

トポロジカル・ソリトン解を持つ ゲージ場理論に現われるカオス

九州芸工大 河辺 哲次

1 はじめ

素粒子論におけるヤンミルズ場（非可換ゲージ場）方程式の解のカオス構造について以下の事柄が知られている。

1) 時空間依存性を持ったヤンミルズ場（ゲージ場）のモノポール解は、摂動に対して不安定であり、カオスを生じる[1, 2]。

2) ヤンミルズ・ヒッグス系に対しては、レギュラー相とカオス相の二相が存在する[3]。

3) 場の一様な空間近似モデルでも、二相構造が現われる[4]。

SO(3)モノポール解は、ゲージ場理論における有限エネルギーのトポロジカルなソリトン解の一例である。このようなトポロジカルなソリトン解としては、他に、U(1)ヴォルテックス解[5]やSU(2)スファレロン(sphaleron)と呼ばれる鞍部点解[6]等が知られている。これらの解も、物理的に重要であり様々な角度から個別に調べられている。

本研究会では、このようなソリトン解も、一様な空間近似の枠内では二相構造が見られること、従って、モノポールで見い出された二相構造が、ソリトン解を持つゲージ場理論に共通した現象である可能性が強いことを議論した。この報告書では特にスファレロン解に話題を絞る。

2 モデル

複素スカラー場とゲージ場の相互作用を次式で定義する：

$$L = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + (D_\mu \phi)_a^\dagger (D^\mu \phi)_a - V(\phi)$$

$$V(\phi) = \lambda (\phi_i^\dagger \phi_i - \frac{1}{2} v^2)^2$$

$$(D_\mu \phi)_i = \partial_\mu \phi_i - ig (A_\mu)_{ij} \phi_j$$

$$(A_\mu)_{ij} = A_\mu^a T_{ij}^a \in G$$

場が空間に関して一様であるという仮定をおく：

$$A_i^a = A_i^a(t) \quad \phi_a = \phi_a(t)$$

この結果、ラグランジアンから次の運動方程式を得る：

$$\ddot{A}_i^a + g^2 (A_i^a A_j^b - A_j^a A_i^b) A_j^b + g^2 A_i^b \phi + \{T^a, T^b\} \phi = 0$$

$$\ddot{\phi}_a + g^2 A_i^l A_i^m T_{ab}^l T_{bc}^m \phi_c + 2\lambda (\phi_j^+ \phi_j - \frac{1}{2} v^2) \phi_a = 0$$

今、SU(2)スファレロン解の場合にヤンミルズ場とスカラー場を次式のように仮定する：

$$A_i^a = \varepsilon_{aij} a_j(t) \quad \phi = i\vec{\tau} \cdot \vec{b} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

この時、次のようなハミルトン力学系を得る。

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + W(x, y)$$

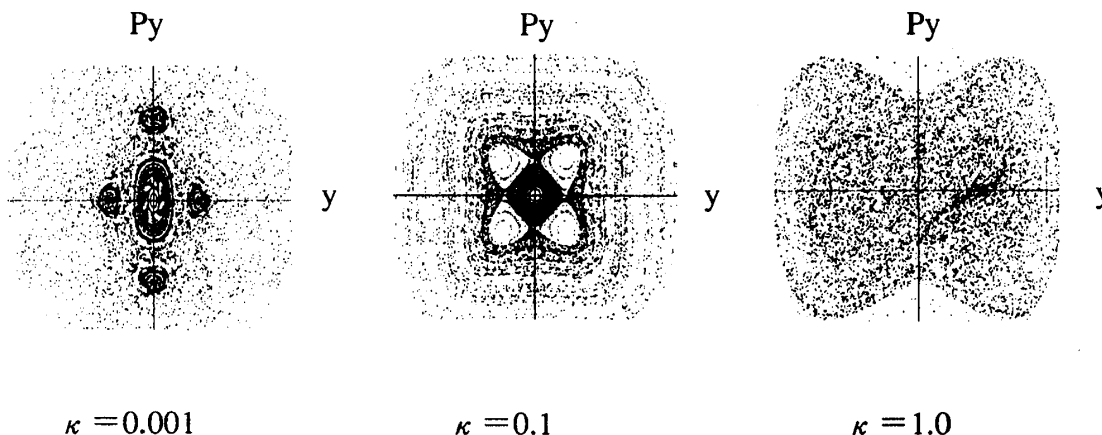
$$W(x, y) = \frac{\beta}{4} x^4 + \frac{\alpha}{2} x^2 y^2 + \frac{\kappa}{4} (y^2 - 1)^2$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{g^2} \quad \alpha = \frac{1}{4} \quad \beta = \frac{1}{2}$$

このハミルトン力学系は、明らかにモノポール解の場合と同じ数学的構造をしている[4]。

3 ハミルトン力学系のダイナミクス

このハミルトニアンは、ポテンシャル $W(x,y)$ 内部での粒子の運動を記述する。従って、この系のダイナミクスを調べるために、先ず、粒子軌道のポアンカレ断面を調べる。ポアンカレ断面は、 $x=0, P_x \geq 0$ で定義し、 (y, P_y) 平面上のプロットで与える。初期値を30個として計算した結果を次に示す。



次に、位相空間に占めるカオス相とレギュラー相の割合が、結合定数の大きさと共にどのように変化するかを調べる。このために、位相空間を 50×50 の格子点に分け、この格子点を初期値としてリアプノフ指数を結合定数毎に求めた。この結果を次の表に示す。

κ	0.001	0.01	0.1	1.0	5.0
chaos / (chaos + order)	0.62	0.24	0.01	0.94	0.01

結合定数の値によって、ほぼレギュラー相だけ ($\kappa = 0.1$) の場合と、カオス相だけ ($\kappa = 1.0$) の場合が実現し、その間の相転移の存在も分かる。このように、結合定数の大きさと共に位相空間に占めるカオス相とレギュラー相の割合が変化したが、これは、ポテンシャルのトポロジーが変化する事にも対応している。

4 まとめと課題

スファレロン解の場合にも、モノポール解と同じようにレギュラー相とカオス相が、 κ の大きさに依存して出現する事が分かった。この結果は、スカラー場の表現がSO(3)モノポール解の場合はアジョイント表現に属し、SU(2)スファレロン解の場合が基本表現に属するという事に注意すれば、ある程度予想できるものかもしれない。即ち、両系のハミルトニアンの違いは、スカラー場とゲージ場の相互作用の項だけに現われるからである。しかし、系の可積分性は、ポテンシャルの係数の大きさを敏感に反映するため、ここで得た結果は、自明ではない。

場に空間依存性を持たせた場合にも、この結果が成立するかは未だ調べていない。しかしながら、モノポール解の解析結果から推測して成立する可能性が高い。

一方、U(1)ヴォルテックス解の場合は、ポテンシャルのトポロジーが少し異なるので、慎重な解析が必要であり、未だ、結論を得ていない。

参考文献

- 1) S. G. Matinyan, E. B. Prokhorenko and G. K. Savvidy , JETP Lett. 44 (1986) 138;
Nucl. Phys. B298 (1988) 414.
- 2) T. Kawabe and S. Ohta , Phys. Rev. D41(1990) 1983.
- 3) T. Kawabe and S. Ohta , Phys. Rev. D44 (1991) 1274.
- 4) T. Kawabe, Phys. Lett. B274 (1992) 399.
- 5) H. B. Nielsen and P. Olesen, Nucl. Phys. B61 (1973) 45.
- 6) F. R. Klinkhamer and N. S. Manton, Phys. Rev. D30 (1984) 2212.