

## スムーズな周期外力系の準固有状態に 現れる位相の複雑さ

九工大・情報工 高橋 公也

周期外力系やkicked systemは取扱の簡単さから、多くの量子系のカオスの研究に使われている。これらの系は周期  $T$  をもったハミルトニアン

$$\hat{H}(t+T) = \hat{H}(t) \quad (1)$$

で特徴付けられ、一周期の時間発展を与えるユニタリー演算子  $\hat{U}_T$  の固有状態（準固有状態）を自励系の固有状態に代わるものとして用いることが可能である。ユニタリー演算子  $\hat{U}_T$  と準固有値  $\varepsilon_n$ 、準固有関数  $u_n$  の関係は

$$\begin{aligned} \hat{U}_T |u_n\rangle &= \exp(-i\varepsilon_n) |u_n\rangle \\ &= \exp(-i(\varepsilon_n - 2\pi m(n))) |u_n\rangle \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで  $m(n)$  は任意の整数である。 $m(n)$  の任意性を取り払えば、準固有状態を自励系の固有状態と同等のものとして見なして解析を進めることができ便利である。外力のない系の固有状態から連続的に外力を増加させ、外力のない系の固有値と準固有値を連続的につなげることにより (2) 式に現れる  $m(n)$  を決定することが可能である。この様にして準固有値にエネルギー固有値としての意味を形式的にもたせることができる。

$$E_n / \hbar = \varepsilon_n - 2\pi m(n) \quad (3)$$

kicked systemでは、(3) 式で与えられる‘エネルギー’を固有値と思えば、形式的には自励系と同じ様に取り扱える。しかし、このような取扱からは‘量子カオス的な振舞い’と自励系の可積分的な振舞いを明確に区別することは量子的な不確定性の壁に阻まれ不可能である。これに対し、スムーズな周期外力系では連続的な時間変化を問題とすることが可能であり、準固有状態は時間変化の中に自励系の固有状態とは異なる複雑さを見いだす事が可能となると考えられる。例えば、1自由度の準固有状態を1自由度自励系の固有状態を比べる場合、マップとして見れば両者の間の違いを明確にすることは困難を伴うことが多い。しかし、連続的な時間領域の

変化に注目すれば、両者の間の違いを明確にすることが可能であろう。

この報告では、準固有関数に現れる位相の複雑さに注目する。自励系の固有関数の時間に対する位相変化は単位時間当たり  $-\varepsilon_n/\hbar$  であり、全ての点で一定であるのに対し、準固有関数の位相の変化は自励系とは異なり各点毎に異なった位相変化が可能であると考えられる。各点における位相を  $\theta_n(t, q)$  とすると、(2) 式より一周期の各点における位相の変化  $\theta_{nT}(q)$  は次の関係式を満たさなければならない。

$$\begin{aligned}\theta_{nT}(q) &= \theta_n(T, q) - \theta_n(0, q) \\ &= \int_0^T \dot{\theta}(t, q) dt \\ &= -\varepsilon_n + 2\pi m(n, q)\end{aligned}\quad (4)$$

従って、各点における位相の変化の複雑さは整数  $m(n, q)$  の座標依存性を調べることにより判定可能であると考えられる。ここでは、簡単な系の数値実験によりこの事実を具体的に調べてみよう。取り扱った系は以下に示すような double well ポテンシャルをもつ 1 自由度系に周期外力を加えたものである。

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2} p^2 - \frac{1}{2} q^2 + \frac{1}{16} (1 - 0.4 \sin \omega t) q^4 \\ \omega &= 0.7 \quad \hbar = 0.08\end{aligned}\quad (5)$$

ここで、数値的に容認できる誤差  $ER$  を以下の様に決めた。

$$\begin{aligned}\theta_{nT}(q) &= -\varepsilon_n + 2\pi m(n, q) + ER \\ ER &< 0.001\end{aligned}\quad (6)$$

また、空間のサンプル点の間隔  $\Delta q$  は十分に細かく取る必要がある。ここでは、

$$\begin{aligned}\Delta q &= \left(\frac{2\pi\hbar}{256}\right)^{1/2} \times \frac{1}{8} \\ &\sim 0.00554\end{aligned}\quad (7)$$

とした。

以下、具体的なシュミレーションの結果を示そう。

図1 (a), (b), (c)に古典的なKAMトーラスに対応する準固有状態の場合の結果を示す。図1 (a)に示す伏見関数はこの準固有状態がKAMトーラスに対応していることを示している。図1 (b)に、座標 $q$ と1周期の位相の蓄積 $\theta_{nT}(q)$ の関係を示す。 $\theta_{nT}(q)$ は $q$ に対してほぼ一定ではあるが、わずかな揺らぎを含んでいる。ただし、準固有関数 $u_n$ の絶対値の小さいところ即ち $q$ の大きい所では急激に位相の蓄積( $\theta_{nT}(q)$ の絶対値)が大きくなっているのが観測される。 $\theta_{nT}(q)$ の値分布を図1 (c)に示す。値分布からも $\theta_{nT}(q)$ の揺らぎが小さいことがわかる。

図2 (a), (b), (c)に、強いカオス状態の結果を示す。ここで、各(a), (b), (c)は図1のそれらと対応している。 $q$ と $\theta_{nT}(q)$ の関係や $\theta_{nT}(q)$ の値分布から、 $\theta_{nT}(q)$ の値が大きく揺らいでいて、 $\theta_{nT}(q)$ が $q$ のirregularな関数になっていることがわかる。また、この場合でも、 $|u_n|$ の小さい所で位相の蓄積が大きくなっていることが観測される。

図3 (a), (b), (c)は、強い局在化を示す準固有状態の結果である。図2の場合と同様に、 $\theta_{nT}(q)$ の値は大きく揺らぐが、座標の短い区間では、ほぼ一定値を取ることが多い。この事は、 $\theta_{nT}(q)$ の値分布が連続的な分布と言うよりは多数のピークの集まりで構成されているという事実に反映されている。この場合でも、 $|u_n|$ の小さい所で位相の蓄積が大きくなっていることが観測される。

このような位相蓄積の揺らぎは $q-t$ 空間における孤立ゼロ点の分布によって特徴付けることが可能である。図4に示す様に、2つの近接する点 $q = q_0$ ,  $q = q_0 + \Delta q$ における位相のずれが時間と共に増大し、ずれの大きさの絶対値 $|\theta_n(t, q_0) - \theta_n(t, q_0 + \Delta q)|$ が $\pi$ に達したときゼロ点が発生する。従って、近接する点の間の位相が絶対値として $2\pi$ ずれたとすると少なくともそのずれが起こった時間内に2つの点の間に1つの孤立ゼロ点が発生しているはずである。この事から、1周期における隣接する2つの点の間の位相のずれは、2つの点の間に発生したゼロ点の数に $2\pi$ を掛けたものを上回ることがないことがわかる。

$$\begin{aligned}
 & |\theta_{nT}(q_0) - \theta_{nT}(q_0 + \Delta q)| \\
 &= |2\pi m(n, q_0) - 2\pi m(n, q_0 + \Delta q)| \\
 &\leq 2\pi \times (q = q_0 \text{ と } q = q_0 + \Delta q \text{ の間に発生したゼロ点の個数})
 \end{aligned}$$

(8)

図5に強いカオス状態の $u_n$ の実数部のnodal lineとゼロ点の分布を示す。図には10分の1周期( $0 \leq t < T/10$ )の場合が示されているが、たくさんの孤立ゼロ点が発生しているのがわかる。図には示さないが、局在化がある場合には、波動関数の絶対値が大きな値をとる所でゼロ点の発生が少なくなる。この為座標 $q$ の短い区間で位相のずれが一定値を取ることが多くなる。KAMトラスに対応する準固有状態の場合も図には示さないが、カオス状態とは異なったゼロ点の分布が見られる。自励系のゼロ点は空間的に固定された点上にあるために $q-t$ 空間で見ると $q$  = 一定の線上に連続的に分布するが、KAMトラスの場合には自励系の様相を色濃く残し、ゼロ線が部分的にちぎれた形で存在し、孤立的なゼロ点の発生はきわめてまれである。従って、位相のずれが起こりにくくなる。

結果として、 $q-t$ 空間のゼロ点の発生の様子を探る事により準固有状態に現れる位相のずれの複雑さを定性的に理解できる事が分かった。定量的な特徴付をすることが今後の課題である。最後に、この研究と結び付くと思われるいくつかの問題について、コメントしておこう。KAMトラスに対応する準固有状態を断熱的な変化と見なすと、断熱的な変化が起きている場合は、波動関数の時間-座標空間上の孤立ゼロ点の発生がほとんど起きていない状況であると考えられる。孤立ゼロ点発生のメカニズムを半古典近似等を用いて理解する事が出来たとすれば、断熱な変化を起こすための条件を正確に把握出来るようになると考えられる。2自由度以上の系でこれと同じシュミレーションを行えば、カオス状態にある固有状態の断熱不変性の議論が可能になる。もう1つの注目すべき点は、波動関数の絶対値の小さな部分で大きな位相のずれが見られたことである。このことから、カオス的な波動関数の絶対値が小さな部分の様相は非常に複雑であると考えられる。従って、トンネル効果等の絶対値の小さな部分の様相が本質的に重要になる様な現象では絶対値が小さな部分の解析が必要不可欠になると考えられる。

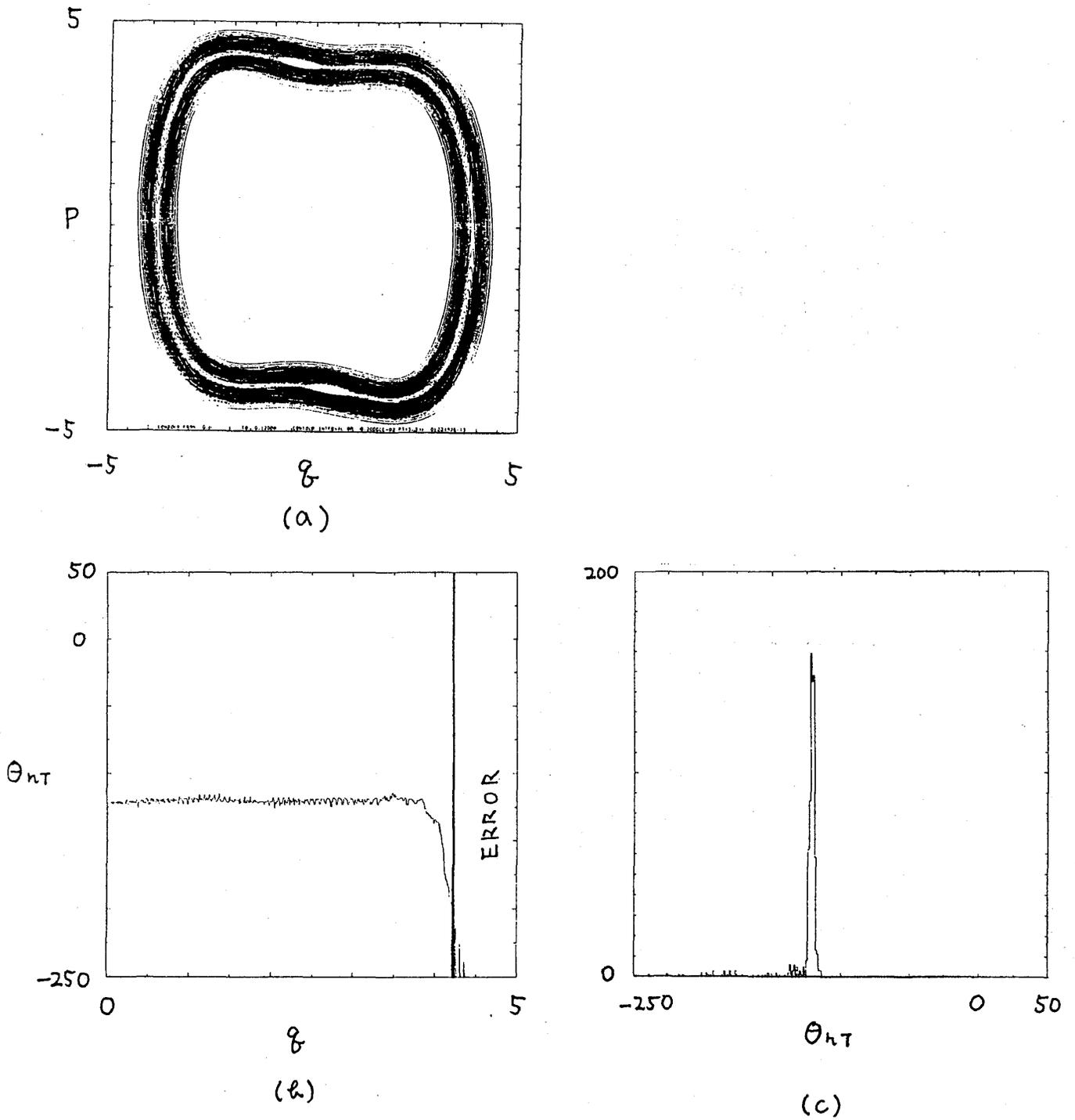


図 1. KAM トーラスに対応する準固有状態のシュミレーション

(a) 伏見関数

(b)  $\theta_{nT}(q)$  の座標依存性.  $\theta_{nT}(q)$  は  $q=0$  に対して対称なので  $q \geq 0$  の場合のみ示す.

(c)  $\theta_{nT}(q)$  の値分布

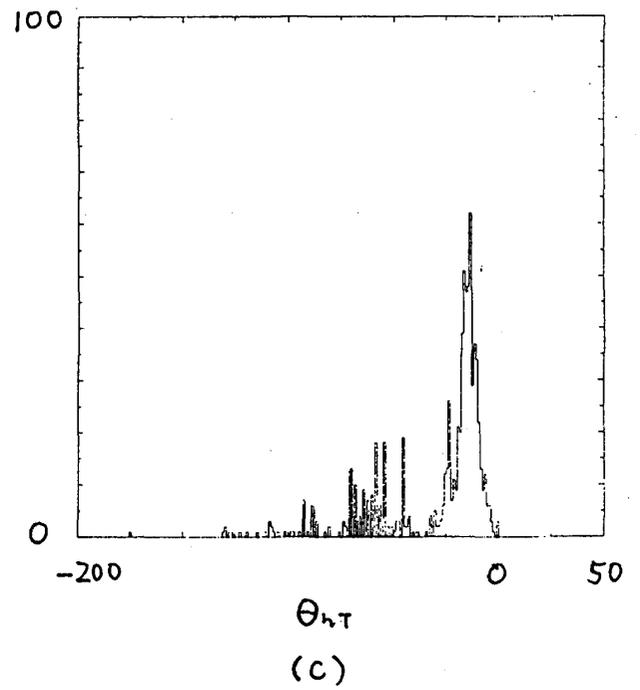
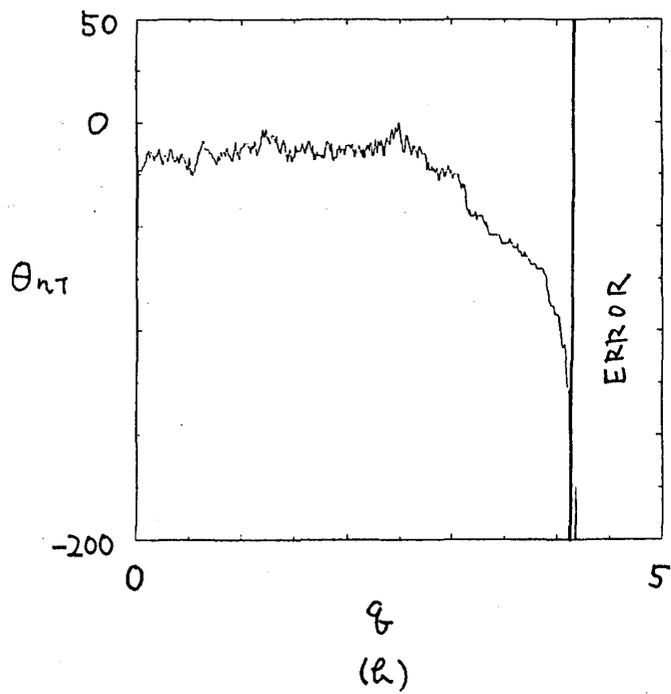
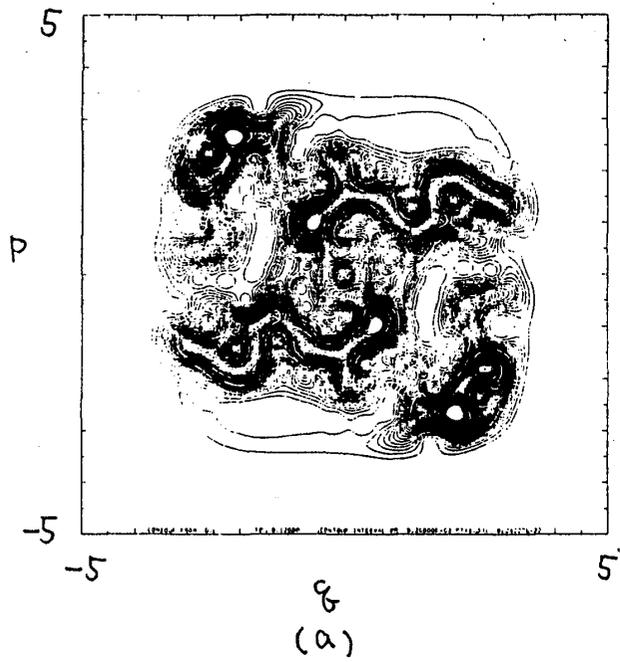


図 2. 強いカオス状態をしめす準固有状態のシュミレーション

- (a) 伏見関数
- (b)  $\theta_{nT}(q)$  の座標依存性.
- (c)  $\theta_{nT}(q)$  の値分布

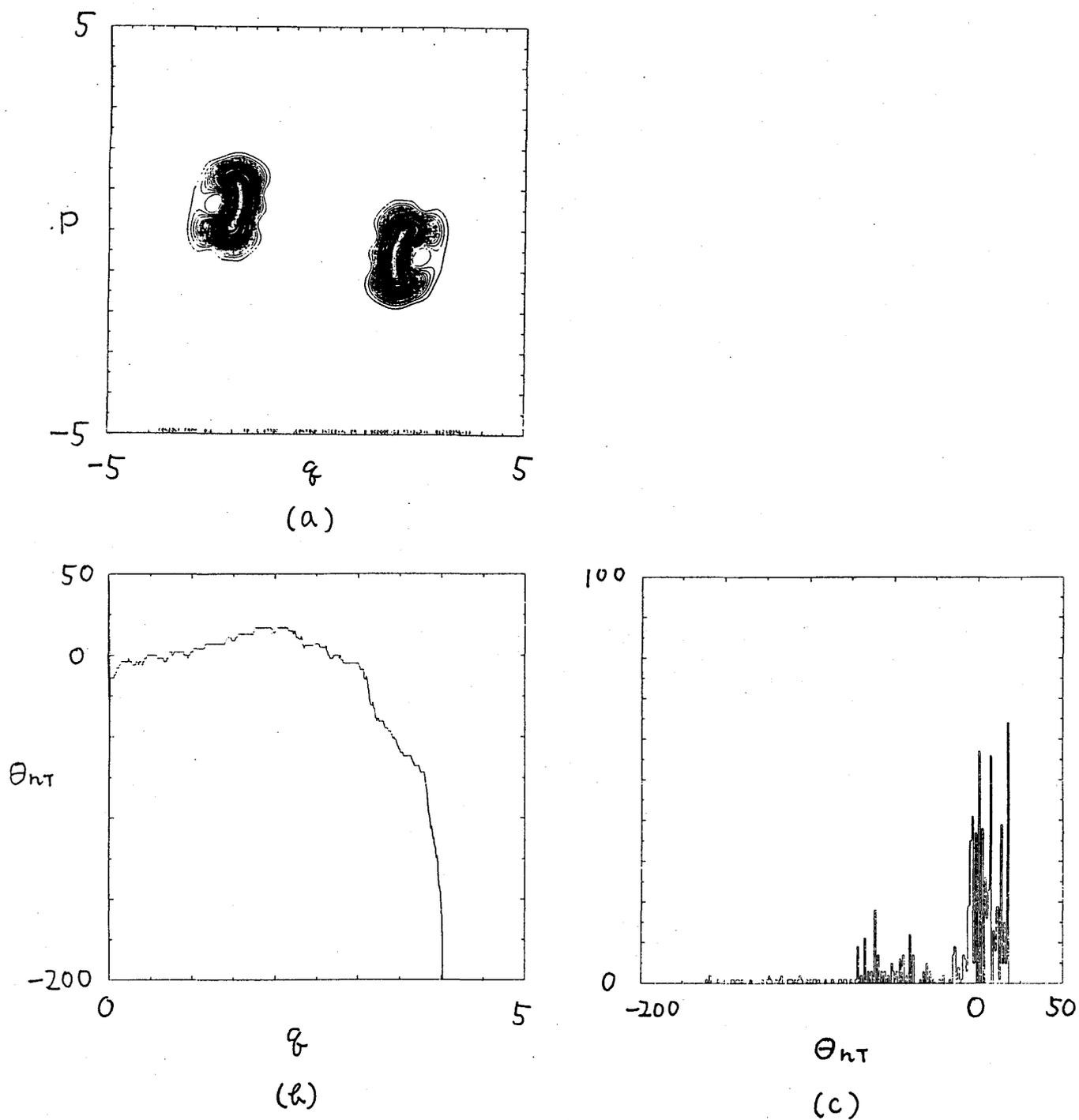


図 3. 局在化した準固有状態のシュミレーション

(a) 伏見関数

(b)  $\theta_{nT}(q)$  の座標依存性.

(c)  $\theta_{nT}(q)$  の値分布

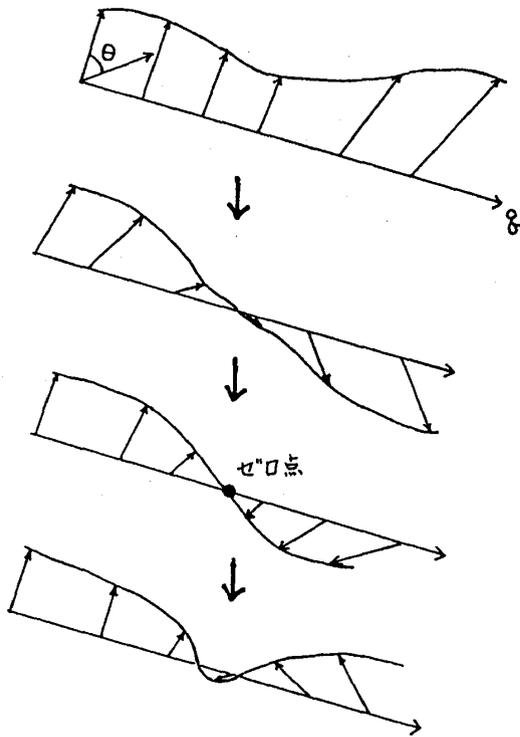


図4. ゼロ点発生メカニズム

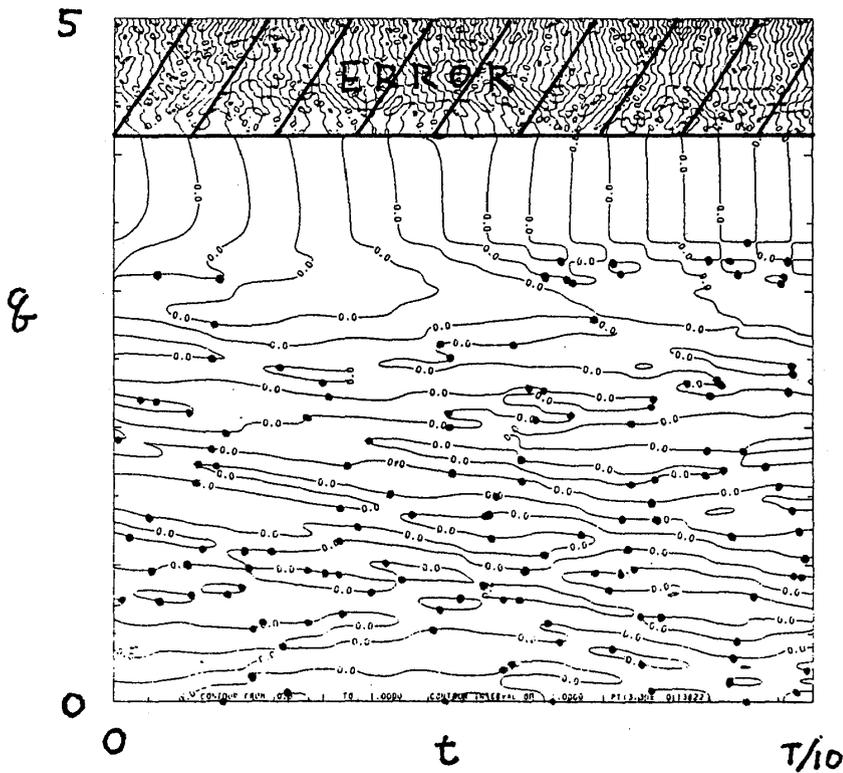


図5. 強いカオス状態を示す準固有状態の時間座標空間 ( $t - q$ ) 上における実部の nodal line とゼロ点の分布 ( $0 \leq t < T/10$ ).