する。

4. 確率過程

図5にソリトン数の確率密度関数を示す。点線は同じ平均数を持つポアソン分布のガウス近似である。ソリトンの平均数は分散より大きな値をとる事が理解されよう。このサブ・ポアソン性は"ソリトン"の生成・消滅過程が"ソリトン"の分裂・融合の素過程から主に成り立っている事からくる。図1で観測される規則(素過程)からマスター方程式を作り、システムサイズ展開理論を用いてサブ・ポアソン性の原因がここに存する事を明確に示す事ができる。最も、単純化したスキームでは $X \rightarrow 2X$ が分裂過程、 $2X \rightarrow X$ が融合過程を表す。しかし、図1からもわかるように、多体効果に伴うフィードバック、例えば、ソリトン間に反発力等も考慮する必要があるので、システムサイズでスケールされた遷移確率 $w(n, r, t)$ 、及び"ソリトン"数は次のように表現される:

$$w(n, r, t) = a_1(n + a_2 n) \delta_{r, 1} + b_1(n + b_2 n) \delta_{r, -1} \quad (4)$$

これよりサブ・ポアソン統計を生ずるパラメータ範囲は次式のように求められる。

$$(R_1 - 2/3)(R_2 - 4/3) < -1/9 \quad (5)$$

ここで、 $R_1 = a_1/b_1$ and $R_2 = a_2/b_2$. (5)の不等号を逆にした領域がスーパー・ポアソン統計を示す領域であり、その境界線上にポアソン統計を示す領域がある。

5. 結言

パラメータ励振系では、一般にマンレー・ルーの関係式が存在しエネルギー量子の分裂、融合の存在が示唆された。特に、非線形回路では、有名であった。弾性表面波の発生過程、コンボルバーでもフォノン量子の分裂、融合が生起していると見なせた。又、非線形シュレジンガー方程式のパラメトリックな損失変調はハミルトン力学系と類似した性質を有し、アーノルド拡散、間欠的カオスの発生と結び付いた"ソリトン"と"輻射"の相互作用の様相は相加性外場下の状況と異なり、低自由度系への遷滅は困難な様に見えた。[9]しかし、量子的性格は長時間保存され依然として"ソリトン"はアトラクタの役割を果たした。

相加的外場の存在する(1)の様な系でもバックグラウンドの変動を引き去るとパラメトリックな外場の印可と同様な効果として非線形場に影響を与える事がわかった。また、"ソリトン"の生成、消滅過程では素過程としての"ソリトン"的パルスの分裂[10]、融合が主要な過程として内在しておりその事実がソリトン数がサブ・ポアソン統計となって現れている事も明らかになった。

文献

- 1) Y. Ichikawa, T. Mitsuhashi and K. Konno: J. Phys. Soc. Jpn 41(1976)1382.
- 2) T. Taniuchi et al.: Suppl. Progr. Theor. Phys. 55(1974)1.
- 3) J. Satsuma and N. Yajima: Suppl. Prog. Theor. Phys. 55(1974)284.
- 4) K. Nozaki and N. Bekki: Physica 21D(1986)381.
- 5) Y. Kuramoto: Chemical oscillations, Waves and Turbulence, Springer(1984).
- 6) B. I. Cohen et al.: Nuclear Fusion 16(1976)971;
T. Kawahara and S. Toh: Phys. Fluids 28(1985)1536,
J. Phys. Soc. Jpn. 54(1985)1257.
- 7) K. Nozaki: Physica 21D(1986)369.
- 8) H. Konno and H. Soneda: J. Phys. Soc. Jpn 57(1988)1163.
- 9) A. Okamura and H. Konno: J. Phys. Soc. Jpn 58(1989)1930.
- 10) T. Konishi and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn 55(1986)1075.

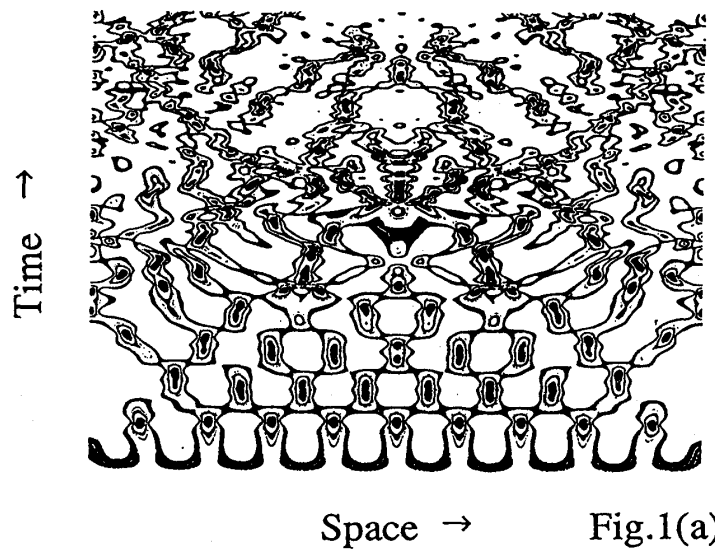


図 1(a) パラメータ $\omega=1$, $\gamma=0.01$, $\varepsilon=0.1735$ の場合の $|\Psi(x,t)|$ の時空発展の等高線図 (初期過程)

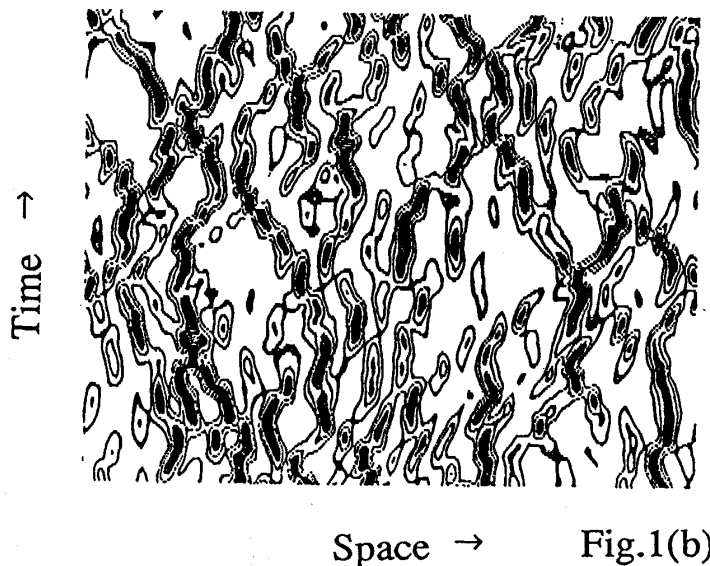


図 1(b) パラメータ $\omega=1$, $\gamma=0.01$, $\varepsilon=0.1735$ の場合の $|\Psi(x,t)|$ の時空発展の等高線図 (定常過程)

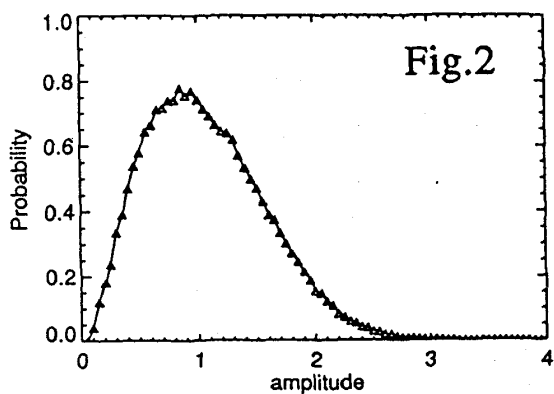


図 2 ソリトンの波高分布関数

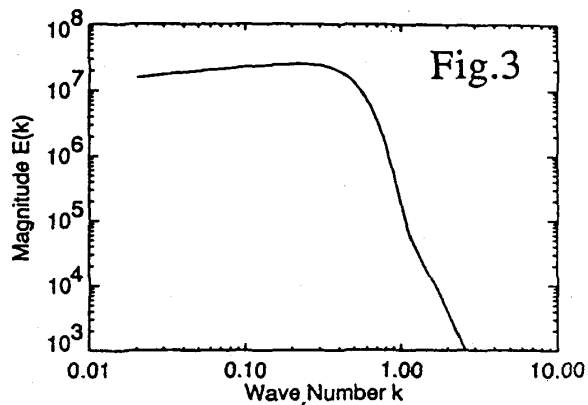


図 3 波数スペクトル

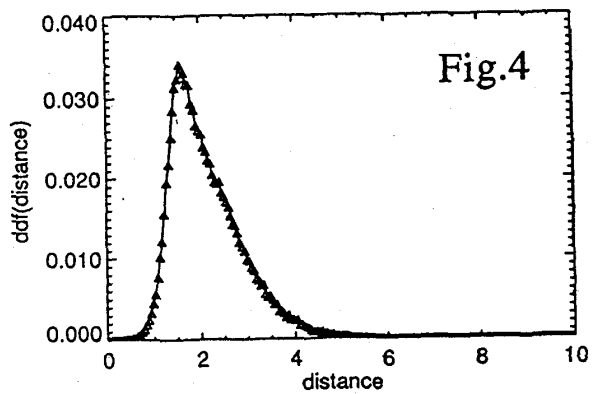


図 4 ソリトン間の間隔分布

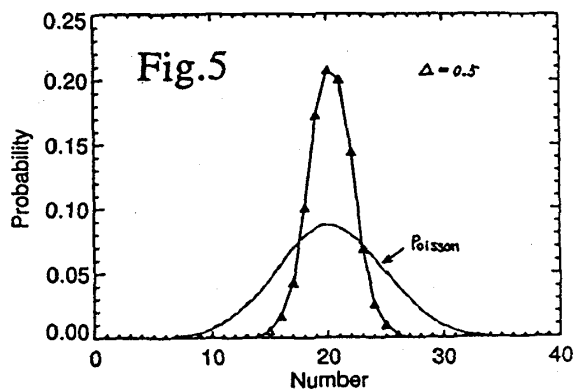


図 5 ソリトン数の確率密度関数