

スムーズな周期外力系の準固有状態に 現れる位相の複雑さ

九工大・情報工 高橋 公也

周期外力系やkicked systemは取扱の簡単さから、多くの量子系のカオスの研究に使われている。これらの系は周期 T をもったハミルトニアン

$$\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t) \quad (1)$$

で特徴付けられ、一周期の時間発展を与えるユニタリー演算子 \hat{U}_T の固有状態（準固有状態）を自励系の固有状態に代わるものとして用いることが可能である。ユニタリー演算子 \hat{U}_T と準固有値 ε_n 、準固有関数 u_n の関係は

$$\begin{aligned} \hat{U}_T |u_n\rangle &= \exp(-i\varepsilon_n) |u_n\rangle \\ &= \exp(-i(\varepsilon_n - 2\pi m(n))) |u_n\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで $m(n)$ は任意の整数である。 $m(n)$ の任意性を取り払えば、準固有状態を自励系の固有状態と同等のものとして見なして解析を進めることができ便利である。外力のない系の固有状態から連続的に外力を増加させ、外力のない系の固有値と準固有値を連続的につなげることにより (2) 式に現れる $m(n)$ を決定することが可能である。この様にして準固有値にエネルギー固有値としての意味を形式的にもたせることができる。

$$E_n / \hbar = \varepsilon_n - 2\pi m(n) \quad (3)$$

kicked systemでは、(3) 式で与えられる‘エネルギー’を固有値と思えば、形式的には自励系と同じ様に取り扱える。しかし、このような取扱からは‘量子カオス的な振舞い’と自励系の可積分的な振舞いを明確に区別することは量子的な不確定性の壁に阻まれ不可能である。これに対し、スムーズな周期外力系では連続的な時間変化を問題とすることが可能であり、準固有状態は時間変化の中に自励系の固有状態とは異なる複雑さを見いだす事が可能となると考えられる。例えば、1自由度の準固有状態を1自由度自励系の固有状態を比べる場合、マップとして見れば両者の間の違いを明確にすることは困難を伴うことが多い。しかし、連続的な時間領域の

変化に注目すれば、両者の間の違いを明確にすることが可能であろう。

この報告では、準固有関数に現れる位相の複雑さに注目する。自励系の固有関数の時間に対する位相変化は単位時間当たり $-\varepsilon_n/\hbar$ であり、全ての点で一定であるのに対し、準固有関数の位相の変化は自励系とは異なり各点毎に異なった位相変化が可能であると考えられる。各点における位相を $\theta_n(t, q)$ とすると、(2) 式より一周期の各点における位相の変化 $\theta_{nT}(q)$ は次の関係式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned}\theta_{nT}(q) &= \theta_n(T, q) - \theta_n(0, q) \\ &= \int_0^T \dot{\theta}(t, q) dt \\ &= -\varepsilon_n + 2\pi m(n, q)\end{aligned}\quad (4)$$

従って、各点における位相の変化の複雑さは整数 $m(n, q)$ の座標依存性を調べることにより判定可能であると考えられる。ここでは、簡単な系の数値実験によりこの事実を具体的に調べてみよう。取り扱った系は以下に示すような double well ポテンシャルをもつ 1 自由度系に周期外力を加えたものである。

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{16} (1 - 0.4 \sin \omega t) q^4 \\ \omega &= 0.7 \quad \hbar = 0.08\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、数値的に容認できる誤差 ER を以下の様に決めた。

$$\begin{aligned}\theta_{nT}(q) &= -\varepsilon_n + 2\pi m(n, q) + ER \\ ER &< 0.001\end{aligned}\quad (6)$$

また、空間のサンプル点の間隔 Δq は十分に細かく取る必要がある。ここでは、

$$\begin{aligned}\Delta q &= \left(\frac{2\pi\hbar}{256}\right)^{1/2} \times \frac{1}{8} \\ &\sim 0.00554\end{aligned}\quad (7)$$

とした。

以下、具体的なシュミレーションの結果を示そう。

図1 (a), (b), (c)に古典的なKAMトーラスに対応する準固有状態の場合の結果を示す。図1 (a)に示す伏見関数はこの準固有状態がKAMトーラスに対応していることを示している。図1 (b)に、座標 q と1周期の位相の蓄積 $\theta_{nT}(q)$ の関係を示す。 $\theta_{nT}(q)$ は q に対してほぼ一定ではあるが、わずかな揺らぎを含んでいる。ただし、準固有関数 u_n の絶対値の小さいところ即ち q の大きい所では急激に位相の蓄積($\theta_{nT}(q)$ の絶対値)が大きくなっているのが観測される。 $\theta_{nT}(q)$ の値分布を図1 (c)に示す。値分布からも $\theta_{nT}(q)$ の揺らぎが小さいことがわかる。

図2 (a), (b), (c)に、強いカオス状態の結果を示す。ここで、各(a), (b), (c)は図1のそれらと対応している。 q と $\theta_{nT}(q)$ の関係や $\theta_{nT}(q)$ の値分布から、 $\theta_{nT}(q)$ の値が大きく揺らいでいて、 $\theta_{nT}(q)$ が q のirregularな関数になっていることがわかる。また、この場合でも、 $|u_n|$ の小さい所で位相の蓄積が大きくなっていることが観測される。

図3 (a), (b), (c)は、強い局在化を示す準固有状態の結果である。図2の場合と同様に、 $\theta_{nT}(q)$ の値は大きく揺らぐが、座標の短い区間では、ほぼ一定値を取ることが多い。この事は、 $\theta_{nT}(q)$ の値分布が連続的な分布と言うよりは多数のピークの集まりで構成されているという事実に反映されている。この場合でも、 $|u_n|$ の小さい所で位相の蓄積が大きくなっていることが観測される。

このような位相蓄積の揺らぎは $q-t$ 空間における孤立ゼロ点の分布によって特徴付けることが可能である。図4に示す様に、2つの近接する点 $q = q_0$, $q = q_0 + \Delta q$ における位相のずれが時間と共に増大し、ずれの大きさの絶対値 $|\theta_n(t, q_0) - \theta_n(t, q_0 + \Delta q)|$ が π に達したときゼロ点が発生する。従って、近接する点の間の位相が絶対値として 2π ずれたとすると少なくともそのずれが起こった時間内に2つの点の間に1つの孤立ゼロ点が発生しているはずである。この事から、1周期における隣接する2つの点の間の位相のずれは、2つの点の間に発生したゼロ点の数に 2π を掛けたものを上回ることがないことがわかる。

$$\begin{aligned}
 & |\theta_{nT}(q_0) - \theta_{nT}(q_0 + \Delta q)| \\
 &= |2\pi m(n, q_0) - 2\pi m(n, q_0 + \Delta q)| \\
 &\leq 2\pi \times (q = q_0 \text{ と } q = q_0 + \Delta q \text{ の間に発生したゼロ点の個数})
 \end{aligned}$$

(8)

図5に強いカオス状態の u_n の実数部のnodal lineとゼロ点の分布を示す。図には10分の1周期($0 \leq t < T/10$)の場合が示されているが、たくさんの孤立ゼロ点が発生しているのがわかる。図には示さないが、局在化がある場合には、波動関数の絶対値が大きな値をとる所でゼロ点の発生が少なくなる。この為座標 q の短い区間で位相のずれが一定値を取ることが多くなる。KAMトラスに対応する準固有状態の場合も図には示さないが、カオス状態とは異なったゼロ点の分布が見られる。自励系のゼロ点は空間的に固定された点上にあるために $q-t$ 空間で見ると q = 一定の線上に連続的に分布するが、KAMトラスの場合には自励系の様相を色濃く残し、ゼロ線が部分的にちぎれた形で存在し、孤立的なゼロ点の発生はきわめてまれである。従って、位相のずれが起こりにくくなる。

結果として、 $q-t$ 空間のゼロ点の発生の様子を探る事により準固有状態に現れる位相のずれの複雑さを定性的に理解できる事が分かった。定量的な特徴付をすることが今後の課題である。最後に、この研究と結び付くと思われるいくつかの問題について、コメントしておこう。KAMトラスに対応する準固有状態を断熱的な変化と見なすと、断熱的な変化が起きている場合は、波動関数の時間-座標空間上の孤立ゼロ点の発生がほとんど起きていない状況であると考えられる。孤立ゼロ点発生のメカニズムを半古典近似等を用いて理解する事が出来たとすれば、断熱な変化を起こすための条件を正確に把握出来るようになると考えられる。2自由度以上の系でこれと同じシュミレーションを行えば、カオス状態にある固有状態の断熱不変性の議論が可能になる。もう1つの注目すべき点は、波動関数の絶対値の小さな部分で大きな位相のずれが見られたことである。このことから、カオス的な波動関数の絶対値が小さな部分の様相は非常に複雑であると考えられる。従って、トンネル効果等の絶対値の小さな部分の様相が本質的に重要になる様な現象では絶対値が小さな部分の解析が必要不可欠になると考えられる。

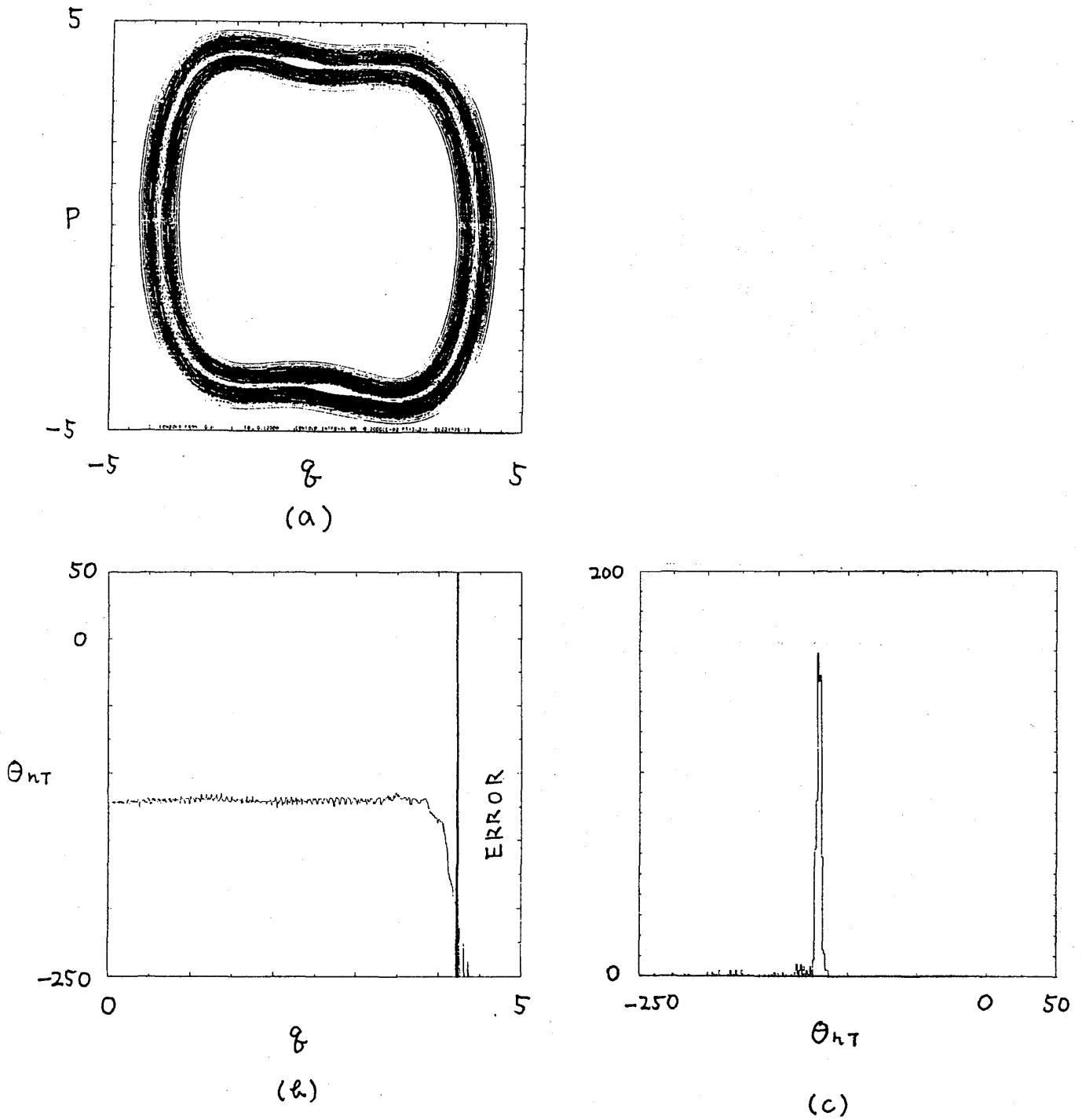


図 1. KAM トーラスに対応する準固有状態のシュミレーション

(a) 伏見関数

(b) $\theta_{nT}(q)$ の座標依存性. $\theta_{nT}(q)$ は $q=0$ に対して対称なので $q \geq 0$ の場合のみ示す.

(c) $\theta_{nT}(q)$ の値分布

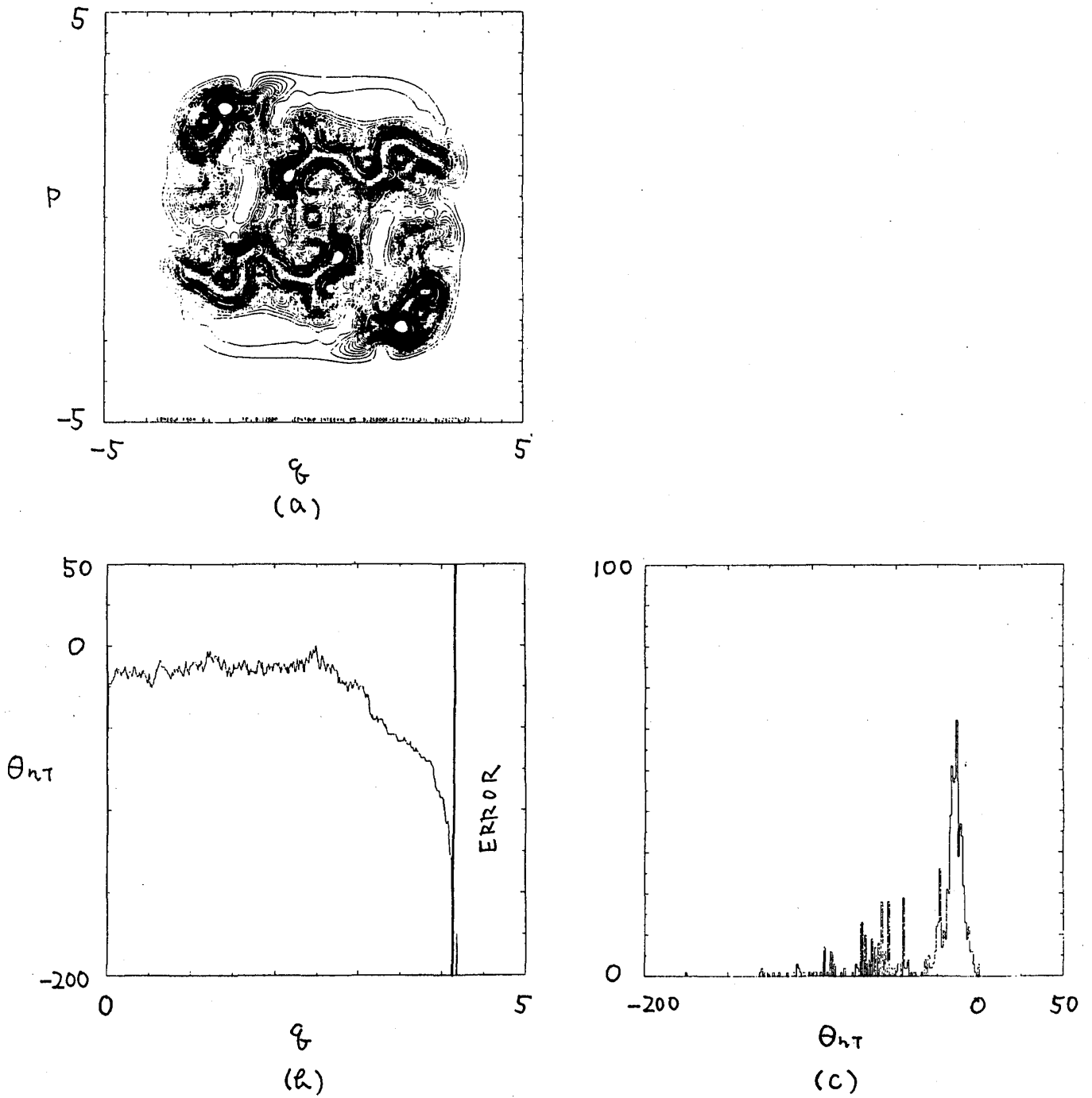


図2. 強いカオス状態をしめす準固有状態のシュミレーション

- (a) 伏見関数
- (b) $\theta_{nT}(q)$ の座標依存性.
- (c) $\theta_{nT}(q)$ の値分布

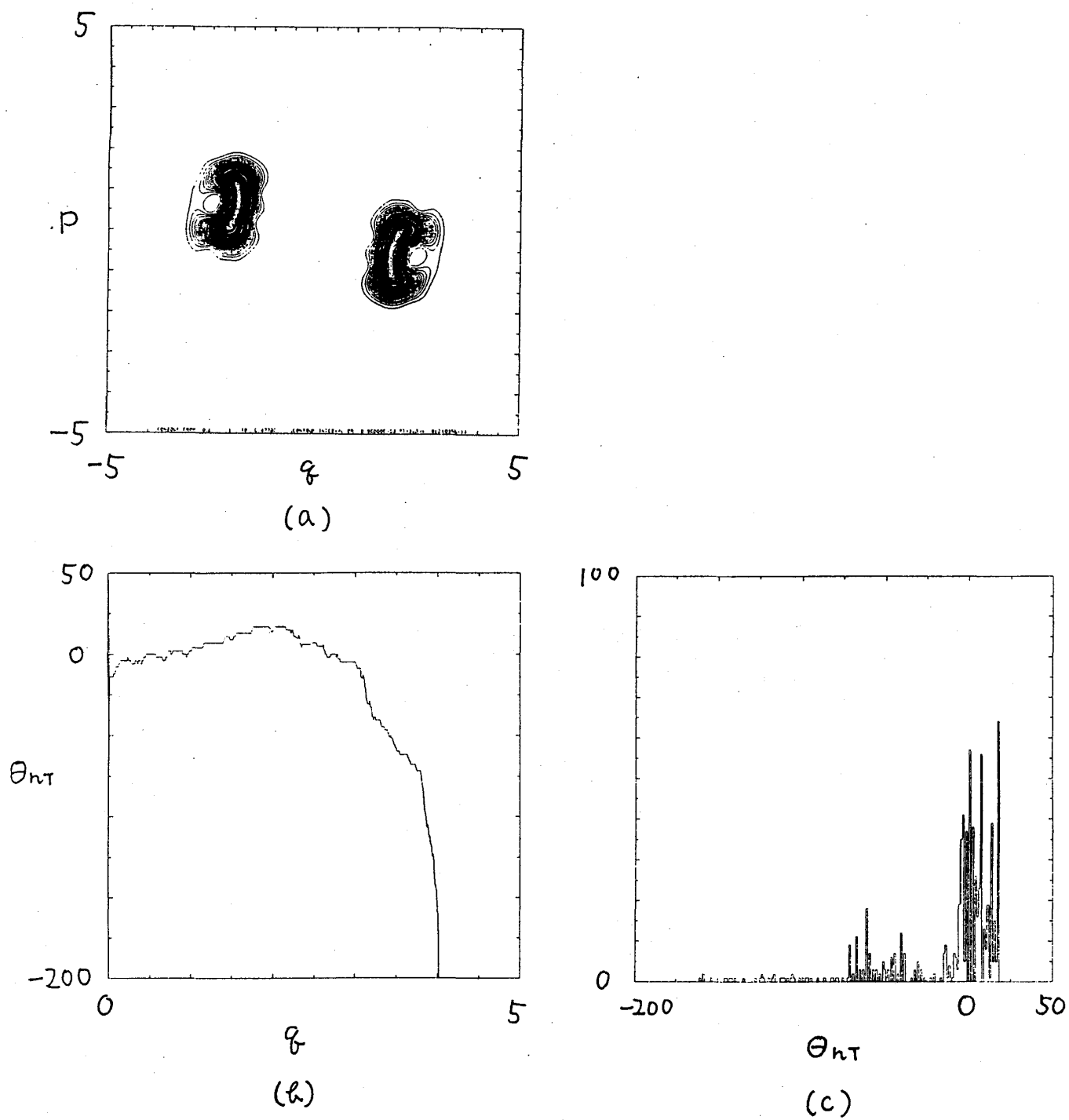


図 3. 局在化した準固有状態のシュミレーション

(a) 伏見関数

(b) $\theta_{nT}(q)$ の座標依存性.

(c) $\theta_{nT}(q)$ の値分布

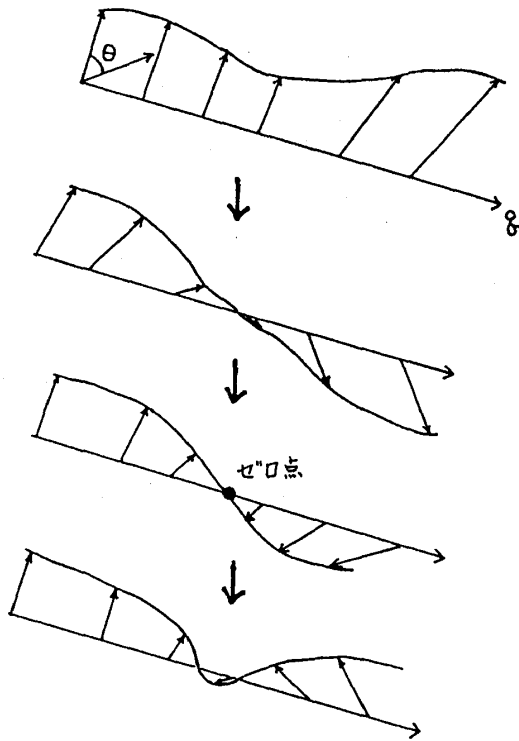


図4. ゼロ点発生メカニズム

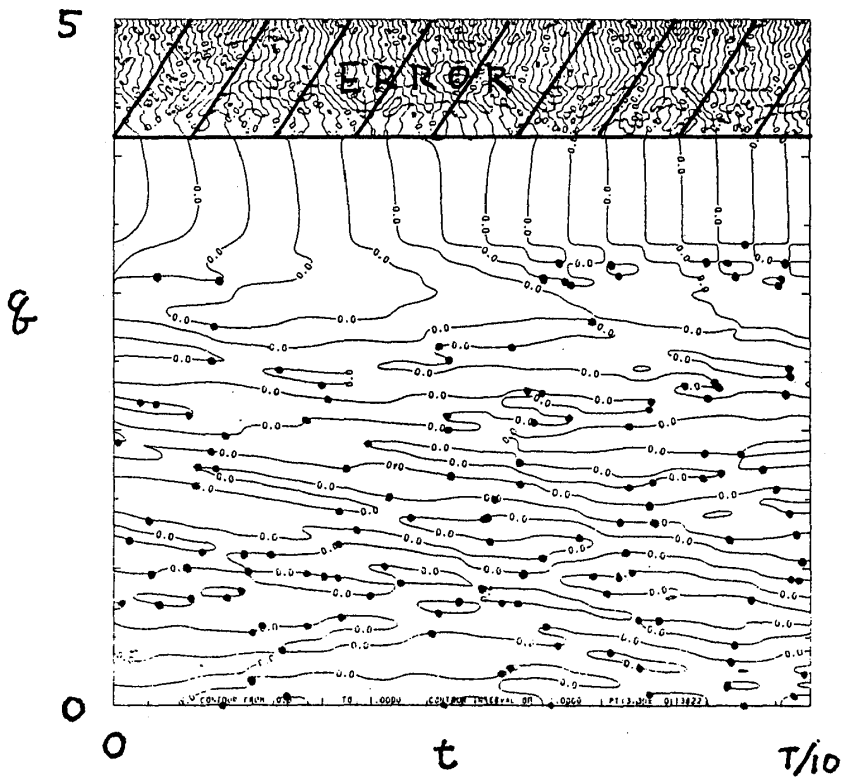


図5. 強いカオス状態を示す準固有状態の時間座標空間 ($t - q$) 上における実部の nodal line とゼロ点の分布 ($0 \leq t < T/10$).

時間領域の半古典論の破綻と古典系の軌道間相関

首藤 啓 (分子研)

池田 研介 (京大基研)

はじめに

一次元系をはじめとする可積分な量子系を古典論の言葉を通して理解しようとするとき、半古典論は我々に、これまでのところ考え得る最も有効な記述の手段を提供してきた。しかし、古典論がカオスを示すような系に半古典論を適用しようとする途端に、まさに系がカオスであることを理由に、多くの原理的な困難が予想される。その困難さの源は、大雑把に言えば、半古典論に寄与する古典軌道が、時間もしくは長さに対して指数関数的に増大するというところにあるといえるが、よくみていくと、その現れかたには、いくつかの異なった側面があることに気が付く。

最近関心を集めているエネルギー領域の跡公式の収束性の困難もそのひとつのあらわれである [1]。跡公式に寄与する周期軌道数の増大率がその振幅因子の減少率を上回るため、周期軌道の無限和は絶対収束しない。これは、半古典論が近似でしか成り立たない系であろうと、半古典論が厳密に成り立つ系であろうと、系がカオスを示すことにより遭遇する困難のひとつであり、定負曲率面上での測地流の運動に対する Selberg の trace formula は後者の典型例といえよう [2]。

一方、跡公式を含む、さまざまな半古典論の出発点ともいえる時間領域の半古典論は、適用時間を有限にかぎるならば、半古典論のプロパゲータに寄与する古典軌道は、いつでも有限個であり、エネルギー領域の半古典論で生じるような無限和の収束性にかかわる困難は生じない。よって、半古典論が厳密に成り立つ、例えば上記の定負曲率面上での測地流の問題やアーノルドの猫のような系の時間領域の半古典論は、当然のことながら、どのような長いタイムスケールであっても正しく量子論を再現する。従って、カオス系における時間領域の半古典論に問題が生じるとすれば、半古典論が近似でしか意味をもたないような系のクラス — こちらの方がより一般的である — に対して半古典論を適用したとき、それが果してどこまで有効か、という点に集約される。半古典的な近似を含むことの影響は、エネルギー領域の半古典論でも当然とりあげられるべき重要な課題であるが、そこまでのたちいった議論はこれまでのところなされていない。エネルギー領域の問題では、上記の無限和の収束性と、半古典近似の問題とが混在していることが話をより複雑にしている。まず、半古典近似理論の出発点である時間領域の半古典論に対して十分な理解がなされるべきであろう。

以上の問題意識のもとに、我々の研究の目的の第一は、piece-wise に quadratic なポテンシャルをもつ一次元の周期外力系を用いて、時間領域の半古典論がいったいどの

ようなタイムスケールまで有効で、もし破綻するとすれば何が理由で破綻するか、という極めて素朴な問題を調べることにある。モデル系の具体的な紹介、利点等は後述するが、一次元周期外力系をモデル系として選ぶ理由と関連して、我々の本研究のもうひとつの重要な目的は、次の疑問、すなわち、“半古典論は、波動関数の動的局在を再現することができるか？”という問題を考察することである。量子力学による古典系のカオス的拡散現象の抑制 [3] は、系の準固有状態が、一次元ランダム系の tight binding model と類似の方程式から決定されることから、その機構をアンダーソン局在的なものに帰着しようとする見方がある。しかし、対象とする拡散現象が対応する古典系のカオスに起因する以上、その発生機構の完全な理解には、古典力学との関連を知ることが避けてとおることができない。冒頭で触れたように、半古典論は、そのことを探るいまのところ最も有効な手だてであり、よって、我々のここでの試みは、半古典論自身の有効性と限界を見極め、同時に、波動関数の動的局在現象の起源を、古典論との関連で理解する可能性を探ることである。

モデル

我々が解析に用いたモデルは、以下のハミルトニアンで与えられる一次元周期外力系である。

$$H(p, \theta, t) = \frac{p^2}{2} + V(\theta) \sum_n \delta(t - n), \quad (1)$$

ここで、 $V(\theta)$ として、piece-wise に quadratic なポテンシャル、

$$V(\theta) = K \{ \theta - (2n + 1) \}^2 / 2 \quad (2)$$

$$(2n\pi \leq \theta \leq 2(n + 1)\pi; \quad n \text{ integer})$$

を用いる。但し、 $[p, \theta] = -i\hbar$ で、 t は時間を表す。また、系の波動関数には、周期境界条件、 $\Psi(\theta, t) = \Psi(\theta + 2\pi, t)$ を課す。我々が、このモデルを用いて時間領域の半古典論を解析する利点として、次のようなことが挙げられる。

(a) (1) 式のように、系のハミルトニアンを explicit に書き下すことができるので、量子論および半古典論を疑義なく構成できる。

(b) 相空間が、KAM トーラスなどの複雑な構造をもたず homogeneous で、不安定性の強さが至るところ等しい。

(c) ラグランジュ多様体の形が単純（直線）なので、半古典論のプロパゲータに寄与する古典軌道の探索が容易である。その結果、半古典論を長時間計算することができる。

(d) 半古典論に寄与する古典軌道に数論的な特殊性がなく、系がパラメータ (K) をもつことにより、generic な場合を調べられる。

既に半古典論の考察の対象となっているアーノルドの猫 [4]、パイこね変換 [5] などの系では、これらすべての性質が満足されているわけではない。アーノルドの猫では、

古典論の数論的な性格が強く反映し過ぎて、得られた結果がどこまで一般の系に拡張可能か明らかでない。また、パイこね変換では、量子化の手続きそのもの、及び半古典論の構成の仕方に曖昧な点が残る。

しかし、我々のモデルが、半古典論の解析に際して、あらゆる要素を含み、かつ一般的というわけではないことも言うておく必要がある。というのは、このモデルには、通常の時間領域の半古典論の波動関数を問題にするときに避けられない、いわゆる caustics 発生による困難が、少なくとも見かけ上は現れないからである。この系の古典力学がカオスを生み出すメカニズムは、通常の引き延ばしと折れ畳みではなく、引き延ばしと切断（+引き戻し）である。半古典論の波動関数に現れる caustics は、ラグランジュ多様体が折れ畳まれた場所（正確には、ラグランジュ多様体を、考えている半古典論の表示で見たときに、その微係数が無限大になる点）で発生する。ところが、我々の系のダイナミクスは折れ畳みをつくらないから、その意味での caustics は発生しない。従って、従来予想されているように、caustics がカオスのダイナミクスによって時間とともに指数関数的に多重発生し、その結果として半古典論が量子論を再現しなくなる、というシナリオをこの系で直接検証することはできない。（そのためには、 $V(\theta) = K \sin \theta$ とした、いわゆる standard map などを用いて調べることが考えられるが、そうすると、上記の (b), (c) の利点が失われてしまう。特に半古典論に寄与する古典 path を探索することが困難になることは、いま最も知りたい長時間におよぶ半古典論の有効性のチェックのためには致命的とさえいえる。）しかし、時間がたつにつれて、切断され、引き戻された多様体上の点は、半古典論の波動関数を考える上で、通常の caustics と似たような役割を果たす。

半古典論

以下、運動量表示で半古典論を考える。量子論の時間発展を与える Green 関数（or プロパゲータ） $G(p_t, p_0, t) = \langle p_t | \hat{U}^t | p_0 \rangle$ 但し、 $\hat{U} = \exp\{-i\hat{p}^2/2\hbar\} \exp\{-iV(\hat{\theta})/\hbar\}$ に、定常位相近似を用いることにより、 t ステップのプロパゲータの半古典近似は、

$$G^{(sc)}(p_t, p_0, t) = \sum_m A_{p_0}^{(m)}(p_t) \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} S^{(m)}(p_t, p_0)\right\} \quad (3)$$

で与えられる。ただしこの系には、先に述べたように多様体の折れ曲がりがつくる古典的転回点に相当するものがないので、Maslov 指数は省略してある。ここで、 m は、異なる鞍点解を与える古典軌道を表し、各軌道 $\{p_i^{(m)}, \theta_{i+1}^{(m)}\}$ ($0 \leq i \leq t$) は、初期運動量 $p_0^{(m)}$ 、終運動量 $p_t^{(m)}$ の条件のもとに、古典写像

$$\begin{aligned} \theta_{i+1}^{(m)} &= \theta_i^{(m)} + p_i^{(m)} \\ p_{i+1}^{(m)} &= p_i^{(m)} - V'(\theta_{i+1}^{(m)}) \quad (0 \leq \theta_1^{(m)} \leq 2\pi) \end{aligned} \quad (4)$$

で与えられる。 $S^{(m)}(p_t, p_0)$ は、古典軌道 m に対する作用で、

$$S^{(m)}(p_t, p_0) = \sum_{i=1}^{t-1} \left\{ \frac{p_i^{(m)2}}{2} + V(\theta_i^{(m)}) + (p_i^{(m)} - p_{i-1}^{(m)})\theta_i^{(m)} \right\} \quad (5)$$

である。また、 $A_{p_0}^{(m)}(p_t)$ は、各古典軌道のまわりの量子ゆらぎを反映した振幅因子、

$$A_{p_0}^{(m)}(p_t) = \left| \left(\frac{\partial \theta_1^{(m)}}{\partial p_t} \right)_{p_0} \right|^{\frac{1}{2}} \quad (6)$$

で、いま考えている系は、相空間のすべての点で、不安定性の強さが同一であることから、系の Lyapunov 数 α を用いて $e^{-\alpha t/2}$ と表される。また、波動関数に周期境界条件 $\Psi(\theta, t) = \Psi(\theta + 2\pi, t)$ が課されていることから、初期運動量 $p_0^{(m)}$ と終運動量 $p_t^{(m)}$ は、 \hbar の整数倍でなければならない。半古典論のプロパゲータ $G^{(sc)}(p_t, p_0, t)$ に寄与する古典軌道の $\theta_i^{(m)}$ 探索する上で、注意しなければならないのは、 $i \neq 0$ に対しては、探索範囲に拘束条件が見つからないが、初期の $\theta_0^{(m)}$ に対してだけは、 $0 \leq \theta_0^{(m)} \leq 2\pi$ でなければならないことである。

さて、以上の準備のもとに、(1)(2) で与えられる系に対して数値的に半古典論のプロパゲータを評価し、その有効性と限界を検証すると同時に、この系でも典型的に現れる波動関数の動的局在を半古典論はどの程度まで再現可能か、を以下で具体的にみていく。その前にまず、これから考えようとしている問題に対するいくつかの予備的な考察を行おう。

予備考察 1

半古典論の近似は、量子論の経路積分表示されたプロパゲータに対する寄与として最も支配的な古典軌道と、その周りの \hbar の 2 次のゆらぎまでを考慮したものである。その時、寄与する古典軌道は各々が全く独立であると仮定される。また、その仮定が満足されている限りには、正しく量子論を再現する。しかし、系がカオスであると、プロパゲータに寄与する古典軌道は、時間と共に指数関数的に増大し、上述の仮定が成り立たなくなる状況が発生し得る。では、そのように各々の古典軌道のまわりの量子ゆらぎが独立でなくなり、半古典論で用いられている近似が危うくなるのは、どのような特徴的なタイムスケールであろうか。おそらく、これまで信じられているのは、初期のラグランジュ多様体が、古典ダイナミクスの引き延ばしと折れ畳みで、ブランチ間に干渉を発生する時間、所謂 Ehrenfest time ($\sim \log \hbar^{-1}/\lambda$, 但し λ は系の Lyapunov 指数) であろう。これは、同時に量子論と古典論の対応が破綻するタイムスケールでもある。事実この予想を出発点として、Heller たちは時間領域の半古典論を調べた [6]。その結果は予想に反して (?), 時間領域の半古典論は、 $\log \hbar^{-1}/\lambda$ のタイムスケールを越えて work した。何故そのようなことが起こるのであろうか？

そもそも、プロパゲータに寄与する古典軌道の周りの量子ゆらぎが独立であるというこの意味は、相空間上のブランチの間の距離が離れていることではなく、(3)式の各作用の差が 2π に比べて十分大きいことである。ところが、作用の差は相空間上でのブランチ間の距離ではなく、ブランチと多様体が囲む扇型の領域の面積であるから、半古典論が work するか否かを判定するためには、その扇型の領域が時間とともにどのように推移していくかを考えなければならない。以下に示すように、プロパゲータに寄与する各軌道の作用の差の平均的なオーダーとしては決して時間と共に小さくはならないことが、我々の系では容易にみてとることができる。そのためにまず、終運動量 p_t を、初期座標 θ_0 と初期運動量 p_0 の関数とみて、作用を初期座標 θ_0 について微分する。すなわち、

$$\begin{aligned} \frac{dS^{(m)}(p_t(\theta_1, p_0), p_0)}{d\theta_1} &= \frac{dp_t}{d\theta_1} \frac{dS^{(m)}(p_t(\theta_1, p_0), p_0)}{dp_t} \\ &= \frac{dp_t}{d\theta_1} \theta_{t+1}(\theta_1) \end{aligned} \quad (7)$$

故に、古典軌道 $\{p_i^{(m)}, \theta_{i+1}^{(m)}\}$ と $\{p_i^{(m+1)}, \theta_{i+1}^{(m+1)}\}$ との間の位相差は、

$$\begin{aligned} \Delta S(\theta_1^{(m)}, \theta_1^{(m+1)}) &\equiv S^{(m+1)}(p_t(\theta_1^{(m+1)}, p_0), p_0) - S^{(m)}(p_t(\theta_1^{(m)}, p_0), p_0) \\ &= \frac{dp_t}{d\theta_1} \int_{\theta_1^{(m)}}^{\theta_1^{(m+1)}} \theta_{t+1}(\theta_1) d\theta_1 \end{aligned} \quad (8)$$

ところがいま、 $\frac{dp_t}{d\theta_1} \sim e^{\alpha t}$ 、 $\theta_1^{(m+1)} - \theta_1^{(m)} \sim e^{-\alpha t}$ であるから、結局

$$\Delta S(\theta_1^{(m)}, \theta_1^{(m+1)}) \sim o(1) \quad (9)$$

となってしまう、平均的な位相差は、常にオーダー 1 である。このことから、系がカオスを示し、半古典論に寄与するブランチが時間と共に指数関数的に増大しようとも、必ずしも Ehrenfest time で半古典論が破綻することは限らないことが想像される。ここでの考察は、系の特殊性をどこにも用いていないので、得られた事実は任意の系に対して成り立つと考えてよいであろう。

半古典論が、 $\log \hbar^{-1}/\lambda$ という極めて短いタイムスケールを越えて有効性を発揮する可能性があるとする、波動関数の動的局在を、果して半古典論はつくりだすことができるのであろうか？。そもそも、波動関数の動的な局在の機構が完全に理解されていないことから、局在のおこり始めるタイムスケール自体未解明のことである。しかし、これまでの計算機実験の結果の示すところでは、量子論の局在は、量子古典対応の崩れる $\log \hbar^{-1}/\lambda$ よりかなり先のタイムスケールでおこっている。半古典論が、 $\log \hbar^{-1}/\lambda$ を越えて work し、その後起こる局在現象を再現するということは、半古典論のインプッ

トである古典論に対して、どのようなことを要請するのであろうか、以下で考察してみる。

予備考察 2

いま、時刻 $t = 0$ で、系の状態が古典、半古典系ともに $p = p_0$ にあるとする。すなわち、 $P^{(d)}(p, t = 0) = P^{(sc)}(p, t = 0) = \delta(p - p_0)$ 。但し、 $P^{(d)}(p, t) = P^{(sc)}(p, t)$ はそれぞれ、古典、半古典論の分布関数をあらわす。このとき、半古典論の分布関数は、(3) 式のプロバゲータを用いて、 $P^{(sc)}(p, t) = |G^{(sc)}(p_t, p_0, t)|^2$ と表される。いま考えている系では、振幅因子 $A_{p_0}^{(m)}(p_t)$ が場所によらず一定であるから、それを $A_t (= e^{-\alpha t/2})$ と略記することにとすると、半古典論の分布関数は $p = p_0$ で、

$$\begin{aligned} P^{(sc)}(p_0, t) &= |G^{(sc)}(p_0, p_0, t)|^2 \\ &= \sum_{m,n=0}^{N_t(p_0)} A_t^2 \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S^{(m)} - S^{(n)})\right] \\ &= A_t^2 N_t(p_0) \sum_{m=0}^{N_t(p_0)} \frac{1}{N_t(p_0)} \sum_{k=0}^{N_t(p_0)-m} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S^{(k+m)} - S^{(k)})\right] \quad (10) \end{aligned}$$

となる。但し、作用 $S^{(m)}(p_0, p_0)$ の argument は省略した。ここで、 $N_t(p_0)$ は、時刻 t で終運動量が p_0 となる古典軌道の総数で、古典論が拡散係数 D_{cl} で拡散するとすると、 $N_t(p_0) \sim e^{\alpha t} / \sqrt{D_{cl} t}$ である。さて、作用の間の相関を表現する部分を、

$$C(m, t) \equiv \frac{1}{N_t(p_0)} \sum_{k=0}^{N_t(p_0)-m} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(S^{(k+m)} - S^{(k)})\right] \quad (11)$$

とおくと、半古典論の分布関数は、古典論の分布関数を用いて、

$$P^{(sc)}(p_0, t) = P^{(d)}(p_0, t) \sum_{m=0}^{N_t(p_0)} C(m, t) \quad (12)$$

表される。いま、量子論の波動関数が局在し始める時間を t_L とすると、局在がはじまるまでの間は、 $P^{(sc)}(p_0, t) \sim P^{(d)}(p_0, t)$ であるはずであるから、

$$\sum_{m=0}^{N_t(p_0)} C(m, t) = 0 \quad (\text{for } t \leq t_L) \quad (13)$$

とならなければならない。また、局在をおこすと時間が十分大きいところで漸近的に $P^{(sc)}(p_0, t) \sim \text{const}$ となるべきであるから、半古典論が局在をおこすためには、

$$\sum_{m=0}^{N_t(p_0)} C(m, t) \sim \sqrt{t} \quad (\text{for } t \gg t_L) \quad (14)$$

でなければならないことがわかる。つまり、 $t \leq t_L$ では、古典論の作用の間には、全く相関がなく、 $t \gg t_L$ で、古典作用間には、微妙な相関を存在しなければならない。微妙であるという表現を使った訳は、 $\sum_{m=0}^{N_t(p_0)} C(m, t)$ の和にでてくる作用のペアは、時間と共に $N_t(p_0)^2 \sim e^{\alpha t} / D_d t$ の割合で増えるが、局在のために必要な相関は、それに比較してほとんど無視できる程度の増え方だからである。

以上の議論は、 $p_t = p_0$ という特定の境界条件に対して得られたものであるが、もう少し一般的には、局在をおこすことを系の準エネルギーが離散的なスペクトルをもつという条件で言い換えることによって、次のようにも書ける。

$$\left| \sum_p \langle p | G^{(sc)}(p, p, t) | p \rangle \right|^2 \sim \text{const} \quad (\text{as } t \rightarrow \infty) \quad (15)$$

半古典論のプロバゲータに寄与する古典軌道は、カオスを反映して指数関数的に増えていく。しかし、以上の考察の示すところは、もし、半古典論で量子論でおこっているような局在をつくらうとすれば、古典作用の間に相関が、それも非常にわずかな程度の相関が存在していなければならないということである。わずかと言えども、これは、我々のカオスのダイナミクスに対する常識と反するように思われる。何故ならば、カオスは、時間とともに初期条件の情報を指数関数的に失っていき、系の Lyapunov 数で決まる特性時間の後は、任意の2つの初期点から出発した軌道の位置にはいかなる相関も存在しないはずだからである。

しかし、ここで行った議論は、あくまでも半古典論が量子論の局在を再現できるという前提から導かれる推論の域を出ない。本当に、古典論自身が、そのダイナミクスの内部に、局在をひきおこすような古典作用間の微妙な相関を準備しているか否かは、実際の系の半古典論と、それに寄与する古典軌道の性質を詳しく当たってみる以外ない。

数値計算の結果

以下、(1)(2)式で与えられるモデル系を用いて行った半古典論に対する数値計算の結果を示す。まず、最も基本的な半古典論の検証は、(3)式のプロバゲータから得られた半古典論の波動関数自身が、純粋な量子論のそれとどこまで一致するかということである。Fig. 1 にその典型的な結果を示す。右側の図が半古典論、左側が量子論と古典論を重ねて書いたものである。この系の特異なところは、ポテンシャル（あるいは、それを微分した力が、 $\theta = 2n\pi$ (n ; integer) で不連続なことである。そのため、量子論の波動関数は、その不連続点上で Gibbs 現象を起こしてしまう。図の1ステップ目で既に現れている $\theta = 0$ and 2π での波長の短い振動がそれである。一方、半古典論の1ステップ目は、寄与するブランチは1本で、もちろん量子論の Gibbs 現象を表現することはできない。従って、厳密な意味では、半古典論は最初から量子論と一致しないことになるが、ここでは、その差は考えないことにする。この振動は、 $\sqrt{\hbar}$ 程度の幅の smoothing、あるいは波動関数のモーメントなどを求めるときの p 方向に対する積分を実行することによって平均化されて見えなくなるからである。

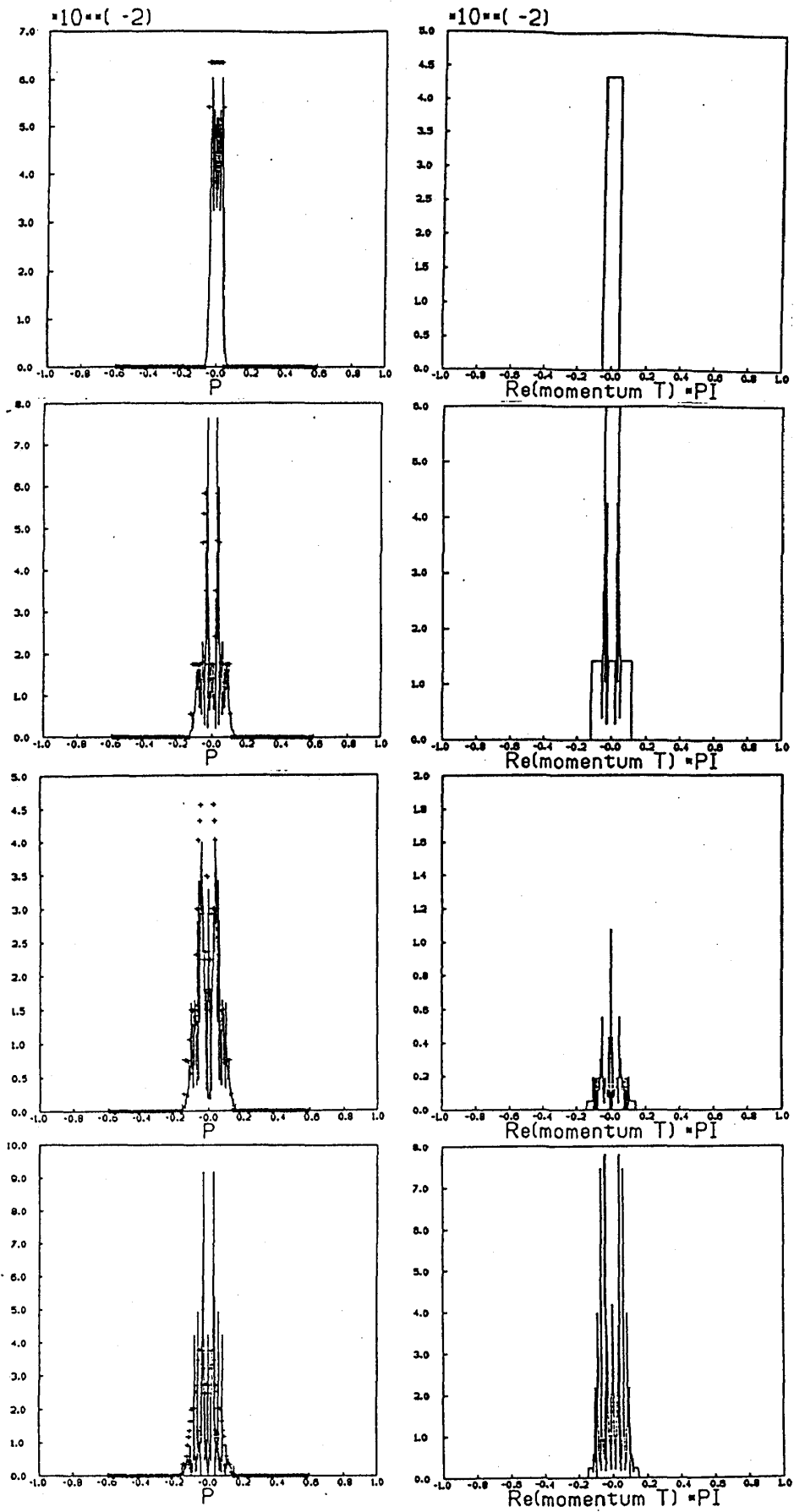


Fig. 1 古典論、量子論、半古典論の時間発展。上から1,3,5,7ステップ目。左図の+印が古典論、実線が量子論。右図の実線が半古典論。

時間発展初期のうち、量子論と半古典論の波動関数の形状はかなりよく似ているものの、時間が進むと、次第にそれぞれ異なった構造を示すようになる。ちなみに、このパラメータでの Ehrenfest time は、7、8 ステップ目であるが、その前後で、とりたてて特徴的なことが起こったようには見えない。しかし、計算の限界近くの 28 ステップ目あたりになると、半古典論は、全くといってよい位、量子論を再現することができない。このことは、この図で示した例だけではなく、異なる摂動の強さ K 、異なるプランク定数 \hbar でも同じ傾向を示す。(全般的な傾向としては、Heller たちが見せたような Ehrenfest time を越えた後の波動関数の著しい一致は得られない。その違いの理由はいまのところ不明である。)

では、いま見てきた波動関数は、量子論でおこるような動的局在を示すのであろうか？ 波動関数が指数関数的な局在をおこしているかどうかを直接波動関数自身から判定するのは困難であるので、ここではそのモーメントの時間発展に注目する。これに関しても、様々なパラメータに対してつぶさに調べた結果の典型例を 2 つを次に示す。

まず、最初のケースは、半古典論が量子論の局在をかなりよく再現する場合である (Fig. 2(a))。古典論のモーメントは時間に比例して増大するが、量子論は、およそ 10 ステップ目あたりから拡散がにぶり始める。同様に半古典論も、量子論が示すのと同じ程度の局在をつくることのできる (Fig. 2(b))。但し、注意しなければならないのは、局在をつくるとはいうものの、各ステップ毎のモーメントの値自身が全く同じ値を示すわけではない。これは、量子論と半古典論と波動関数自身の細かい位相までが完全に一致するわけではないことからくるものであるが、それにもかかわらず、おおよその局在の様子は、かなり再現されているといっても良からう。

我々の半古典論の出発点は、(3) 式で与えられるプロパゲータの半古典表示である。半古典論の時間発展は、真の量子論のプロパゲータ $G^{(qm)}(p_t, p_0, t)$ を、 $G^{(sc)}(p_t, p_0, t)$

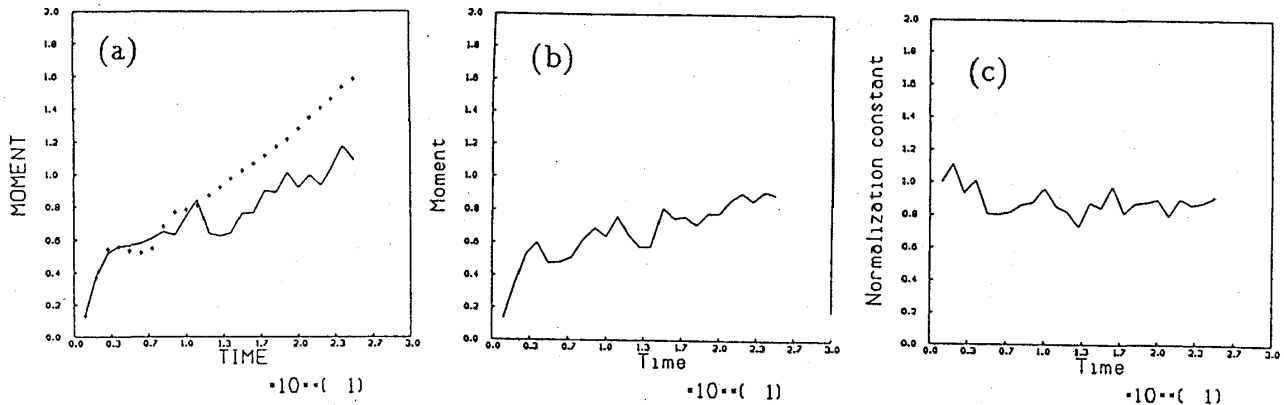


Fig. 2 (a) 古典論 (+印) 及び量子論 (実線) のモーメントの時間変化。(b) 半古典論モーメントの時間変化。(c) 半古典論の波動関数の規格化定数の時間変化。但し、 $K = 0.20$, $\hbar = 2\pi \frac{9}{1024}$

で置き換えることによって得られる。では、そのように構成される半古典論は、果して、ユニタリ性を満足しているのでしょうか？ もともとの量子論は、時間発展で確率が保存するような要請からユニタリ性が満足されるようにつくられているが、いま、そのユニタリ演算子を定常位相近似のもとにおきかえた半古典的時間推進演算子が、ユニタリ性を満たす保証はどこにもない。もちろん、量子論がユニタリ性を保証しているわけではない。一方、古典論も自らのダイナミクスのなかに、Liouville の定理というかたちでユニタリ性を満足するようにつくられている。古典論のユニタリ性によって、位相因子をもつ半古典論のユニタリ性が満足されるのは、次のような特別な場合だけである。それは、半古典論の位相の影響をまったく考えなくてもよい場合、つまり、位相が完全にランダムで互いに打ち消し合い、半古典論が古典論と全く同じように振る舞うようなときである。考えている状況に即していえば、予備考察 2 でした、波動関数が局在を始める時間 t_L までの $P^{(sc)}(p_0, t) \sim P^{(cl)}(p_0, t)$ が成り立っているときに限って、古典論のユニタリ性から半古典論のユニタリ性が満たされていることになる。しかし、これもあくまでも、確率が保存するという程度のユニタリ性という意味で、 $t \leq t_L$ でも、厳密な意味では半古典論のユニタリ性を保証するものは何もない。つまり、われわれは、局在を問題にすることと並行して、半古典論がユニタリ性を満たしているかをチェックしなければならないのである。

そこでいま、半古典論で局在が再現できた例について、ユニタリ性の指標である確率の保存を調べてみる。半古典論で得られた波動関数の規格化定数を時間の関数としてみるのである。Fig. 2(c) からわかるように、ここで選んできた系に関しては、かなりよく確率が保存されている。このことから、Fig. 2(b) の結果は、確かに半古典論が局在をつくっているといえる。

次に、我々が調べた例のなかで、もう一方の極端なケースを Fig. 3 に示そう。この場合、計算したタイムスケールでは、量子論は時間と共にゆらぐことこそあれ、局在は起こしていない。ところが、Fig. 3(b) に見るように半古典論は非常に強い局在を示しているかのように見える。しかし、上と同じようにこの場合の半古典論の規格化定数を計算してみると、何と Fig. 3(c) のように指数関数的な割合で爆発を起こしているのである（図の縦軸が対数スケールであることに注意せよ。）。Fig. 3(b) でみた局在は、実はこの爆発していく規格化定数の値で、求められた波動関数を再規格化して得られたもので、単なる見かけ上のものに過ぎない。このような規格化定数の指数関数的爆発、あるいはユニタリ性の完全な破壊がおこってしまうと、波動関数の細かい位相や時間と共にみえる量子ゆらぎを再現できないことはおろか、半古典論は、如何なる意味でも量子論の近似とはみなしえなくなってしまう。この指数関数的な規格化定数の爆発は、我々がサーチした広範囲のパラメータ領域のなかで、きわめて頻繁に起こる現象で、Fig. 2 で示したようにうまく局在に成功するような例は、むしろまれな部類に属する。ほとんどの場合、遅かれ早かれ爆発が起こってしまうのである。また、注意を喚起したいの

は、規格化定数が爆発するときの指数である。この指数のことを我々は、系のユニタリー性の破れの程度を表す指標として、以下 Break-down Exponent γ と呼ぶことにするが、この γ は、常に $0 < \gamma < \alpha$ を満たし（今の場合 $\gamma \sim 0.3$ ）、その値は、考えている系のパラメータ K や、プランク定数 \hbar によって変化する。

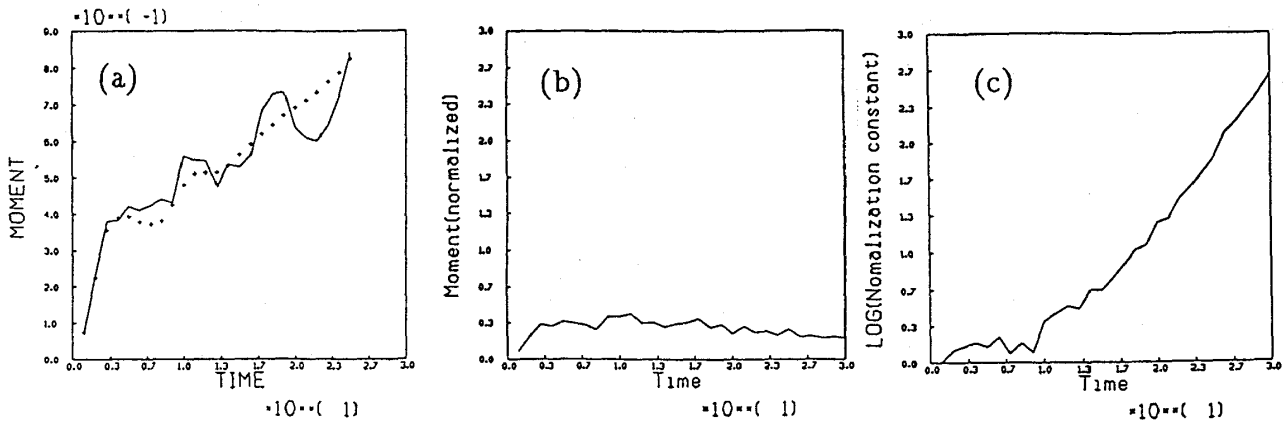


Fig. 3 (a) 古典論 (+印) 及び量子論 (実線) のモーメントの時間変化。(b) 半古典論モーメントの時間変化。(c) 半古典論の波動関数の規格化定数の時間変化。但し、 $K = 0.15$, $\hbar = 2\pi \frac{15}{2048}$

さてそうすると、半古典論にとって大事なものは、ユニタリー性の破壊による半古典論の破綻がどのようなプランク定数 \hbar でも起こるか、ということであるが、この問題は、あとで詳しく議論することにして、ここでは、以上の結果から明らかな次の重要な事実を指摘したい。既に、予備考察 2 で触れたように、もしも半古典論が、量子論の局在をつくることに成功するならば、半古典論のプロパゲータに寄与する古典作用は、(14) 式で与えられる程度の相関を持たなければならない。ところが、最初の例でみたように、半古典論は、少なくともプランク定数がある適当な値のときには局在をつくることに成功する。これは、とりも直さず、古典作用間に相関が存在することを強く示唆している。また、規格化定数の指数関数的爆発が起こってしまうような場合でも、実は、同様に古典作用間の相関の存在を意味している。何故ならば、もし古典作用間に全く相関がなければ、前述したように、それらはランダム位相で互いに打ち消し合い、その結果、半古典論の確率の保存は、古典論の確率保存によって保証されるからである。つまり、ここで示したいずれの例も、半古典論に寄与する古典作用間には相関が存在することを示しているのである。いま、扱っている系の古典力学は、相空間のあらゆる場所で不安定で、完全に双曲的な最も強いクラスのカオスを示す。よって、ここで予想される古典論の軌道間相関は、KAM トーラスやその残骸、あるいは、トーラスのまわりの淀み層が原因で発生するものではないことは言うまでもない。

これまでの結果から提起された、重要と思われる問題点を整理してみよう。まず、

半古典論を実際に数値計算により実行することによって、古典作用間には、相関が存在することが示唆された。我々は、その相関を具体的に提示し、それがどのような種類の相関なのかを知らなければならない。また、その軌道間相関はそもそもどのようなメカニズムで発生し、どのように記述すべきかも考える必要がある。これらは純粹に古典力学の問題である。

また、半古典論はその古典軌道間の相関があるが故に、ある場合には量子論の局在をつくることが可能であるが、多くの場合それに失敗する。その結果、規格化定数の指数関数的爆発を招き、半古典論は微塵に破壊される。たとえ、初期には局在を表現できるような場合でも、時間がたつといずれ半古典論は破綻する。その時、重要な問題は、半古典論の完全な破綻がプランク定数がゼロの極限でも起こってしまうのか、ということである。もう少し正確に言えば、上で定義した Break-down Exponent γ が、 $\hbar \rightarrow 0$ でどのように振る舞うかということである。もし、Break-down Exponent γ が、 $\hbar \rightarrow 0$ と共に代数的かあるいは、それと同程度の減少の仕方を示すならば、半古典論にとっては致命的であろう。

現時点では、これらの疑問に対する最終的な結論が得られているとは言い難い。しかし、以下に示すいくつかの解析によって、上に挙げた問題点に重要な知見を得ることができる。

まず、 $t = 0$ で、 $p_0 = 0$ に置かれた古典ラグランジュアン多様体の時間発展のおおよその様子を眺めてみる。Fig. 4(a)(b) に、横軸を初期の座標 θ_0 、縦軸に最後の運動量 p_t としてラグランジュ多様体を描いた図を、それぞれ 27 ステップ目と 29 ステップ目に対して示す。但し、図に示した範囲のなかのブランチ数が、ほぼ同じくらいとなるように、横軸のスケールは、ブランチ数の増大率に比例して縮小してある。2つの図を

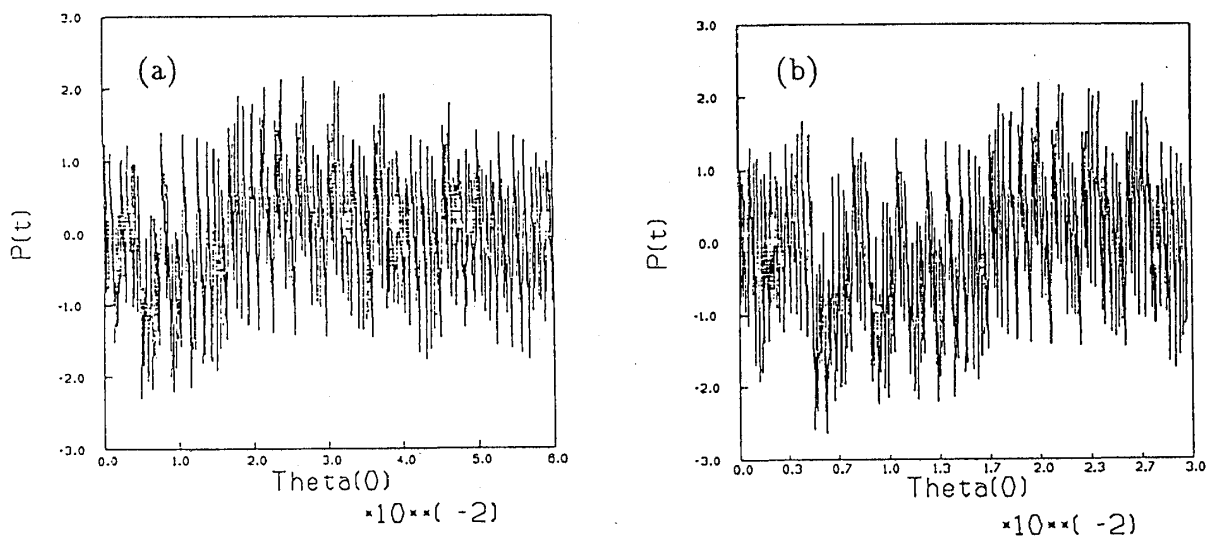


Fig. 4 時間発展したラグランジュ多様体。(a)27 ステップ目 (b)29 ステップ目。横軸は初期の座標 θ_0 、縦軸は終運動量 p_t 。

比較して気がつくことは、それぞれに、共通のパターンが部分的に存在していることである。また、ここでは示されていないが、ある時刻に対して、 θ_0 の位置をずらして多様体を見ていくと、同じように類似のパターンがたびたび出現する。これらの観察から、ラグランジュ多様体の時間発展を、フラクタル的なもので記述する可能性が期待されるが、実際はそれほど単純ではない。ここで現れたパターンの類似は、相空間の領域全体にわたっているのではなく、部分的なものではない。加えて、似たパターンを拡大して詳しくみると、細部に関しては異なっていることがわかるからである。

次に、古典作用間の相関をいくつかの方法で見てみる。最初に、半古典論のプロパゲータに寄与する古典軌道を、Fig. 4で表示したように、 θ_0 の関数として見たときの次の規格化相関関数、

$$C_\zeta(L) = \frac{\sum_i \cos\{(S_i^{(B)} - S_{i+L}^{(B)})\zeta\}}{N_t(p_0) - L} \quad (16)$$

およびそれを積分して得られる相関面積、

$$A_\zeta(L) = \sum_{k=0}^L C_\zeta(k) \quad (17)$$

を調べてみる。但し、 $\zeta = 1/\hbar$ で、 (B) は、半古典論のプロパゲータに寄与するブランチを意味する。ここでは、Fig. 5に27ステップ目の結果を示すが、得られる定性的な傾向は時刻によらない。規格化相関の図には、参考のためにブランチが完全にランダムに分布しているとしたとき得られる相関の様子を重ねて書いてある。両図とも、log-logプロットであることに注意すると、明らかに、初期の θ_0 で並べたときの、半古典論に寄与する古典作用には長距離の相関があることがわかる。相空間の離れた場所の間でも、古典軌道の間には強い相関があるのである。これは、上で見たように、遠く離れたところでも、ラグランジュ多様体に似たような構造が部分的に散在することに関係していると思われる。

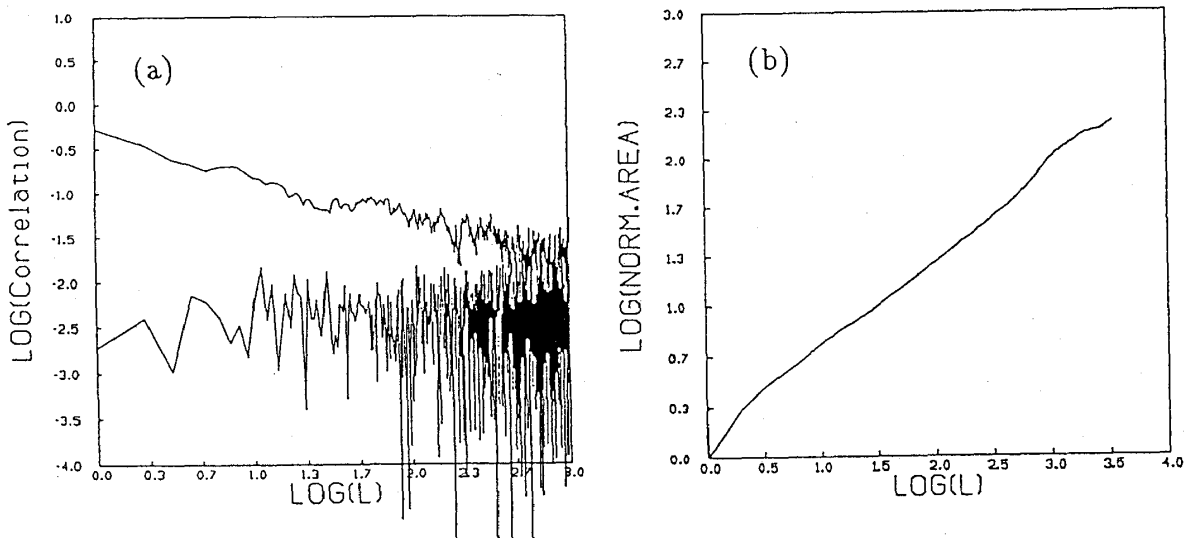


Fig. 5 (a) 規格化相関関数 $C_\zeta(L)$ 及び、(b) 相関面積 $A_\zeta(L)$ 。横軸の L は、ブランチを初期座標 θ_0 で並べたときのブランチの番号。但し、 $\zeta = 1$ 。

さらに別の、より直接的な方法で古典作用に存在する相関を見てみよう。まず、古典作用の値の差の分布 $P(|S_i^{(B)} - S_{i+L}^{(B)}|)$ を、初期の θ_0 の差（実際には、ブランチの番号の差 L ）で分けたものを調べてみる。（但し、得られた差 $|S_i^{(B)} - S_{i+L}^{(B)}|$ は、 2π で mod をとる。） Fig. 6 に、 $L = 1, 2, 20, 50$ の 4 通りの場合を示してある。Fig. 5 の結果からも推察されるように、 θ_0 が近いと、作用の差の分布は著しく一様分布から外れていることがわかる。そして、そのはずれかたは、 θ_0 が離れる（ L が大きくなる）に従って緩和される傾向にあるが、 θ_0 がかなり離れているところでも、依然として完全な一様分布にはなっていない。

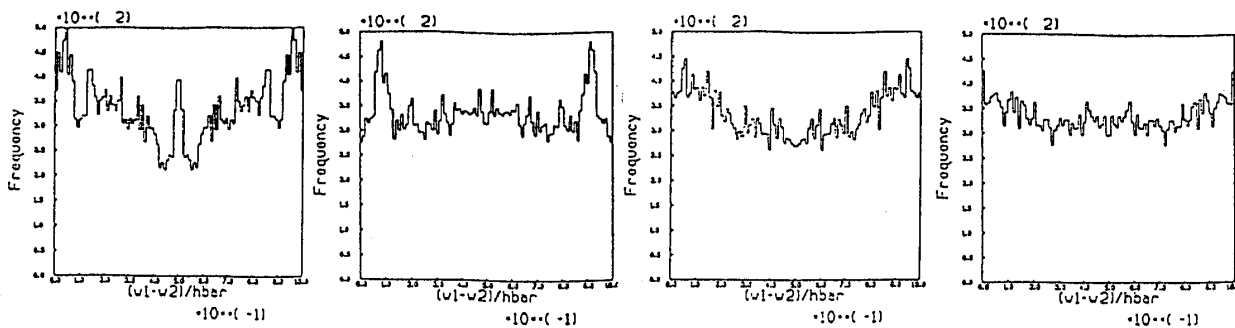


Fig. 6 古典作用の差の分布関数 $P(|S_i^{(B)} - S_{i+L}^{(B)}|)$ (但し、 $|S_i^{(B)} - S_{i+L}^{(B)}|$ に対して 2π の mod をとってある)。左から順に $L = 1, 2, 20, 50$ 。

さらに直接的に、今の初期の θ_0 でわけた古典作用の差の分布 $P(|S_i^{(B)} - S_{i+L}^{(B)}|)$ を、すべて重ねて、かつ 2π に対する mod をとるところをやめて、古典作用の差の分布関数そのものを見てみる。Fig. 7 いくつかの時刻を抜粋したものを示す。ここで、重ね書きされた実線のガウス分布は、得られたヒストグラムの裾の部分にフィットして決められたものである。時間発展の初期でも分布関数は、相当大きなゆらぎを示し、ガウス分布からのずれは、大数の法則から予測されるより大きい。さらに驚くべきことに、時間が進み、系の Lyapunov 数で与えられる古典カオスが初期条件の情報を喪失する時間をはるかに越えても、分布関数はガウス分布から有意のずれを示し、そればかりか、何らかの特徴的な形にカタマリつつあるように見える。0 付近のべき的にみえるスロープの部分は、最初に見た波動関数の規格化定数の爆発の元凶になっていることが予想される。このスケールの図から特に際だって見えるのは、ほぼ 0.3 周期位で繰り返すピーク列である。また、Fig. 8 に見るように、この分布関数を拡大すると、実はいま見えていたピーク列のそれぞれのなかにさらに細かいピークが存在していることがわかる。注意すべきは、0.3 周期で見えていた大きなピーク列は、時間が、23、24 ステップあたりで既に固定されているが、その上に乗るさらに細かいピークは同じ程度のタイムスケ

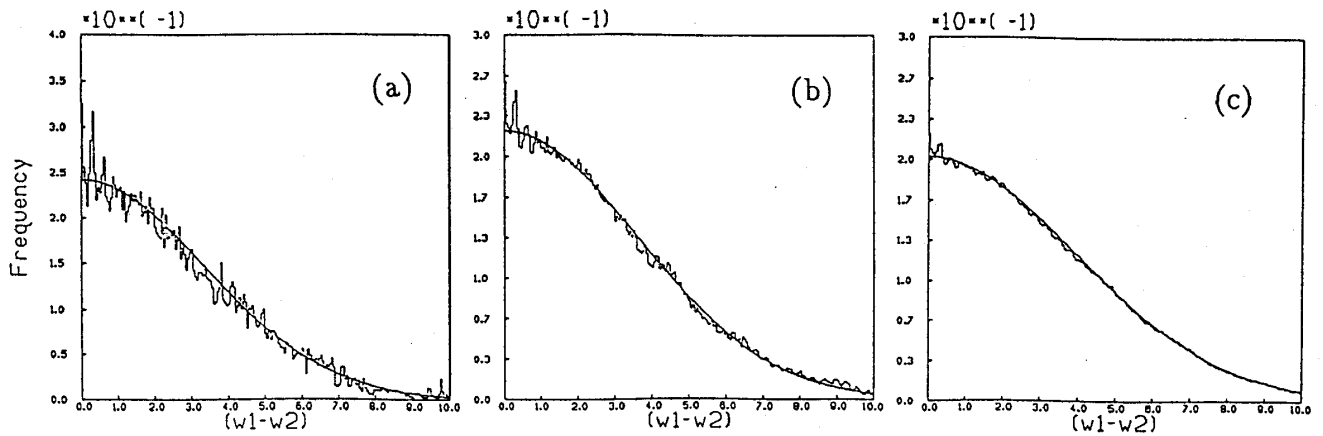


Fig. 7 古典作用の差の分布関数。(a)20 ステップ目、(b)24 ステップ目、(c)28 ステップ目。

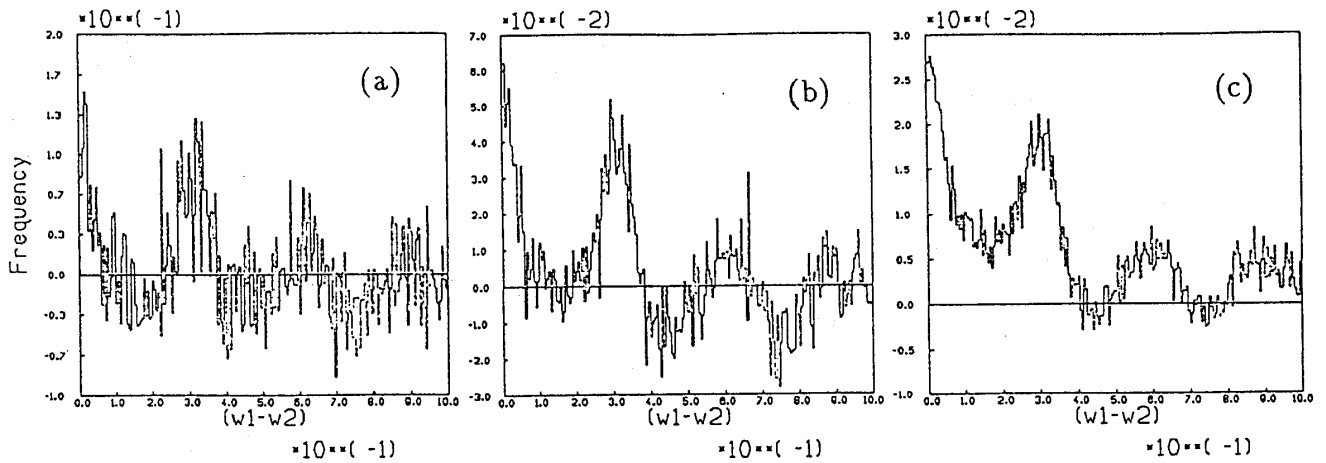


Fig. 8 古典作用の差の分布関数。Fig. 7 の 0.0 ~ 1.0 の部分の拡大図。(a)20 ステップ目、(b)24 ステップ目、(c)28 ステップ目。

ールではまだカタマリきっていない、ということである。分布関数のさらに高次の構造も、時間がたてば現れてくることが予想されるが、いまのところはっきりとは確認はされていない。

このような、古典作用の分布関数の自己相似的な成長過程をみると、通常はどこかにきれいなフラクタル的構造をつくるメカニズムが隠されていることを思い浮かべる。しかし、この分布の厄介な点は、おおまかな基本的形状は、ガウス分布の上に乗っていて、そこからのずれの部分が自己相似的にゆらいていることある。そして、そのゆらぎは、時間と共に固化していくのであるが、その固化する時間はどうやら自己相似構造の世代によって異なるらしい。このような、時間に対して自己相似構造を、ゆらぎのなか

に、ゆらぎながら成長させていく分布関数を我々はどのように記述すべきなのであるか。

とにかく、半古典論に寄与する古典作用の間には明確な相関が存在し、それを直接見る事ができた。ここでは、図として掲げなかったが、もう一つ重要なことがある。半古典論に寄与しない古典軌道、すなわち、終運動量がある与えられた p_t という条件を満足しないようなブランチをも全て含めた古典作用間の分布を調べてみると、実は、上で見たようなはっきりとした構造が見えにくくなる。裏を返すと、軌道間の相関は、半古典論のプロバゲータに寄与する条件を課されることによって、より強調されるのである。量子化のために選ばれる古典軌道が相関をもってゐるといってもよいかもしれない。このことは、また最後に議論する。

さて、さきに整理したもうひとつの問題を検討してみる。古典作用間の相関は、半古典論の時間発展のユニタリ性を破壊し、半古典論の長時間におよぶ適用を不可能にする。その時、規格化定数は、Break-down Exponent γ を呼んだ指数で指数関数的に爆発する。ここでは、その半古典論の破綻がプランク定数の関数としてどのように振る舞うかを注目する。いま扱っている系では、振幅因子があらゆる軌道に対して定数であるから、半古典論の波動関数の絶対値 2 乗は、

$$\begin{aligned} |\Psi_\zeta(p_t)|^2 &= \left| \frac{1}{N_t(p_0)} \sum_{k=1}^{N_t(p_0)} \exp iS_k \zeta \right|^2 \\ &= N_t(p_0) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{N_t(p_0)^2} \sum_i \sum_j \delta((S - (S_i - S_j))) \exp iS \zeta dS \quad (18) \end{aligned}$$

と表わされ、ちょうど Fig. 8 で求めた古典作用の差の分布関数の特性関数の役割を果たしている。 $|\Psi_\zeta(p_t)|^2$ を ζ の関数としてみたときの時間変化を追った結果を Fig. 9 に示す。ただし、図は ζ に関して適当な長さで smoothing してある。ひじょうに顕著なのは、 ζ に対する周期的な構造である。また、その構造は時間がたつにつれて、 ζ の大きい方から次第にカタまっていくことが見てとれる。いまみている量が古典作用の差の分布関数と (17) のような関係にあることと、上で調べた古典作用の分布関数の情報から、この ζ に対する周期的振動構造は、古典作用の差の分布関数でみつかった 0.3 周期の規則的な構造をみていることに他ならない。また、この図からは読みとりにくいですが、分布関数のさらに高次の構造も、 ζ に対するより長い周期の構造として見え始めている。

半古典論の破綻に関係する、 $\hbar \rightarrow 0$ 、つまり ζ の大きいところでの、 $|\Psi_\zeta(p_t)|^2$ の振舞いに注目すると、全体的には減衰していつてはいるもののその減衰の仕方はかなりゆっくりとしたもののように見える。これは、半古典論の $\hbar \rightarrow 0$ の極限での振る舞いに対する危険信号ともいえるが、もっと直接半古典論の破綻の様子を知るために、規格化

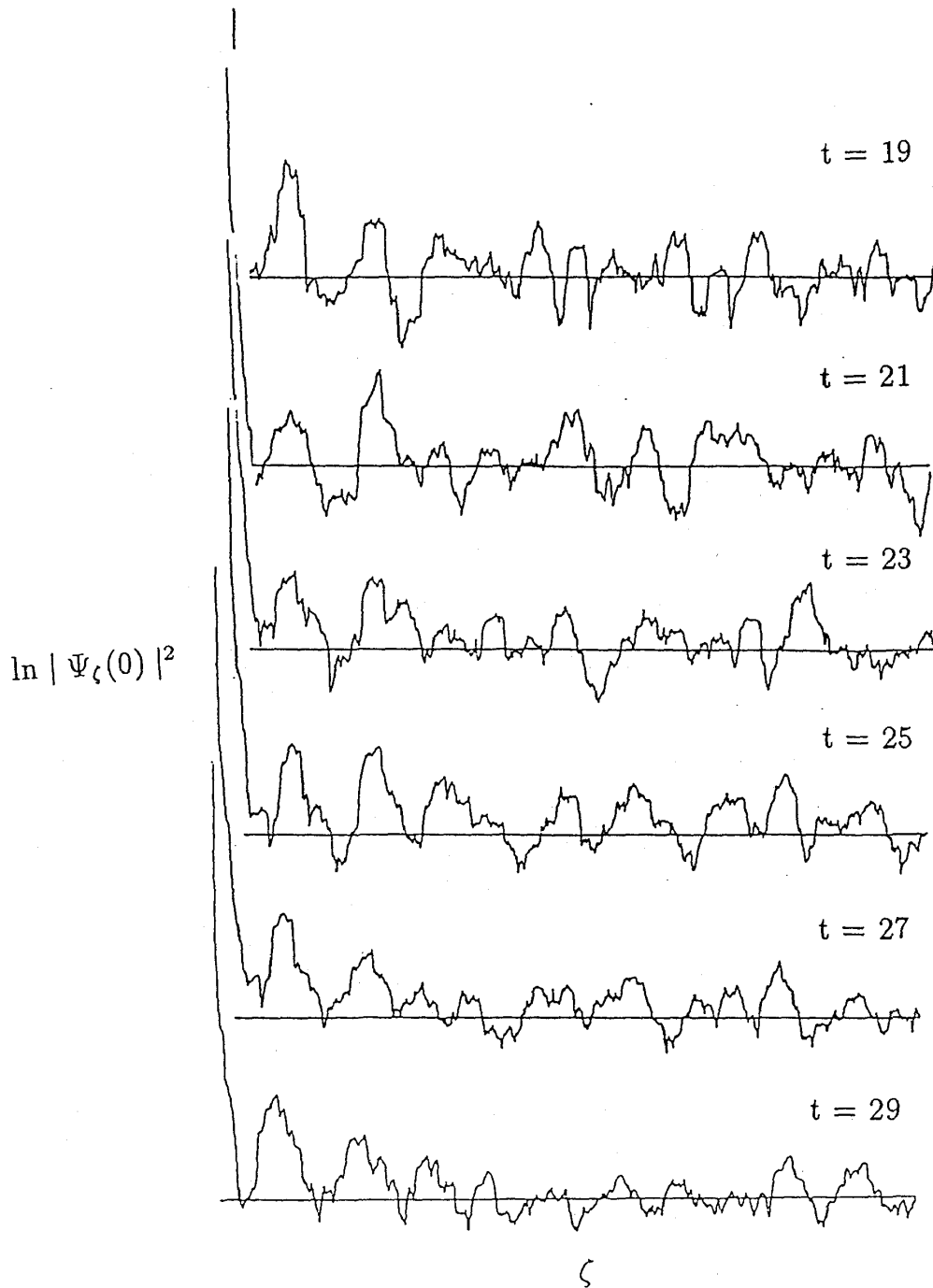


Fig. 9 $p_t = p_0 = 0$ での波動関数の絶対値二乗 $|\Psi_\zeta(0)|^2$ の ζ 依存性。横軸は ζ 、縦軸は $\ln |\Psi_\zeta(0)|^2$ 。

定数そのものを調べてみる。Fig. 10 に ζ の関数をしてみた規格化定数の計算結果を示す。 $|\Psi_\zeta(p_t)|^2$ でみられたのと同じ周期の規則的な構造がこの場合にも明らかに見られる。最初に示した半古典論が量子論の局在を再現する例は、この図にみられる谷の部分に対応する。また、全体の包絡線は、 ζ に関して非常に長いテイルを引いているようにみえる。このことは、 $\hbar \rightarrow 0$ の極限でもユニタリ性の破壊によって半古典論が破綻し

てしまう時間が極めて短いことを示唆している。

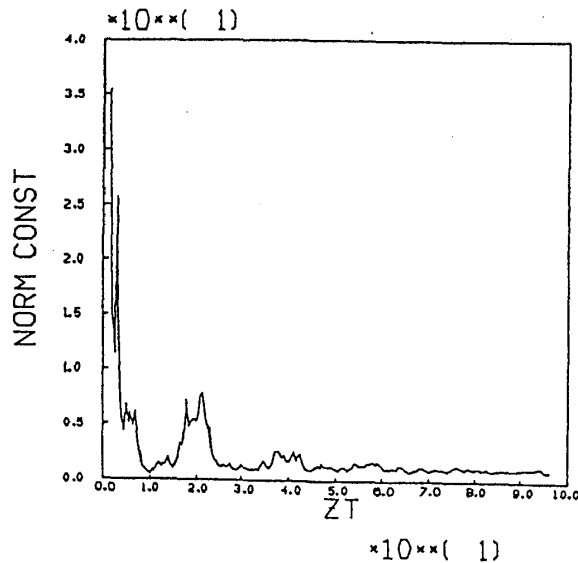


Fig. 10 半古典論の波動関数の規格化定数に対する ζ 依存性。図は、25 ステップ目に対する結果。横軸は $\zeta = 1/\hbar$ を表す。

同様なことが Break-down Exponent γ の ζ に対する振舞いについても現れている。Fig. 11 に示したのは、Break-down exponent の ζ 依存性である。前と同じように、作用の差の分布関数に現れた 0.3 周期の構造を反映した周期的な振動を伴い、長い裾をひきながら減衰していくのがわかる。計算機の限界上、残念ながらこれらの包絡線の正確なく依存性を決定するには至っていない。Break-down Exponent に関しては、Fig. 3(c) でみたように、爆発を起こすのは時間発展の最初からではなく、ある程度時間がたってからであるので、その決め方に若干の不確実性が残る。 $\hbar \rightarrow 0$ での振舞いをより簡単な別の尺度でとらえるか、もしくは何らかの理論的考察と組み合わせることによって、 $\hbar \rightarrow 0$ での漸近適振舞いを知ることは、半古典論の存立に緊要性をもった課題といえよう。

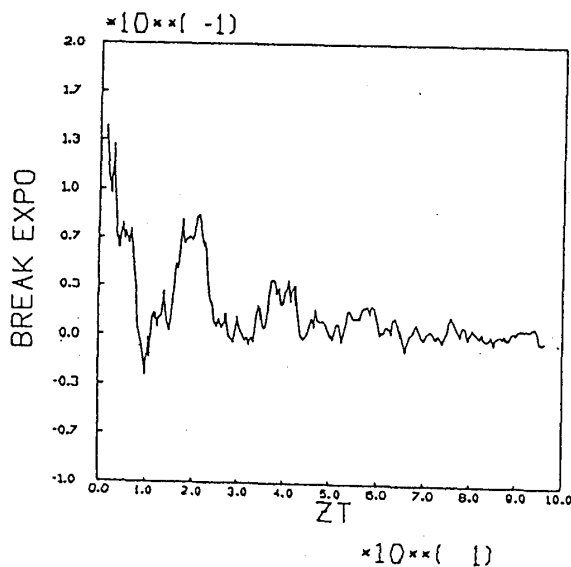


Fig. 11 Break-down Exponent γ の ζ 依存性。図は、25 ステップ目に対する結果。横軸は $\zeta = 1/\hbar$ 、縦軸は γ を表す。

いずれにしても、少なくとも我々の計算で調べた範囲内の \hbar では、時間がたつと半古典論は破綻してしまう。ここで注目した規格化定数は、波動関数の最も粗い情報であるから、量子論の波動関数のドゥ・ブロイ波長程度の細かい振動はもちろんのこと、もう少し粗い、モーメントの時間に関する量子揺らぎなども半古典論では既に意味を失っているように思われる。規格化定数が爆発しまった後では、半古典論はもともとの量子論とは何の関係もなく、量子論のいかなる情報をも保持していないのであろうか？ 実は、 ζ に対する粗視化をうまく施しよく調べてみると、規格化定数が爆発して半古典論が完全に意味をなくしているかのように見えても、半古典論は量子論の ζ に対する変化の情報を表現しているのである。量子論のモーメントを ζ の関数としてプロットしてみると、上の規格化定数や Break-down Exponent γ のときにみえていた同じ振動が現れるのである (Fig. 12)。この図をみると、規格化定数が爆発して大きな値をとる、

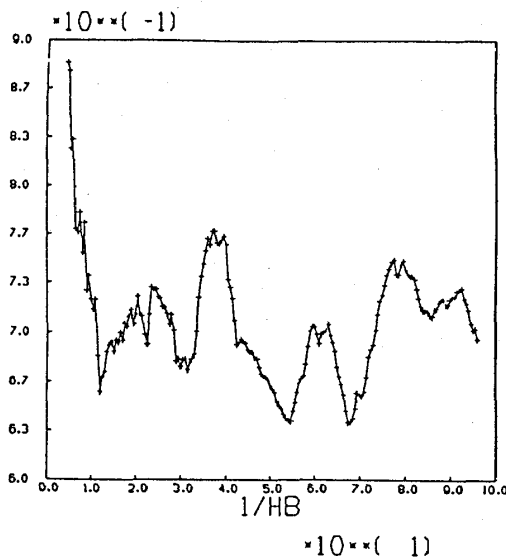


Fig. 12 量子論のモーメントの ζ 依存性。図は、20 ステップ目に対する結果で、 ζ に対して local に平均化 (幅 = 16) を施したあとのもの。横軸は $\zeta = 1/\hbar$ を表す。

あるいは Break-down Exponent γ が大きくなるときに合わせて量子論のモーメントが大きくなっているのがわかる。つまり、半古典論が古典作用間の相関をうまく処理して位相の相殺を行うことができなくなっているときには、量子論のモーメントも大きくなってしまふ。この時、図にはないが、量子論のモーメントの値は古典論のそれを上回っている。つまり、古典論の拡散を量子論の拡散が凌いでいるのである。また逆に、局在を比較的うまく表現することに成功し、半古典論の破綻の傷が浅いときには、局在を反映して量子論のモーメントは小さくなっている。つまり、古典作用の差の分布関数でみられた構造が、—それは古典ダイナミクスがつくる自己相似的構造の一部であったが— 量子論に反映しているのである。何故、半古典論は規格化定数が爆発してもさらにそのなかに量子論の情報を保持しているのか。いまのところ正確に答えることはできない。また、ここで見つかった ζ に対する振動の、量子論の側からの解釈も考えていかなければならない。

結論、議論

我々は、一般性をもちつつ、なるべく長期間半古典論の有効性をチェックすることが可能な piece-wise に quadratic なポテンシャルを用いて、時間領域の半古典論の有効性と限界を調べたところ、以下のような事実が明らかになった。

(a) カオス系の半古典論は、古典論と量子論の最も素朴な意味での対応の崩れる $\log \hbar^{-1}/\lambda$ という極めて短いタイムスケールを越えても有効性を発揮することはあるものの、時間が進めばいずれは波動関数の規格化定数の指数関数的爆発を起こし、ユニタリ性を破壊しつつ破綻する。

(b) 半古典論破綻の原因は、半古典論のプロパゲータに寄与する存在する古典軌道間の作用間に相関が存在することである。その相関は同時に、量子論の波動関数の動的局在の onset を表現するタネにもなっている。

(c) 古典軌道間の相関は、半古典的に寄与するブランチを選ぶことによって強調される。また、ブランチ全体にその相関は及び、ラグランジュ多様体の自己相似的な構造に関係している。しかし、古典作用の差の分布に現れる自己相似的な構造は、完全な自己相似的機構で記述できるものではなく、全体のガウス分布の上に乗って、時間と共にゆらぎつつカタマっていくという極めて微妙なものである。高次構造は時間がたつにつれて順次出現してくる。つまり、ほとんどはノイズといってもよいものの上に、ほんの僅かに現れている構造が、半古典論に現れる相関の正体である。

(d) 波動関数のユニタリ性の破壊は、プランク定数 \hbar を小さくしても依然として残り続ける。このことから、ここで見つかった破綻は、 $\hbar \rightarrow 0$ の極限でも起こる半古典論にとって致命的なものである可能性が強い。

(e) 古典作用の差の分布関数に現れる構造は、規格化定数自身やその爆発を特徴づける Berak-down Exponent の $\zeta = 1/\hbar$ 依存性に反映する。その ζ に対する周期的な構造は、対応する量子論のモーメントにも同様に現れる。

現段階で全ての事柄に対して断定的な結論が得られたわけではなく、未だ断片的な描像が得られたに過ぎないが、以上の結果の示す意味を検討してみたい。まず、当初の目的である時間領域の半古典論の限界について考える。我々がカオス系の半古典論を調べる理由は、既知（と思っている）言葉（＝古典論）を用いて対応する量子系で起こっていることを理解したいがためである。特に時間領域の半古典論は、いろいろな形式の半古典論の出発点であるから、その限界と効用を見極めることはカオス系の半古典論を知る上で避けて通る事ができない。最近研究が盛んなエネルギー領域の Gutzwiller の跡公式の導出も時間領域の半古典論を通過する。従って、ここで明らかになった時間領域の半古典論の破綻は、それら他の半古典論の存立基盤をも危うくする。では、そのことがカオス系に一般的なことであるならば、その半古典論が全く work しないタイムスケールで起こっている量子論の現象は、いったい古典カオスとどのような関係があると解釈したらよいのであろうか。そこから先は純量子的なタイムスケールで、古典カオス

とは何の関係もない、まさしく量子カオスの世界であると言っても何も言ったことにはならないだろう。

もちろん、いま問題にしている半古典論は、プランク定数 \hbar の2次まで展開した範囲内での近似理論であるから、さらに高次の、もしくは一様近似を進めた議論などを展開することにより、ある程度先の時間までいくことができるかもしれない。漸近級数を扱うWKB理論は、たとえ問題が一次元であろうとも、もともと収束しない発散級数をあつかっているのであるから、どこかで物理的描像を意識しながら議論を進めないと、何を目的としているのかわからなくなる恐れがある。可積分系の場合をお手本にとるならば、EBK量子化はトラスと量子準位との1対1対応という描像で一応の物理的な理解は得られる。もし漸近級数の高次の項までの挙動にこだわれば、複素軌道までふくめたWKB理論を構成することによりその依りどころを求めることができる。どちらにしても、系の振る舞いを半古典的に理解するためには、インプットとなる古典論がよくわかっていることが前提条件である。一方、カオス系では、我々は半古典論の形式と計算方法がわかっている、そこに入れる古典論を物理的解釈可能なマトマリとして理解できていない。それでは、たとえ高次の半古典論やより進んだ一様近似を実行しようと思ってもとてもおぼつかない。その部分をつなげる一つの鍵が、ここででの解析から浮かび上がってきた問題、すなわち古典作用間の相関ではないだろうか。ここでの結果から明らかになったことは、たとえ理想的にカオスを発生する系であろうと、必ずラグランジュアン多様体上の古典軌道間には相関がたまっていく、という既知の古典論に対する認識に反する事実である。このこと自体、半古典論を介した量子化、という見方をしたときはじめて浮き上がってくる、古典力学系自身に対する新たな問題提起であるものと考えられる。現時点ではそれを理解できたとは到底言えないが、ここで提示された見方は、従来までの古典カオスの見方には欠けていたものではなかろうか。ある意味で相補的な見方といえるかもしれない。また、この古典作用の相関が、半古典論を破壊する原因になっているが、ある場合には波動関数の局在のような純量子的振舞いを記述するタネになっている。このことは、より先のタイムスケールでの量子古典対応の記述のヒントがそこに隠されているということの意味しないだろうか。Complexityをもたない量子論がComplexityをもつ古典論からでてくるカラクリもそのあたりにあるのかもしれない。

極小波束を用いた量子古典対応が、“古典論の言葉に最も近い量子論の対象”で両者の対応関係をみていたことになるのであれば、ラグランジュ多様体、あるいはそのなかの半古典論に寄与する古典軌道のセットを用いての量子古典対応というのは、“量子論の言葉に最も近い古典論の対象”で両者を眺めることになっていると考えられる。従来の古典論に対する知識は、前者の見方に対しては蓄積が多いが、後者に対してはどうだろうか。少なくとも、ここで解析に用いた極めて単純な系でさえも（単純なのは、前者の古典論に対する見方から見てだけなのかもしれない）、古典作用の差の分布関数

を記述する適当な方法をわれわれは持ち合わせていないのである。

References

1. A. Voros, J. Phys. **A21**(1988)685; B. Eckhardt and E. Aurell, Europhys. Lett., **9**(1989)509; M. Sieber and F. Steiner, Phys. Lett., **A144**(1990)159; M.V. Berry, *Some quantum-to-classical asymptotics*, Lectures given at the Les Houches School on Chaos and Quantum Physics (August,1989).
2. B.L. Balazs and A. Voros, Phys. Rep., **143**(1986)109; R. Aurich, M. Sieber and F. Steiner, Phys. Rev. Lett., **61**(1988)483.
3. G. Casati, B.V. Chirikov, J. Ford and F.M. Izrailev, in:Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems, Lecture Notes in Physics **93**(1979)334.
4. J. Keating, Nonlinearity, **4**(1991)277; **4**(1991)307
5. P.W. O'Connor and S. Tomosovic, Ann. Phys. **207**(1991)218; A.M. Ozorio de Almeida and M. Saraceno, Ann. Phys. **210**(1991)1.
6. S. Tomsovic and E.J. Heller, Phys. Rev. Lett. **67**(1991)664; P.W. P'Connor and S. Tomosovic and E.J. Heller, Physica **D55**(1992)340.

三重対角行列の準位統計と直交多項式の漸近公式

東大・理 永尾 太郎

厳密な対称性をもたないハミルトニアン行列のエネルギー準位統計のモデルとして三重対角エルミート行列の固有値問題

$$\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & & & & \\ b_0^* & a_1 & b_1 & & & \\ & b_1^* & a_2 & b_2 & & \\ & & b_2^* & \cdots & & \\ & & & \cdots & b_{N-2} & \\ & & & & b_{N-2}^* & a_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix} \quad (1)$$

を考える。有限次の表現をもつハミルトニアンの準位統計は常に上の形の固有値問題の解に帰着され、固有値 λ の分布を調べることになる。従っていかなる準位統計の性質もその特別な場合として導かれるはずである。ハミルトニアンが対称性をもたないので固有値に縮退がない。そのために以下の性質を仮定する。

$$b_j \neq 0 \quad j = 0, \dots, N-2. \quad (2)$$

このとき固有値に縮退がないことが証明される。またこのときには固有値が対応する直交多項式の零点になることがわかる（ハミルトニアン行列の特性多項式が直交多項式になる）。

ここでは最も簡単な例として古典直交多項式に関連した三重対角化行列

(1) Jacobi model

$$A_n = -\frac{(a+b-1)(a-b)}{(a+b+n-1)(a+b+n)},$$

$$B_n = \frac{4n(2a+n-1)(2b+n-1)(2a+2b+n-2)}{(2a+2b+2n-3)(2a+2b+2n-2)^2(2a+2b+2n-1)},$$

(2) Laguerre model

$$A_n = a + n,$$

$$B_n = \frac{n(2a + n - 1)}{4},$$

(3) Hermite model

$$A_n = 0,$$

$$B_n = \frac{n}{2}$$

を考える。ただし

$$b_0 = \sqrt{B_1}e^{i\theta_0}, b_1 = \sqrt{B_2}e^{i\theta_1}, \dots, b_{N-2} = \sqrt{B_{N-1}}e^{i\theta_{N-2}},$$

$$a_0 = A_0, a_1 = A_1, \dots, a_{N-1} = A_{N-1}$$

である。 θ_j は任意の実数にとれる。

この場合には、顕著な性質として固有値の最近接間隔分布がデルタ関数で表されることが対応する直交多項式の漸近形¹⁾から証明される²⁾。すなわち最近接間隔は固有値列全体を通して一定であり、固有値分布のゆらぎがない。このようなゆらぎの喪失は一次元の調和振動子や井戸型ポテンシャルのような理想化された量子系のモデルで見られるものであるが、自然界ではほとんどの場合観測されない。よく知られた直交多項式はハミルトニアン行列の特性多項式としては例外的であることがわかる。自然界に存在する固有値分布のゆらぎを生じるのはどのような性質の直交多項式であるかが将来の興味深い問題である。

参考文献

- 1) G. Szegő, *Orthogonal Polynomials* (American Mathematical Society, 1959).
- 2) T. Nagao and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **62** (1993) No. 1.

編集後記

超低温、超高圧、超強磁場などの極端条件は、物質の本質をさぐる最強の探り針であろう。そして極端条件を一度手にすると、いつの間にか虜となる要素を持っている。極端条件になればなるほど、実験は著しく困難になるが、それを克服して新しい現象に出逢った時の喜びは格別である。難攻不落の山を征服した時の喜びと共通したものを感じる。ちなみに、今年正月にNHKで放映された世界最高の未踏峰ナムチャバルワ（7762m、チベット）の初登頂の記録は感動的であった。

極端条件を克服して新しい現象に出逢うと、その現象を解明するために更なる極端条件が必要になってくる。ただ、複数の極端条件が重なると、世界広しと言えども実現可能な施設は数えるばかりになる。

「しかし、指をくわえたまま眺めているだけではいけない。

限られた人生の中で、もし自分を奮い立たせるテーマを見つけた時は、もっと腰を軽くしようではないか。

日本いや世界に目を向け、世界でそこしか出来ない実験なら、そこに行こうではないか。」

そのような思いに駆られ、世界で其処しか出来ない実験を夢見つつ某国に行くことになった。

(N. K.)

物 性 研 究 第59巻第6号 (平成5年3月号) 1993年3月20日発行

| | | | |
|-----|---------|---------|-------------------------------------|
| 発行人 | 池田研介 | 〒606-01 | 京都市左京区北白川追分町 京都大学湯川記念館内 |
| 印刷所 | 昭和堂印刷所 | 〒606 | 京都市百万辺交叉点上ル東側 TEL(075)721-4541~3 |
| 発行所 | 物性研究刊行会 | 〒606-01 | 京都市左京区北白川追分町 京都大学湯川記念館内 |

年額 19,200円

編集後記

超低温、超高圧、超強磁場などの極端条件は、物質の本質をさぐる最強の探り針であろう。そして極端条件を一度手にすると、いつの間にか虜となる要素を持っている。極端条件になればなるほど、実験は著しく困難になるが、それを克服して新しい現象に出逢った時の喜びは格別である。難攻不落の山を征服した時の喜びと共通したものを感じる。ちなみに、今年正月にNHKで放映された世界最高の未踏峰ナムチャバルワ（7762m、チベット）の初登頂の記録は感動的であった。

極端条件を克服して新しい現象に出逢うと、その現象を解明するために更なる極端条件が必要になってくる。ただ、複数の極端条件が重なると、世界広しと言えども実現可能な施設は数えるばかりになる。

「しかし、指をくわえたまま眺めているだけではいけない。

限られた人生の中で、もし自分を奮い立たせるテーマを見つけた時は、もっと腰を軽くしようではないか。

日本いや世界に目を向け、世界でそこしか出来ない実験なら、そこに行こうではないか。」

そのような思いに駆られ、世界で其処しか出来ない実験を夢見つつ某国に行くことになった。

(N. K.)

物 性 研 究 第59巻第6号 (平成5年3月号) 1993年3月20日発行

| | | | |
|-----|---------|---------|-------------------------------------|
| 発行人 | 池田研介 | 〒606-01 | 京都市左京区北白川追分町 京都大学湯川記念館内 |
| 印刷所 | 昭和堂印刷所 | 〒606 | 京都市百万辺交叉点上ル東側 TEL(075)721-4541~3 |
| 発行所 | 物性研究刊行会 | 〒606-01 | 京都市左京区北白川追分町 京都大学湯川記念館内 |
| 年額 | 19,200円 | | |

会員規定

個人会員

1. 会費：

当会の会費は前納制になっています。したがって、3月末までに次年度分の会費をお支払い下さい。

| | | |
|-----|-----------------------|----------|
| 年会費 | 1st Volume (4月号～9月号) | 4,800円 |
| | 2nd Volume (10月号～3月号) | 4,800円 |
| | | 計 9,600円 |

お支払いは、郵便振替でお願いします。当会専用の振替用紙がありますので、下記までご請求下さい。郵便局の用紙でも結構です。通信欄に送金内容を必ず明記して下さい。

郵便振替口座 京都 1-5312

2. 送本中止の場合：

送本の中止は Volume の切れ目しかできません。次の Volume より送本中止を希望される場合、できるだけ早めに「退会届」を送付して下さい。中止の連絡のない限り、送本は継続されますのでご注意ください。

3. 送本先変更の場合：

住所、勤務先の変更などにより、送本先が変わる場合は、必ず送本先変更届を送付して下さい。

4. 会費滞納の場合：

正当な理由なく 2 Volumes 以上の会費を滞納された場合は、送本を停止することがありますので、ご留意下さい。

機関会員

1. 会費：

学校、研究所等の入会、及び個人でも公費払いのときは機関会員とみなし、**年会費19,200円**(1 Volume 9,600円)です。学校、研究所の会費の支払いは、後払いでも結構です。申し込み時に、支払いに書類(請求、見積、納品書)が各何通必要かをお知らせ下さい。当会の請求書類で支払いができない場合は、貴校、貴研究所の請求書類をご送付下さい。

2. 送本中止の場合：

送本の中止は Volume の切れ目しかできません。次の Volume より送本中止を希望される場合、できるだけ早めにご連絡下さい。中止の連絡のない限り、送本は継続されますのでご注意ください。

雑誌未着の場合：発行日より6ヶ月以内に当会までご連絡下さい。

物性研究刊行会

〒606 京都市左京区北白川追分町 京都大学湯川記念館内
電話 (075)753-7051, 722-3540
FAX (075)722-6339

昭和42年11月14日 第四種郵便物認可
平成5年3月20日発行(毎月1回20日発行)
物性研究 第59巻 第6号

物性研究 59—6 (3月号) 目次

| | |
|----------------------------|-----|
| ○研究会報告 | |
| 「保存力学系カオスにおける古典論と量子論」..... | 687 |
| ○編集後記..... | 856 |
| ○目録 (Vol. 58, 59) | 857 |

昭和42年11月14日 第四種郵便物認可
平成5年3月20日発行(毎月1回20日発行)
物性研究 第59巻 第6号

物性研究 59—6 (3月号) 目次

| | |
|----------------------------|-----|
| ○研究会報告 | |
| 「保存力学系カオスにおける古典論と量子論」..... | 687 |
| ○編集後記..... | 856 |
| ○目録 (Vol. 58, 59) | 857 |