

# 多価第一積分による、双曲的周期解回りでのカオスの解析

名大・理・物 石井 雅治

## 0. 始める前に

双曲的周期解をもつコンパクトな可積分力学系に摂動が加わるとこの周期解の回りに激しいカオスが発生することが知られている。この場合、不変集合の複雑な振舞いから1価な保存量の非存在が示される。だが局所的にはこの解の回りにも保存量は存在する。そこで力学系の定義域を複素領域に拡張し局所的積分を解析接続して多価第一積分を構成しその多価性の挙動から周期解の近傍でのカオスを解析する。この手法を使い、メルニコフ=ポワンカレの手法よりも深く、双曲的周期解回りでのカオスをとらえることができる。結局、非摂動系には安定多様体と不安定多様体を滑らかに接合し入れ換える“入れ換わり特異点”が存在するのだが、これは摂動不安定でありこの消失によりホモクリニックカオスが発生するのである。また楕円的周期解の近傍でもこの手法を使い、周期解の個数と周期の間に、エルゴード性と関連するある代数的関係式が成立すること、有理数に近い回転数をもつ不変トーラスは摂動で壊れやすいことを示せる。

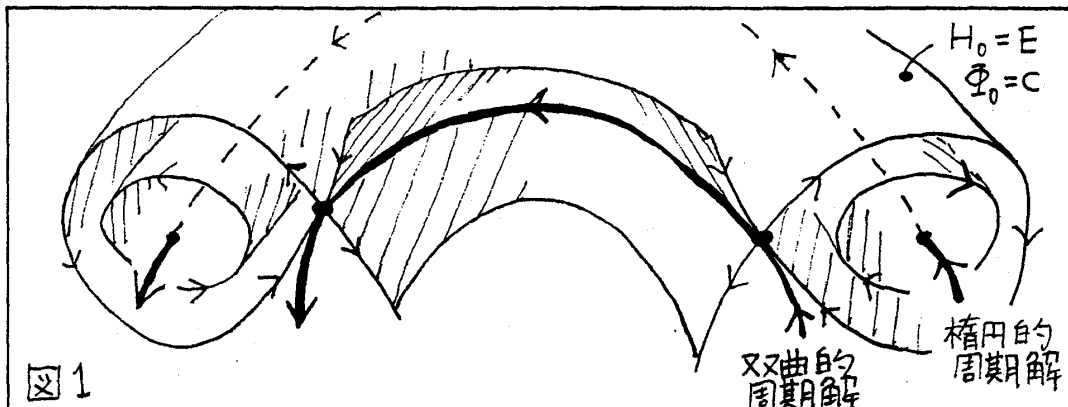
## 1. 考える力学系、とそのやり方

ここで考えるのは摂動項のついた2自由度ハミルトン系

$$\begin{aligned}
 H(p, q) &= H_0(p, q) + \epsilon H_1(p, q) , \\
 \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial p} \\ -\frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix}, \quad p, q \in \mathbb{C}^2, t \in \mathbb{C}
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

で、非摂動な  $H_0$ 系が独立な第一積分  $\Phi_0$ を有し図1のようなトーラスを含む不変集合をもつものである。 $H_0 = E$ ,  $\Phi_0 = C$  の定める代数多様体の特異点集合

$$S = \left\{ (p, q) \in \mathbb{C}^2 \mid \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial p} & \frac{\partial \Phi}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} & \frac{\partial H}{\partial q} \end{pmatrix} < 2 \right\}, \tag{2}$$



つまり周期解、の近傍から考察を始める。この近傍において正則な局所的積分の解析接続を考えこの操作で生じる特異点の機能や多価性の構造を通して系の大域的振舞いを探る。2. では積分の解析接続の性質を議論して、ポワソネマップの一種である“モノドロミーマップ”を導入する。3. ではモノドロミーマップを使い代数的な手法で周期解の個数と周期との関係式を導く。4. では双曲周期解近傍と、安定/不安定多様体近傍で系を考察し、“入れ換わり特異点”という概念を作って安定多様体と不安定多様体の交叉を議論する。5. では楕円的周期解近傍で摂動により新たに生じる周期解を考察し、この生成領域が有理数に近い回転数をもつ不変トーラスが存在した近傍の薄い領域であることを示す。

## 2. 多価第一積分とそのモノドロミーマップ

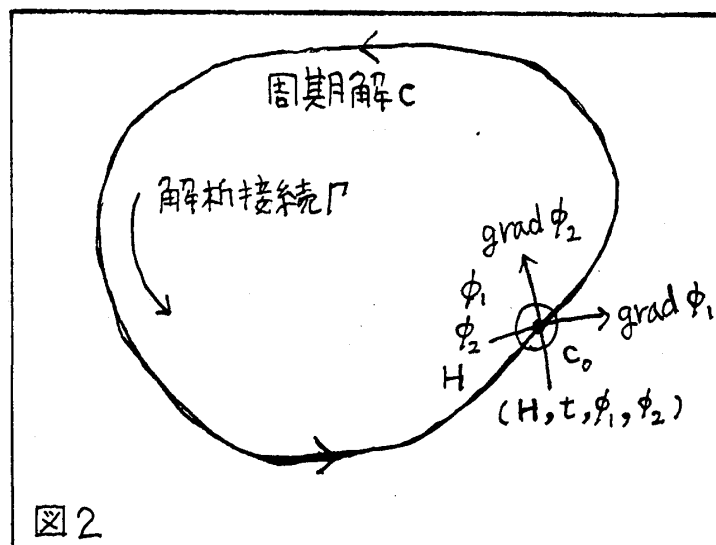
一般に  $n$  次元力学系は、不動点以外の各点の近傍で時間を含まない独立で正則な  $n - 1$  個の第一積分を持つことが知られている。このことは微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad x \in \mathbb{C}^n, \quad t \in \mathbb{C} \quad (3)$$

の  $f(x_0) \neq 0$  なる点  $x_0$  の近傍で、適当な局所座標の変換  $y: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  が存在して

$$\frac{dy_1}{dt} = 1, \quad \frac{dy_i}{dt} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n) \quad (4)$$

を満たすことと同値である。 $y_i = y_i(x)$  は時間発展しないので点  $x_0$  の回りの積分なのである。図2のように周期解  $c$  上の点  $c_0$  をとるとこれは明らかに不動点ではないから、この近傍で  $H$  と独立で正則な積分  $\phi_1, \phi_2$



がとれる。 $c_0$  近傍の正則関数を  $c$  に沿って再び  $c_0$  に達するまで解析接続する操作を  $\Gamma$  と書くことにする。 $\Gamma$  はすべての正則関数に対して可能であるとは限らないが  $\phi_1, \phi_2$  について次の 1) ~ 3) の性質が成立することを示せる。

- 1)  $\Gamma\phi_1$  が存在する。一般に局所的積分は、定義域を解析接続してやると多価になることに注意。
- 2) 関数関係の不変性により、時間発展のベクトル場

$$\mathbf{v}_t = \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \quad (5)$$

に対して

$$0 = \mathbf{v}_t \phi_i = \mathbf{v}_t \Gamma \phi_i \quad (6)$$

が成立するから各  $\Gamma \phi_i$  も系の積分である。だから

$$\Gamma \phi_i = (\Gamma \phi_i)(\phi_1, \phi_2) \quad (7)$$

と表せる。

- 3)  $\phi_1, \phi_2$  は摂動が十分小さいときには常に存在する。

以上の性質を合わせ結局

$$\Gamma \phi_i = (\Gamma \phi_i)(\phi_1, \phi_2, \epsilon) \quad (8)$$

となる。さらに系の保則性から

$$d\Gamma\phi_1 \wedge d\Gamma\phi_2 = d\phi_1 \wedge d\phi_2 \quad (9)$$

であるよう  $\phi_1, \phi_2$  を選ぶことができる。(8) より  $\Gamma\phi$  は  $c_0$  の近傍で1種のポワソナレマップと見なせる。これもモノドロミーマップと呼ぶ。 $\Gamma\phi$  は一般に  $\phi$  に関する2次元非線形写像になる。

### 3. モノドロミーマップと周期解

点  $c_0$  の近傍で局所座標として  $(H, T, \phi_1, \phi_2)$  をとり、 $c_0 = (0, 0, 0, 0)$  となるように積分や時間を選んでおく。この近傍の点  $(H_0, t_0, \phi_{10}, \phi_{20})$  を通る  $m$  周期解は次の方程式により定まる。

$$\begin{pmatrix} \phi_{10} \\ \phi_{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\Gamma^m \phi_1) & (\phi_{10}, \phi_{20}) \\ (\Gamma^m \phi_2) & (\phi_{10}, \phi_{20}) \end{pmatrix}, \quad H = H_0. \quad (10)$$

これを周期解の決定方程式と呼ぶことにする。 $\Gamma\phi_1$  が  $M_1$  個の点を1点に写し、 $\Gamma\phi_2$  が  $M_2$  個の点を1点を写すとき、モノドロミーマップ  $\Gamma\phi$  は  $M(=M_1+M_2)$  次退化であると定義しておく。以上の準備のもとで代数的手法を使い  $m$  周期解の個数を評価してみよう。

まず1周期解を考える。決定方程式は適当な線形変換で

$$\begin{aligned} & \text{線形変換} \\ \Gamma\phi - \phi & \iff \\ a(\phi_1, \phi_2) & \begin{pmatrix} \phi_1^k + a_{k-1}(\phi_2)\phi_1^{k-1} + \cdots + a_0(\phi_2) - \phi_1 \\ \phi_1^\ell + b_{\ell-1}(\phi_2)\phi_1^{\ell-1} + \cdots + b_0(\phi_2) - \phi_2 \end{pmatrix} \\ & =: a(\phi_1, \phi_2) \begin{pmatrix} P(\phi_1) \\ Q(\phi_2) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

と変形できる。ここで  $a$  は  $c_0$  近傍で0にならない正則関数であり、 $P$  と  $Q$  は  $\phi_1$  に関する多項式でワイヤストラス多項式と呼ばれている。一般性を失うことなく  $\ell \leq k$  と仮定できる。このとき  $P$  を  $Q$  で割りその余りの多項式を  $r_0$  とおくと、 $r_0$  の  $\phi_1$  に関する次数  $\deg r_0$  は  $\ell$  より小さい。この操作を有限回くり返すと  $\phi_1$  を含まない  $r_N$  を得られる。

$$\begin{aligned} P &= Qq_0 + r_0 \\ Q &= r_0q_1 + r_1 \\ r_0 &= r_1q_2 + r_2 \\ r_1 &= r_2q_3 + r_3 \\ &\vdots \\ r_{N-2} &= r_{N-1}q_N + r_N. \end{aligned} \quad (12)$$

というのも  $\deg r_{i+1} < \deg r_i$  であるからだ。 $r_N$  の作り方から

$$P = Q = 0 \Rightarrow r_N = 0 \quad (13)$$

でなくてはならない。この1連の操作は消去法(ユークリッドの互除法)、 $r_N$  は終結式、と呼ばれている。 $r_N$  は  $\phi_1$  を含まないので  $c_0$  の近傍で0にならない正則関数  $h$  が存在し

$$r_N = h(\phi_2) \prod_{i=1}^{\sim M} (\phi_2 - \kappa_i) \quad (14)$$

と因数分解できる。 $\kappa_i$  は  $r_N$  の零点でその個数は  $M$  程度になる。周期解  $c$  が存在するから  $r_N$  は少なくとも  $\phi_2 = 0$  を零点にもつ。

いまの議論を  $m$  周期解の場合に適用してみよう。適当に線形変換して

$$\Gamma^m \phi - \phi \Leftrightarrow a^{(m)} \begin{pmatrix} P_m \\ Q_m \end{pmatrix} \quad (15)$$

と変形しておく。 $\Gamma^m \phi$  は  $\Gamma \phi$  を  $m$  回合成したものであるから、

$$\deg P_m = k^m, \quad \deg Q_m = \ell^m \quad (16)$$

が成り立つ。従って  $P_m, Q_m$  に対応する終結式  $r_{N(m)}^{(m)}(\phi_2)$  は  $M^m$  個程度の零点をもつことになる。1つの  $m$  周期解は決定方程式の  $m$  個の解に対応するから、結局その個数は  $M^m/m$  個程度になる。この結果は多項式の次数を評価しただけで、重複解や実数解以外の解も勘定しているから、実空間に表れる周期解はこれより少なくなる。また  $\Gamma \phi$  が  $c_0$  の近傍を再び  $c_0$  の同じ近傍内に写す場合にしか (15) は意味をもたないから、双曲的ではなく楕円の周期解の回りでこの結果が成立する。周期解が指数的に増殖するためには  $1 < M$ , つまりモノドロミーマップの非線形性が本質的な役割を果たしていることがわかる。

#### 4. 双曲的周期解の回りより

ここでは双曲的周期解の形によってモノドロミーマップの形を限定し、系のいくぶんか大域的な振舞いを調べる。安定多様体、不安定多様体が  $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0$  にそれぞれ対応するよう  $\phi_1, \phi_2$  をとっておく。このときマップは保測性によりある実数  $\gamma$  が存在して

$$\Gamma \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

となる。 $\delta f_1, \delta f_2$  は摂動の効果で、 $\phi_1$  と  $\phi_2$  の関数である。 $\epsilon = 0$  のときは  $\delta f_1 = \delta f_2 = 0$ , また積分  $\Phi_0$  は  $c_0$  の近傍で

$$\Phi_0 = \phi_1 \phi_2 \quad (18)$$

と因数分解できる。 $0 < \epsilon$  のときこの可約性は双曲的不变集合の摂動に対する安定性に対応する。図3 参照。

点  $c_0$  の近傍では次のことがわかる。

- 1) 摂動に対して不变集合は安定であり連続的に存在する ([1] Moser)。
- 2) 周期解は一般に増殖しない。というのも  $m$  周期解の決定方程式は

$$\Gamma^m \phi - \phi = \begin{pmatrix} (\gamma^m - 1)\phi_1 + \delta f_{m1} \\ (\gamma^{-m} - 1)\phi_2 + \delta f_{m2} \end{pmatrix} = 0 \quad (19)$$

であり、 $\gamma \neq 1$  であれば  $m$  を大きくしても  $|\gamma^m - 1|$  が大きくなるから、結局任意の  $m$  に対し (19) では1次の項が支配的で  $\phi_1 \sim \phi_2 \sim 0$  以外の解は存在しない。

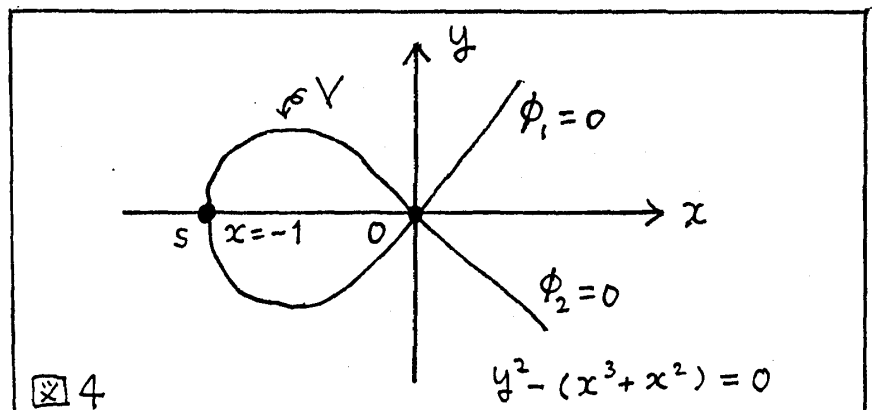
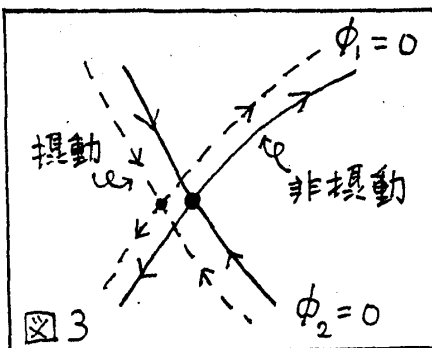
これらのことから摂動が加わっても双曲的周期解近傍での系の振舞いは可積分な場合とほとんど変わらないことがわかる。しかし  $\phi_1, \phi_2$  を安定/不安定多様体に沿ってさらに解析接続して行くと次の事実が明らかになる。

- 3) 非摂動時には安定多様体と不安定多様体を滑らかに接合し入れ換える  $\phi_1, \phi_2$  の特異点が存在し可積分性を成立させている。これを“入れ換わり特異点”と呼ぶことにする。

以下この入れ換わり特異点を詳しく考察する。簡単なモデルでこれを見てみよう。 $\Phi = y^2 - (x^3 + x^2)$  とおき  $\Phi = 0$  の定める代数多様体  $V$  を考える。 $\Phi$  は

$$\phi_1 = y - x\sqrt{1+x}, \quad \phi_2 = y + x\sqrt{1+x} \quad (20)$$

によって  $\Phi = \phi_1 \phi_2$  と因数分解できる。これを図4に示す。 $\phi_1, \phi_2$  は原点近傍では正則だが  $s = (-1, 0)$  に代数的特異点をもつ。 $\phi_1 = 0, \phi_2 = 0$  の定める多様体は  $s$  で滑らかに接合し入れ換わることにより  $V$  を構成している。つまり  $s$  は入れ換わり特異点なのである。このモデルに限らず入れ換わり特異点はホモクリニックな構造を持つ系に必ず存在することが代数的方法により証明できる。またこれは摂動不安定であり、小



さな摂動に対してもただちに消失することが示せる。たぶん摂動により  $\phi_1, \phi_2$  が  $s$  を超えてほんのわずかに解析的に延長され図5のように横断的結節点が発生すると推定される。入れ換わり特異点の概念によりホモクリニックカオスの生成機構は次のようにまとめられる。

- 1) 摂動により入れ換わり特異点  $s$  が消失する。
- 2)  $s$  の消失により安定多様体と不安定多様体の入れ換わりがなくなり系の可積分性が破れる。
- 3) 摂動の型によっては2) のとき、安定多様体と不安定多様体の横断的交叉が生じてホモクリニックカオスが発生する。

摂動によりまず  $s$  の近傍で交叉 (PIP) が発生する可能性もあり、この近傍を詳しく調べることによって、ホモクリニックカオスに対するより深い理解を得られるかも知れない。

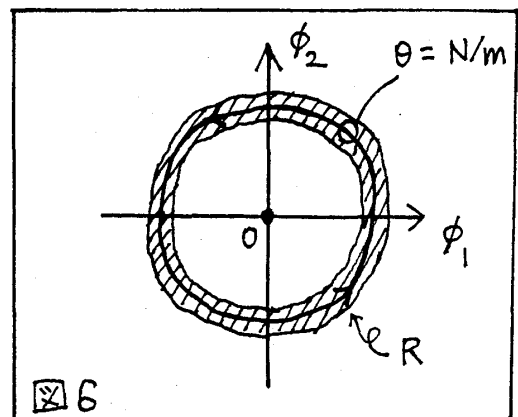
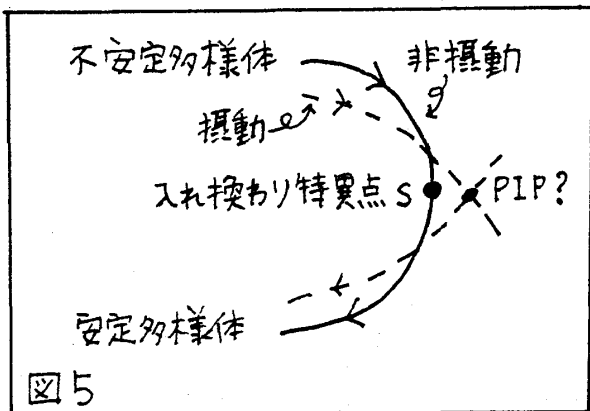
### 5. 楕円的周期解の近傍にて

楕円的周期解の近傍では  $m$  周期解を考察する。まずモノドロミーマップを次のようにモデル化し、そのモデルを解析する。

$$\begin{aligned} \Gamma\phi &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \delta f_1 \\ \delta f_2 \end{pmatrix}, \\ \theta &= \theta(\phi_1^2 + \phi_2^2), \\ \theta(0) &= 0, \quad \frac{d\theta(x)}{dx} > 0. \end{aligned} \tag{21}$$

$\delta f_1, \delta f_2$  は摂動の効果である。周期解の決定方程式  $\Gamma\phi^m - \phi = 0$  は

$$\begin{pmatrix} \cos m\theta - 1 & -\sin m\theta \\ \sin m\theta & \cos m\theta - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \delta f_{m1} \\ \delta f_{m2} \end{pmatrix} = 0 \tag{22}$$



である。小さい $\epsilon$  に対し $\delta f_{m1}, \delta f_{m2}$  も小さいことに注意。いま

$$m\theta \sim 2\pi N \quad (N \in \mathbb{N}) \quad (23)$$

とすると

$$\begin{aligned} \sin m\theta &\sim \sin 2\pi N = 0, \\ \cos m\theta - 1 &\sim \cos 2\pi N - 1 = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

がなりたつ。(23) の条件は $\theta$  が有理数  $N/m$  に近い図6の斜線の薄い環状領域  $R$  に対応する。 $R$ 上では(22)の摂動項が支配的になり

$$\delta f_{m1} \sim 0, \quad \delta f_{m2} \sim 0 \quad (25)$$

が決定方程式になる。またこのような  $m$  は無数に存在する。これは双曲的周期の近傍では見られない現象である。(25) が支配的になる  $R$  の幅は摂動パラメータ $\epsilon$  との比で決まるのだが摂動が大きいほどこの幅が大きくなることは自明である。 $\delta f_{m1}, \delta f_{m2}$  の退化次数が2以上であれば3. の議論から周期解が増殖しうることがわかる。

このモデルの範囲でわかることをまとめると、結局楕円の周期解の回りでモノドロミーマップが非線形な摂動の効果をもつなら摂動により、有理数に十分近い回転数をもつ周期解から成る不変トーラスが壊れて、その場所で周期解が増殖するということになる。この増殖は周期を  $m$  とすると  $M^m/m$  程度であり、モノドロミーマップの非線形性がエルゴード的な周期解分布を引き起こすと考えられる。

## 6. まとめ

局所的な第一積分を周期解の回り、不変集合の回りで解析接続して、その時に生じる多価性や特異点の考察により以下の結果を得た。

- 1) ホモクリニック的不変集合は非摂動時に入れ換わり特異点をもつ。
- 2) 入れ換わり特異点は摂動に対し不安定である。
- 3) 入れ換わりの消失はホモクリニックカオスの必要条件である。
- 4) 楕円の周期解の回りの有理数に近い回転数をもつ不変トーラスは摂動で壊れやすい。
- 5) 4) で壊れる領域の幅は薄い摂動量の増加関数である。
- 6) 摂動でトーラスが壊れると周期解が増殖し、 $m$  周期解が  $M^m/m$  個程度表れる。



7) 6) は局所的積分の解析接続のモノドロミー写像が非線形であることから生じる。

## 参考文献

[1] J. Moser, Commun. Pure & Appl. Math. 9(1956) 673.