ビリアード系における組ひも群

鳴門教育大学　松岡　隆

平面からそれ自身への同相写像が与えられたとき、その周期軌道の特徴付けの一つとして「組ひも型」を考えることができる。周期軌道の組ひも型は、1980年代前半の頃から力学系理論で着目されるようになり、現在までに、力学系的複雑さを導く組ひも型の決定、シャルコフスキーの定理の２次元版など重要な結果が得られている（例えば、［１～３］参照）。ここでは、ビリアードの周期軌道の問題に組ひもの概念がいかに適用されるかということについて解説する。組ひもの数学的定義や基本的性質については参考文献［４～７］を参照されたい。

Ｄを平面内の凸領域でその周囲Ｃが滑らかものとし、その上で１個の質点の運動を考える。質点の周期軌道で単調なものについては、バーコフによる古典的な結果［８］があり、任意の周期と回転数をもつ単調型周期軌道の存在が証明されている。一方非単調な周期軌道についてはほとんど何も知られていなかったが、最近アメリカの数学者Boylandはこの問題に組ひもの概念が有用であることを示した［９］。

よく知られているように、質点の周期軌道は、円環$A=\{(x,\ \theta)\mid x\in C,\ 0\leqq\theta\leqq\pi\}$上のある同相写像$f$の周期軌道$\gamma$と同一視できる（［８］，［１０、p. 118］）。写像fをうまく連続的に変形していって恒等写像にすることができるが、この変形をf_t（$0\leqq t\leqq 1$）とかくとき、$f_t(\gamma)$が３次元ユークリッド空間の中に描く曲線の集まり$\{(f_t(\gamma),\ t)\mid 0\leqq t\leqq 1\}$は１つの組ひもとなる。これを$\gamma$の組ひも型とよぶ。Boylandは曲面上の同相写像の分類理論を用いて円環上の写像の周期軌道の共存条件について調べ、組ひも型に関するシャルコフスキー型定理を得たが、これをビリアードを表す先ほどの写像fに適用すれば、ビリアードの周期軌道の共存性に関する次のような結果をただちに得ることができる。

「有理数a，bの組で　$0<a<b<1$をみたすものにたいし、ある操作で定まる組ひもを$\beta(a,b)$とかく。このとき、領域Ｄにおいて組ひも型が$\beta(a,b)$であるようなビリアードの周期軌道が１つでも存在すれば、$a\leqq a'<b'\leqq b$をみたす全ての有理数の組a'，b'にたいし、組ひも型が$\beta(a',b')$である周期軌道がまた存在する。特に、組ひも型が互いに異なる無限個の周期軌道がＤ上に存在する。」

この結果は、領域Ｄの細かい形状によらずＤが滑らかな境界をもつ凸領域でありさえすればなりたつ一般的な定理であることに注意してほしい。Boylandの定理は、非単調型周期軌道の問題に関する１つの興味あるアプローチを与えていると思われる。

以上述べたことは文献［１１］に詳しく説明されている。

参考文献

1. 松岡　隆、２次元微分同相写像の周期点とbraid、数理解析研究所講究録806、1992年、pp. 129-156。
2. P. Boyland, Braid types of periodic orbits for surface homeomorphisms, in "Notes on Dynamics of Surface Homeomorphisms", Informal Lecture Notes , Warwick Univ. 1989, pp. 1-50.
3. T. Hall, Periodicity in Chaos: The Dynamics of Surface Automorphisms, Doctoral Thesis, Univ. Cambridge (192 pages) 1991.
4. J.S. Birman, Braids, Links, and Mapping Class Groups, Annals of Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, 1974.
5. S. Moran, The Mathematical Theory of Knots and Braids: An Introduction, North-Holland Math. Studies 82, North-Holland, Amsterdam, 1983.
6. 村杉邦男、 組紐の幾何学、ブルーバックスB500、1982年、講談社
7. V. Hansen, Braids and Coverings: Selected Topics, London Math. Soc. Stud. Texts 18, Cambridge Univ. Press, 1989.
8. G.D. Birkhoff, Dynamical Systems, Colloquium Publ., Vol.9, Amer. Math. Soc., 1966.
9. P. Boyland, An analog of Sharkovski's theorem for twist maps, Contemporary Math. 81 (1988), pp. 119-133.
10. K. R. Meyer and G. R. Hall, Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body Problem, Appl. Math. Sciences 90, Springer-Verlag, 1991.
11. 松岡　隆、 トポロジーと解析の境界領域、ＢＡＳＩＣ数学 1992年8月号、pp. 18-23。