修士論文

粉体流動場の非線形波動

東北大学大学院理学研究科
物理学第二専攻

小松 輝久

(1993年4月1日受理)

概 要

粉体流動層の一様流動化状態が不安定化した後の振舞いをシミュレーションと弱非線形解析によって調べた。その結果、コントロールパラメタが不安定化の閾値を少し越えた状況ではソリトン的振舞いをする解が存在することが分かった。これに対応して、弱非線形解析からはKdV 方程式を導き出し、近似の次数を上げるとKdV に摂動の入った新しいタイプの方程式になることが分かった。そして、長時間経過後にはほぼ振幅の揃った孤立波が形成される様子が観察された。

目次

第 1 章　はじめに　105

第 2 章　方程式の構成　109
2.1　二流体モデル 109
2.2　変分法による流体力学の定式化 109
2.3　エネルギー散逸の効果 113
2.4　流体の内部エネルギーの効果 114
2.5　粉体流動場モデル 115
2.6　簡略モデル 116
2.7　各パラメタの設定 116

第 3 章　線形解析　119
3.1　一様流動層 119
3.2　線形モデル 120
3.3　線形解析 121

第 4 章　計算機実験　127
4.1　計算機実験の方法 127
4.2　モデルのパラメタ設定 127
4.3　計算結果 129

第 5 章　非線形解析　138
5.1　非線形解析の必要性 138
5.2　簡略モデル 138
5.3　VFD の方法 139
5.4　逓減摂動法による弱非線形解析 146
5.5　有効微分方程式の検証 151

第 6 章　まとめ　156
6.1　結果のまとめ 156
6.2　今後の課題 157

謝辞　158

参考文献　158

第 1 章

はじめに

本研究の題目にもある「粉体」とはあまり聞きなれない言葉であると思うが、日常の多くの場面で直接、間接に関わっている「粉」のことである。一言に「粉」といってもその構成粒子は小さいものでは 100 Å 程度のタバコの煙等から大きいものでは 数 m 程度の 溶岩等まで 様々なスケールのものが存在する。さらに構成粒子は固体だけでなく気体（気泡)、液体（液滴）等からなる場合についても粉体と称することがある。上で述べたような広範な現象を全て包含するような適切な定義を行なうことは難しいが、粉体を一言でいえば

「粉体とは比較的弱い相互作用しかない粒子群からなるシステムであり、
構成粒子のサイズはシステムサイズよりも極めて小さいものである。」

といったところであろうか。日常、多くの場面で「粉」が登場することに対応して「粉」に関わる工業分野は非常に多く、とくに土壌力学などの分野では古くから多くの知識が蓄積されてきたようである。国内の文献にはじめて「粉体」という言葉が現れるのは寺田 寅彦 の論文 [1] であろう。そのなかで、彼は「粉」という特殊な物の物性に関して土壌の力学等の静力学を超えた粉体の運動の研究が必要であることを述べている。

粉体の動力学で面白い現象といえば流動化現象が挙げられるだろう。これは粉体粒子群があたかも流体のように振舞う現象で、新潟地震における地盤の流動化などは最も劇的で有名である。雲仙での火砕流災害も高温の溶岩を構成粒子とする粉体が流動化した現象である。このような流動化が何によって起こるのかは現象に応じて様々だが、例えば上の地震の場合には振動が引き金となって地下水と土壌との一種の混相流になることに起因している。(実際には、振動と地下水のどちらが本質的なのかわからないのだが。)

上の地震とは少し感じが違うが、粉体流動層と呼ばれる粉体粒子群と流体が相互作用している系でも実験的に流動化現象を観察することが可能である。この実験は容器のなかに固体の粉体粒子群を詰め、下方より気体を流し込んでこの気体の流速をコントロールパラメターとしておこなわれる。この様子を模式的に示したものが図 1.1である。

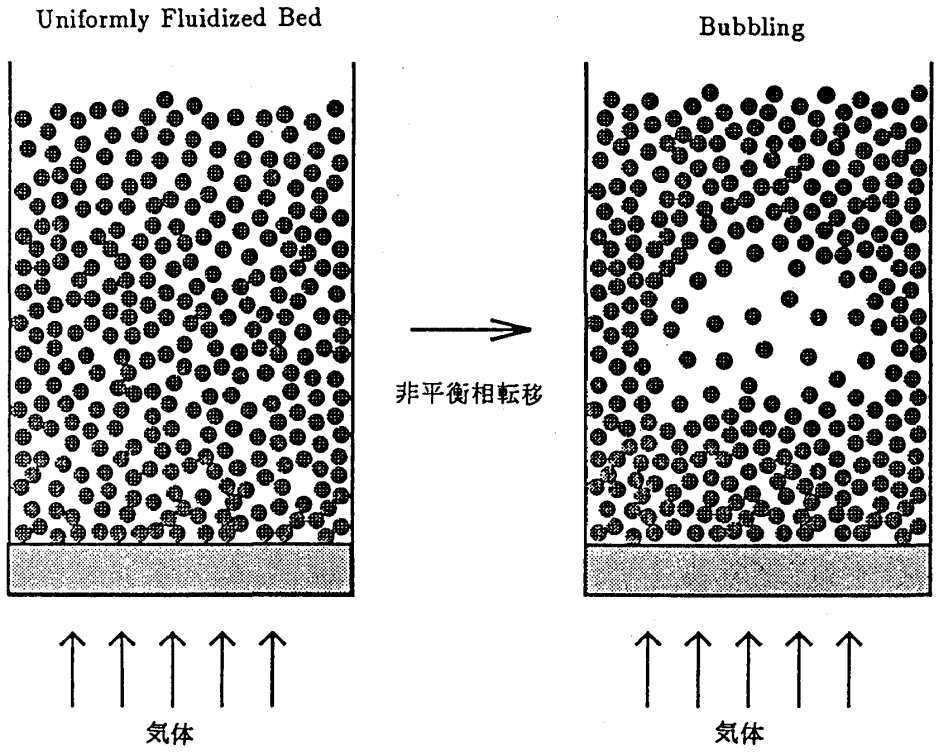

図 1.1: 粉体流動層の模式図
容器の中には粉体粒子が詰められ、下方から気体が流し込まれる。気体の速度がある臨界値を越えると粉体は流動化し、粉体が一様膨潤した Uniformly Fluidized Bed という状態になる。さらに、気体の速度を増していくと系は Bubbling という沸騰現象に似た振舞いを見せる。これは、一種の非平衡相転移現象と考えられる。

下方から流し込む気体の速度が小さいうちは粒子群は動かずに圧力損失のみを伴う Fixed Bed と呼ばれる状態をとる。この状態は多孔質の固体のようなものである。さらに気体の速度を増していくと粉体粒子に働くドッラグは重力、圧力と釣りあって粉体粒子はその配置を変化させ、粉体粒子群は流動化を起こして一様膨潤した Uniformly Fluidized Bed と呼ばれる状態となる [2]。これは固体から液体への相転移と類似している。この液体状態ともいえる粉体流動層に流し込む気体の速度をさらに増していくと、一様膨潤した状態はわずかな揺動により不安定化して粉体粒子密度の薄い領域が出現する (Bubbling)。この様子は液体の沸騰現象に於ける泡の発生と良く類似しているので、ここでもある種の相転移が起きている描像が成り立つものと思われる。しかし、現象は非常に類似しているにも関わらず、液体の沸騰現象は熱力学的に安定な相への転移と考えることによって理解できるのに対し、粉体流動層に於ける Bubbling は熱力学的相分離とは考えづらい。むしろ、非平衡相転移現象というべきものであろう。本研究はこの粉体流動層の非平衡相転移現象に対するモデル化とその解析を行なったものである。この相転移の後、さらに気体の流速を増してやると工学的にスラッグ流やチャーン流等と分類される様々な流動形態をとり、最終的には高速流動層という再び安定な一様状態を形成する。この流動層の再安定化は一見、逆説的であるが粉体粒子密度が非常に希薄な状態で粉体粒子のクラスターを形成することが困難なことは容易に想像できる。

それでは、このような系を記述するにはどの様な方法を用いれば良いのだろうか。今までに用いられている手法は大体次の四つになる。

- 二流体モデルの方法 [2-13]
- kinetic theory による方法 [14]
- 離散要素法 (Discrete Element Method) [16]
- Stokes Flow による直接シミュレーション [17]

まず、最初の二流体モデルの方法は 粉体粒子群を流体としてとらえ気体との二流体で記述する立場をとる。しかしながら、現象論であるためにそのモデルには多くのパラメタを含みその決定には任意性を残しているために曖昧で、標準モデルとして確立したものはない。モデルに含まれるパラメタは実験データ等によって決定しているのが現状である。kinetic theory の方法はこのパラメタを粉体粒子群を確率分布で記述し希薄極限でのBoltzmann 方程式の理論 [15] を使って決定しようとするものである。この方法は粉体粒子の密度が非常に小さい場合に対して導かれているので形式的に粉体粒子を多く含む様な系に適用するのは非常に危険である。しかも、理論的に導入された「温度」というパラメターの持つ意味がはっきりしないということとこの系の不安定化に非常に重要な役割を持つ粉体-気体間の摩擦力（ドラッグ）の決定は結局出来ていないことはこの方法の持つ非常に重大な欠点である。このことを勘案すると kinetic theory による方法が必ずしも現象論的な二流体モデルの上位に位置するものではないことが分かる。残念ながら、現段階では曖昧さを少なくして高濃度でも通用する様な定式化は存在していない。三番目の離散要素法 (DEM) とは個々の粉体粒子を離散的に取り扱う一種のシミュレーション技法で、粒子間に弾性的な接触力モデルを導入して直接接触状態にある二体間の関係のみから接触力を与え粒子の運動を計算するというものである。正直に言ってこの接触力モデルなるものの正当性は一般には未だに分かっていない様である。しかし、それらを用いたシミュレーション結果は充分に実験的状況を再現していることを考えると計算手法として有効であることは確かである。ただし、シミュレーションを超えて理論的考察を加える際にはモデルが微視的過ぎて全体としての特徴を取り出すのはかえって難しくなる。最後の Stokes Flow による直接シミュレーションも個々の粉体粒子を直接に扱う方法で、今度は粉体粒子の存在を境界条件として反映した流体方程式の解を使って粉体間及び粉体-流体間相互作用を計算し粒子の運動を計算する。前述の DEM と比較すると直接衝突して働く非常に短距離的な相互作用よりもむしろ流体を介して長距離的に働く相互作用の効果に着目していることが大きく異なる。この手法の欠点は何と言っても計算を忠実に実行しているぶん非常にコストがかかることである。このため、粉体の粒子数はかなり制限されてしまう。また DEM と同様、粉体粒子群全体の動きを見るには何らかの粗視化を必要とする。また、この方法は沈降実験の解析においては成果を挙げているようだが [18] 、この方法で現在までに流動化現象を的確に記述できた論文は無い。

最近、Batchelor [9] は二流体モデルの物理的議論による導出を行った。それまでの二流体モデルを用いた論文では物理的に分かりやすいモデル化は行われていなかったので、

その意味で非常に価値があるものである。しかし、彼はモデルの解析を線形領域のみについて行い非線形領域については触れていない。同様のモデルを用いた非線形領域の議論は佐々、早川両氏 [12] によって行われた。本研究はこの両氏の研究を受け継ぐものである [13]。

この研究で得られた結果を論文の構成と共に以下にまとめる。

まず、第 2 章ではモデルの定式化を行った。我々が系を記述する方法として採用したのは二流体モデルである。その理由は、粉体の集団としての運動を見たい場合には個々の運動を見るよりもその平均量を見た方が物理的描像が得やすく、数値的にはともかく理論的には個々の粒子を粗視化した平均量で議論せざるを得ないからである。既に文献 [12] で高分子溶液系で用いられた変分法的手法 [25] を適用し粉体気体の混相流の基礎方程式が与えられているが、そのモデルの導出過程には一部不備な点があったので、この論文で改めて定式化を行った。

第 3 章では、モデルを線形近似した解析を行なった。線形解析については多くの論文が存在するが、それらの結果と一致して粉体流動層は コントロールパラメタ（気体の速度）のある臨界値を境に縦方向に負の拡散係数が出現して線形不安定になることがわかる。さらに、上で述べた高速流動層の再安定化に対応してさらに大きなコントロールパラメタの臨界値を境に線形安定になる。また、多くの論文では述べていないが線形分散関係式の虚数成分をみると不安定化した波の成分は上昇することがわかる。実際には対流項の非線形効果によって波は変形しショックを形成する傾向を持つので線形不安定化した後の時間発展を知るには非線形効果も考慮しなければならない。後でわかるが、ここでの解析は弱非線形領域での解析にとってとても重要な情報を提供する事になる。

さらに第 4 章では計算機実験を一次元モデルについて行なった。境界条件は周期的であるとし、初期状態は Uniformly Fluidized Bed にわずかな揺らぎを与えたものを採用した。その結果、ソリトン的な振舞いをする解が見つかった。このソリトンは衝突に際し、その振幅と速度を完全には保存しないで長時間経過後には数個の同じ振幅のソリトンが生き残ることも観察できた。

そして第 5 章では非線形解析を行った。最初に佐々、早川両氏による VFD （ Center Manifold の微分展開に相当する）の方法での非線形解析を紹介し、論文には誤りがあったのでその正確な表式を与えておいた。次に、弱非線形領域でより物理的に分かりやすい逓減摂動法でモデル方程式から縮約された方程式を導き、それが KdV 方程式に摂動が入った様なものになる事を示した。これは VFD の手法による結果とも一致する。この縮約された方程式に 2 ソリトン解を初期値として与えたものと元のモデルに同様の初期値を与えたものとを計算機によってシミュレートして逓減摂動法によって得られた方程式の妥当性を調べた。さらに、VFD では行われていなかった二次元モデルについても簡単な場合について解析を行い横方向の拡散効果が摂動的に一次元 KdV 方程式に加わる事を見た。

最後に第 6 章では本研究で得た結果と今後の課題についてまとめた。

第 2 章

方程式の構成

2.1 二流体モデル

この章では粉体流動場の運動方程式を導きたい。粉体流動場は粉体粒子と気体から構成される。具体的には、重力場中にある粉体粒子群に対して外部から強制的に気体が流し込こまれている状況を考えている。このような系で起こる現象を記述するにはいくつかの方法があると思われるが、ここでは粉体粒子の運動を連続体の運動として記述するモデルを用いる。このような記述を可能にするため、粉体粒子の大きさ程度のスケールでの現象を粗視化して より大きなスケールでの平均的な現象を取り出すことが可能であると仮定している。ただ、粉体粒子群は一般的に流体とは異なる性質を持ち合わせている。たとえば、粉体粒子間にはどんなに接近しても空隙が存在し、任意の形状の容器に入れた時などには その履歴が重要となる。また、重力場中で静止している粉体粒子群の表面はジオイド面と異なって存在出来る。要するに、砂の山が作れるということである。しかし、本研究に於いて粉体粒子群の運動を考える際には これらの性質があまり重要な因子として関わってこないと期待して粉体粒子群を流体として扱う。但し、粉体粒子間に有限の空隙が存在することはモデル化の際に自由エネルギーを通して新たに取り入れた。線形解析において、この効果を取り入れない場合との比較をおこなっている。もちろん気体も流体として記述するので系全体は二つの成分からなる流体の運動として記述されることになる。

2.2 変分法による流体力学の定式化

ここでは、変分法によって流体力学の方程式を導出してみる [23]。これはモデルの定式化を明確に行なうためである。まずは、簡単のために二流体のエネルギー散逸や内部エネルギーを考慮しないで考えてみよう。しばらくの間 Lagrange 描像を用いて場を記述する。最終的な結果は Euler 描像で書いたものを使うのだが、質点系の古典力学の作用変分による定式化を素直に拡張して定式化するには流体の場を Lagrange 描像で表現した方が良いからである。流体の速度場に乗って移動する仮想的な流体粒子を考えよう。初期時刻 $t = 0$ に位置 $\mathbf{a}$ にあった流体粒子の時刻 t における位置を $\mathbf{x}$ とすれば $\mathbf{x}$ は初期

時刻での位置 a と時刻 t の関数となる。流体の運動は乱流的でなく層流的であるとすれば、x は a に関して微分可能となる。いま流体は二成分から成っているので、速度場は二つある。粉体の速度場に沿って動く流体粒子についての x を $\mathrm{x_p}$ と書き、気体の速度場に沿って動く流体粒子については $\mathrm{x_g}$ と書くことにする。質量密度を検査体積中にある粉体粒子と気体について以下のように定義する。

$$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}(\mathbf{r},t) \ : \ \frac{\text{粉体粒子の質量}}{\text{検査体積}}$$

$$\bar{\rho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{r},t) \ : \ \frac{\text{気体の質量}}{\text{検査体積}}$$

また、速度場も以下のように定義しておく。

$$\boldsymbol{v}(\mathbf{r},t) \ : \ \text{粉体粒子の平均速度}$$
$$\boldsymbol{u}(\mathbf{r},t) \ : \ \text{気体の平均速度}$$

Lagrange 的描像における質量保存の法則を書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\mathrm{p}}(\mathrm{x_p}(\mathrm{a},t),t)\,\mathrm{dx_p} &= \bar{\rho}_{\mathrm{p}}(\mathrm{a},0)\,\mathrm{da} \equiv \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}(\mathrm{a})\,\mathrm{da} \\ \bar{\rho}_{\mathrm{g}}(\mathrm{x_g}(\mathrm{a},t),t)\,\mathrm{dx_g} &= \bar{\rho}_{\mathrm{g}}(\mathrm{a},0)\,\mathrm{da} \equiv \bar{\rho}_{\mathrm{g0}}(\mathrm{a})\,\mathrm{da} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Jacobian を導入することによって

$$\begin{aligned} \mathrm{dx_p} &= \left|\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}}\right| \mathrm{da} \equiv \mathrm{J_p}\,\mathrm{da} \\ \mathrm{dx_g} &= \left|\frac{\partial \mathrm{x_g}}{\partial \mathrm{a}}\right| \mathrm{da} \equiv \mathrm{J_g}\,\mathrm{da} \end{aligned} \tag{2.2}$$

と書けるので

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{\mathrm{p}}(\mathrm{x_p},t)\,\mathrm{J_p} - \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}(\mathrm{a}) &= 0 \\ \bar{\rho}_{\mathrm{g}}(\mathrm{x_g},t)\,\mathrm{J_g} - \bar{\rho}_{\mathrm{g0}}(\mathrm{a}) &= 0 \end{aligned} \tag{2.3}$$

と書きなおすことができる。あとで変分法によって運動量保存則を導く際にはこれを拘束条件として課す。さらに、解析を簡単にするために二つの流体は非圧縮流体と近似する。これは、ある検査体積中にある粉体粒子と気体の各々について

$$\rho_{\mathrm{p}} \ : \ \frac{\text{粉体粒子の質量}}{\text{粉体の占める体積}}$$

$$\rho_{\mathrm{g}} \ : \ \frac{\text{気体の質量}}{\text{気体の占める体積}}$$

で定義される密度 ρ_{p}、ρ_{g} が一定であることを意味する。この時、$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}(\mathbf{r},t)$、$\bar{\rho}_{\mathrm{g}}(\mathbf{r},t)$ は粉体の体積占有率

$$\phi(\mathbf{r},t) \ : \ \frac{\text{粉体の占める体積}}{\text{検査体積}}$$

を用いて

$$\begin{cases} \bar{\rho_{\rm p}}(\mathrm{r},t) &= \rho_{\rm p}\,\phi(\mathrm{r},t) \\ \bar{\rho_{\rm g}}(\mathrm{r},t) &= \rho_{\rm g}\,\bar{\phi}(\mathrm{r},t) \end{cases} \tag{2.4}$$

と書ける。但し、$\bar{\phi} \equiv 1-\phi$ と定義した。ϕ は 体積占有率、particulate fraction 、packing fraction 、packing rate などと呼ばれる。なお、この場合 ϕ と $\bar{\phi}$ は独立ではないので

$$\frac{\bar{\rho_{\rm p}}}{\rho_{\rm p}} + \frac{\bar{\rho_{\rm g}}}{\rho_{\rm g}} - 1 \;=\; 0 \tag{2.5}$$

なる拘束条件を課さなければならない。Euler 描像における質量保存則も以下に書き下しておく。

$$\begin{cases} \partial_t(\rho_{\rm p}\,\phi) &= -\nabla\cdot(\rho_{\rm p}\,\phi\,\boldsymbol{v}) \\ \partial_t(\rho_{\rm g}\,\bar{\phi}) &= -\nabla\cdot(\rho_{\rm g}\,\bar{\phi}\,\boldsymbol{u}) \end{cases} \tag{2.6}$$

それでは次に運動量保存則を変分法によって構成することにしよう。重力場中の流体の Lagrangian は 重力加速度ベクトルを g と書く時、Euler 描像で

$$\int \mathrm{dr}\left\{\frac{\bar{\rho_{\rm p}}}{2}\boldsymbol{v}^2 + \frac{\bar{\rho_{\rm g}}}{2}\boldsymbol{u}^2 + (\bar{\rho_{\rm p}}+\bar{\rho_{\rm g}})\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{r}\right\} \tag{2.7}$$

となる。(但し、ここでは内部エネルギーを考えていない。) 関係 (2.1) を使って Lagrange 描像で書けば、次のようになる。

$$\int \mathrm{da}\left\{\frac{\bar{\rho_{\rm p0}}}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\bar{\rho_{\rm g0}}}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{x_g}}{\partial t}\right)^2 + \bar{\rho_{\rm p0}}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{x_p} + \bar{\rho_{\rm g0}}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{x_g}\right\} \tag{2.8}$$

さて、この Lagrangian を三つの拘束条件

$$\begin{cases} \bar{\rho_{\rm p}}(\mathrm{x_p},t)\,\mathrm{J_p} - \bar{\rho_{\rm p0}}(\mathrm{a}) &= 0 \\ \bar{\rho_{\rm g}}(\mathrm{x_g},t)\,\mathrm{J_g} - \bar{\rho_{\rm g0}}(\mathrm{a}) &= 0 \\ \dfrac{\bar{\rho_{\rm p}}}{\rho_{\rm p}} + \dfrac{\bar{\rho_{\rm g}}}{\rho_{\rm g}} - 1 &= 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

を課して、変分原理を適用する。上の三つの拘束条件に対応して Lagrange の未定乗数 $\lambda_{\rm p}$、$\lambda_{\rm g}$、p を導入する。変分式は

$$\delta\int \mathrm{dt}\int \mathrm{da}\;\mathcal{L}\left(\rho_{\rm p},\mathrm{x_p},\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t},\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}},\,\rho_{\rm g},\mathrm{x_g},\frac{\partial \mathrm{x_g}}{\partial t},\frac{\partial \mathrm{x_g}}{\partial \mathrm{a}}\right) = 0 \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \;\equiv\; & \frac{\bar{\rho_{\rm p0}}}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)^2 + \frac{\bar{\rho_{\rm g0}}}{2}\left(\frac{\partial \mathrm{x_g}}{\partial t}\right)^2 \\ +\; & \bar{\rho_{\rm p0}}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{x_p} + \bar{\rho_{\rm g0}}\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{x_g} \\ +\; & \lambda_{\rm p}(\bar{\rho_{\rm p}}J_{\rm p} - \bar{\rho_{\rm p0}}) + \lambda_{\rm g}(\bar{\rho_{\rm g}}J_{\rm g} - \bar{\rho_{\rm g0}}) \\ +\; & p\left(\frac{\bar{\rho_{\rm p}}}{\rho_{\rm p}} + \frac{\bar{\rho_{\rm g}}}{\rho_{\rm g}} - 1\right) \end{aligned} \tag{2.11}$$

となる。まず、$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}$ についての変分より

$$\lambda_{\mathrm{p}} J_{\mathrm{p}} = p/\rho_{\mathrm{p}} \tag{2.12}$$

また、$\bar{\rho}_{\mathrm{g}}$ についての変分より

$$\lambda_{\mathrm{g}} J_{\mathrm{g}} = p/\rho_{\mathrm{g}} \tag{2.13}$$

が得られる。次に、$\mathrm{x_p}$ について変分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{a}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathrm{x_p}} = 0 \tag{2.14}$$

となる。したがって

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right) + \frac{\partial}{\partial \mathrm{a}}\left(\bar{\rho}_{\mathrm{p}}\lambda_{\mathrm{p}}\frac{\partial J_{\mathrm{p}}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}}\right)}\right) - \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\mathrm{g} = 0 \tag{2.15}$$

である。

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{a}}\frac{\partial J_{\mathrm{p}}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}}\right)} = 0 \tag{2.16}$$

であることと式 (2.3)、(2.12) を使うと

$$\bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right) + \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\frac{\partial J_{\mathrm{p}}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}}\right)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{a}}\left(\frac{p}{\rho_{\mathrm{p}}}\right) - \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\mathrm{g} = 0 \tag{2.17}$$

さらに、

$$\frac{\partial J_{\mathrm{p}}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial \mathrm{a}}\right)}\frac{\partial}{\partial \mathrm{a}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x_p}} \tag{2.18}$$

を使えば、

$$\bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right) + \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}_p}\left(\frac{p}{\rho_{\mathrm{p}}}\right) - \bar{\rho}_{\mathrm{p0}}\mathrm{g} = 0 \tag{2.19}$$

となる。上式の t に関する偏微分は a を一定にしたもとで行なわれるので

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)_{\mathrm{a}}\right)_{\mathrm{a}} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)_{\mathrm{a}}\right)_{\mathrm{x_p}} + \left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)_{\mathrm{a}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x_p}}\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)_{\mathrm{a}}\right)_{t} \tag{2.20}$$

である。

$$\left(\frac{\partial \mathrm{x_p}}{\partial t}\right)_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{v} \tag{2.21}$$

なので、結局 最終的な結果を Euler 描像で書くと次のようになる。

$$\partial \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}}\boldsymbol{\nabla} p + \mathrm{g} \tag{2.22}$$

これは、重力場中の完全流体の支配される方程式である。$\mathbf{x_g}$ に関する変分も同様に実行できて次の結果を与える。

$$\partial \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\nabla})\,\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\rho_g}\boldsymbol{\nabla} p + \mathbf{g} \tag{2.23}$$

勿論、式 (2.22) と (2.23) には二つの流体間の相互作用が無いのでこれらの式を解析しても粉体の流動化のような興味深い現象は起こらない。

2.3 エネルギー散逸の効果

前節では完全流体の支配方程式を導いたが、この節ではこの支配方程式にエネルギー散逸の効果をとり入れることを考える。エネルギー散逸の原因として考えられるのは、粉体粒子と周りの気体との相互作用によって起きるものや、粉体粒子同士の衝突によるもの、さらに気体同士の衝突によるものが考えられる。このうちで、最後のものは他の二つに比べて小さいと考えられるので、モデルには最初の二つの効果を取り入れた。実際、Fluidized Bed に関する実験で得られる混相流の粘性係数は通常の空気の持つ粘性係数の 1000 倍程度であり [8]、この仮定の正しさを裏付けている。まず、粉体粒子と気体の相互作用によるエネルギー散逸は考えている点における二つの流体の速度差と particle fraction の関数と考えられる。エネルギー散逸は速度差の大きさのみによって決まり、その方向にはよらないと考えられるので、速度差でその関数を展開すると最低次の項としては速度差のスカラー積が出て来る。(もちろん、0 次の項は速度差が 0 の時に散逸が起こらないことから消える。) ここでは、この最低次の寄与のみを取って考えることにする。粉体粒子の粒子半径が小さい時には Reynolds 数が小さいところでも流動化を起こし多様な現象を見せてくれるという事実を考えれば、我々の目的にとってはこの項のみを取って来れば充分である。もうひとつ、粉体粒子同士の衝突によるエネルギー散逸は通常の Newton 流体と同じような形を仮定することにした。ここで、Newton 流体の形を仮定して簡単化した理由は我々は一様膨潤相からの高次の流動化を議論するので Bingham 流体的な性質は物理現象に直接関係してこないと期待できるからである。エネルギー散逸の効果は前節の変分式の右辺に散逸関数による項を付け加えることによって行なう [24]。散逸関数を R とすると

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathbf{x_i}}{\partial t}\right)} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{a}}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathbf{x_i}}{\partial \mathbf{a}}\right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x_i}} = -\frac{\partial R}{\partial\left(\dfrac{\partial \mathbf{x_i}}{\partial t}\right)} \tag{2.24}$$

によってエネルギー散逸の効果を導入することができる。(但し、今の場合 index i として p と g がある。) われわれがこれから使うモデルの R は上で述べたことをもとに次のように仮定した。

$$R = \frac{1}{2}\int \mathrm{dr}\left\{\zeta(\phi)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})^2 + \phi\mu(\phi)\left(\frac{\boldsymbol{\nabla v}+\boldsymbol{\nabla v}^t}{2}\right) : \left(\frac{\boldsymbol{\nabla v}+\boldsymbol{\nabla v}^t}{2}\right)\right\} \tag{2.25}$$

但し、テンソル M に対し $M:M \equiv M_{ij}M_{ji}$ という表式を使っている。ここで、ドラッグ係数 $\zeta(\phi)$ と粘性係数 $\mu(\phi)$ を導入した。これらは粉体の体積占有率 ϕ の関数であると仮定する。特にドラッグ係数の ϕ 依存性は系の不安定化に大きく寄与することが線形解析でわかる。これらの係数の ϕ 依存性は後の 2.7節で議論する。また、粉体粒子同士の衝突による項では $\nabla \cdot \boldsymbol{v}$ に関する項を落しているが、これは何も自明なことではなく本来残すべき項である。しかし、ここでは最小の構成でモデルを設定したいのでこの項をとりあえず無視することにする。特殊な場合として一次元の時にはどちらの項も同じになるので一次元系の解析ではこのことを気にする必要は無いことを注意しておく。最後に、この項が完全流体の方程式に与える変更を書いておくと、式 (2.22) の右辺には付加項

$$-\zeta(\phi)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + \mathrm{Div}\left[\phi\mu(\phi)\left(\frac{\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}}{2}\right)\right] \tag{2.26}$$

但し、　テンソル M に対し $(\mathrm{Div}\, M)_i \equiv \partial_j M_{ji}$

が加わり、式 (2.23) の右辺には

$$-\zeta(\phi)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) \tag{2.27}$$

が加わることになる。

2.4　流体の内部エネルギーの効果

変分法による完全流体の導出の際には無視した もう一つの項、流体の内部エネルギー（自由エネルギー）についてもここで考えることにしよう。この系の自由エネルギーの密度や圧力への依存性は、今のところ何ら規定することは出来ない。そこで、ここでは相分離過程を記述する混合エネルギーの形をこの場合にも当てはめ得ることを仮定した。具体的には、自由エネルギーを A と書くことにすると、

$$A(\phi) = \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left[\frac{\kappa}{2}(\nabla\phi)^2 + f(\phi)\right] \tag{2.28}$$

の形を使うことになる。ここで、圧力の効果が完全に消し去られていることに注意する必要があるかも知れない。今、ϕ は $\bar{\rho}_{\mathrm{p}}$ の関数とも $\bar{\rho}_{\mathrm{g}}$ の関数とも見れるがどちらを通して入れるにしても p を変更する結果となるだけなので A を $\bar{\rho}_{\mathrm{p}}$ の関数と見做して導入する。変分式がどう変更を受けるかというと

$$\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathcal{L} \longrightarrow \int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\mathcal{L} - A \tag{2.29}$$

となるだけである。この場合、$\bar{\rho}_{\mathrm{p}}$ に関する変分より得られる式は

$$\lambda_{\mathrm{p}}\, J_{\mathrm{p}} = \frac{1}{\rho_{\mathrm{p}}}\left(p + \frac{\delta A}{\delta\phi}\right) \tag{2.30}$$

となるので 式 (2.22) において

$$p \longrightarrow p + \frac{\delta A}{\delta\phi} \tag{2.31}$$

とすれば良い。式(2.23)は形の上で何ら変更を受けない。ところで、自由エネルギー(2.28)の各項は系の安定化に寄与する様に導入したのであるが 実際、線形解析（第3章）に於いて第一項は短波長揺らぎに対する系の線形安定性を保証し、第二項$f(\phi)$は主として長波長での安定化に寄与することが分かる。系が不安定化するかどうかはドラッグによる不安定化と$f(\phi)$による安定化の競合によって決まる。また、$f(\phi)$の関数形については後の 2.7節で議論する。

2.5 粉体流動場モデル

これまでの節を通して、粉体流動場モデルが導けたことになる。改めてここに書くと、

$$
\begin{cases}
\partial_t \phi = -\nabla\cdot(\phi \boldsymbol{v}) & \text{(2.32-a)}\\
\partial_t \bar{\phi} = -\nabla\cdot(\bar{\phi}\boldsymbol{u}) & \text{(2.32-b)}\\
\rho_{\mathrm{p}}\phi[\partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla]\boldsymbol{v} = -\phi\nabla(p + \dfrac{\delta A}{\delta\phi}) + \rho_{\mathrm{p}}\phi\,\mathrm{g} & \\
\qquad -\zeta(\phi)(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}) + \mathrm{Div}\left[\phi\mu(\phi)\left(\dfrac{\nabla\boldsymbol{v}+\nabla\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}}{2}\right)\right] & \text{(2.32-c)}\\
\rho_{\mathrm{g}}\bar{\phi}[\partial_t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla]\boldsymbol{u} = -\bar{\phi}\nabla p + \rho_{\mathrm{g}}\bar{\phi}\,\mathrm{g} - \zeta(\phi)(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) & \text{(2.32-d)}
\end{cases}
$$

である。式(2.32-a),(2.32-b)より$\partial_t\phi$を消去すると

$$\nabla\cdot(\phi\boldsymbol{v} + \bar{\phi}\boldsymbol{u}) = 0 \qquad (2.33)$$

という関係式を得る。これは、二つの流体に非圧縮性を仮定したことの反映である。この式を(2.32-b)の代わりに用いても良い。上のモデル(2.32)は、ϕ、$\boldsymbol{v}$、$\boldsymbol{u}$、pからなる連立微分方程式であるので変数の数と方程式の数は一致している。

次に、解析に便利な様に次の単位で運動方程式を無次元化する。

長さ	$[L]$	:	a 粉体粒子の半径
密度	$[ML^{-3}]$	:	ρ_p 粉体の密度
速さ	$[LT^{-1}]$	:	U_0 特徴的な気体の速度

この無次元化により変数は次のようにスケールされる。（無次元化した変数には ^ を付した。）

時間	$[T]$	:	t	=	$\dfrac{a}{U_0}\hat{t}$
長さ	$[L]$	:	x	=	$a\hat{x}$
速さ	$[LT^{-1}]$	:	v	=	$U_0\hat{v}$
圧力	$[ML^{-1}T^{-2}]$	:	p	=	$\rho_{\mathrm{p}}U_0^2\hat{p}$
粘性係数	$[ML^{-1}T^{-1}]$	:	μ	=	$\rho_{\mathrm{p}}aU_0\hat{\mu}$
ドラッグ係数	$[ML^{-3}T^{-1}]$	:	ζ	=	$\dfrac{\rho_{\mathrm{p}}U_0}{a}\hat{\zeta}$
自由エネルギー	$[ML^2T^{-2}]$	:	A	=	$\rho_{\mathrm{p}}U_0^2a^3\hat{A}$

この場合、粉体流動場モデルはすべて無次元化した変数を使って次のように書き換えられる。(簡単のために ˆ を省いてある。)

$$
\begin{cases}
\partial_t \phi = -\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) & \text{(2.34-a)} \\
\partial_t \bar{\phi} = -\nabla \cdot (\bar{\phi} \boldsymbol{u}) & \text{(2.34-b)} \\
\phi [\partial_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla] \boldsymbol{v} = -\phi \nabla (p + \dfrac{\delta A}{\delta \phi}) - \dfrac{\phi}{Fr} \mathbf{e}_z & \\
\qquad\qquad - \zeta(\phi)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \mathrm{Div} \left[\phi \mu(\phi) \left(\dfrac{\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}}{2} \right) \right] & \text{(2.34-c)} \\
\epsilon_{\mathrm{gp}} \bar{\phi} [\partial_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla] \boldsymbol{u} = -\bar{\phi} \nabla p - \dfrac{\epsilon_{\mathrm{gp}}}{Fr} \bar{\phi} \mathbf{e}_z - \zeta(\phi)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) & \text{(2.34-d)}
\end{cases}
$$

但し、パラメター $Fr, \epsilon_{\mathrm{gp}}$ を

$$
Fr \equiv \frac{U_0^2}{ag} , \qquad \epsilon_{\mathrm{gp}} \equiv \frac{\rho_{\mathrm{g}}}{\rho_{\mathrm{p}}} \tag{2.35}
$$

と定義し、$A, \zeta(\phi), \mu(\phi)$ も無次元化したものを表す。

2.6　簡略モデル

式 (2.34) に現れた ϵ_{gp} というパラメターは粉体粒子と気体からなる粉体流動場を考える際には、10^{-3} 程度の値をとるので、0 と置いて話しを簡単にすることが出来る。また、さらに式 (2.33) が自動的に満たされるように

$$
\phi \boldsymbol{v} + \bar{\phi} \boldsymbol{u} = V \mathbf{e}_z \qquad\qquad V\text{は定数} \tag{2.36}
$$

と仮定するとモデルは

$$
\begin{cases}
\partial_t \phi = -\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) & \text{(2.37-a)} \\
(\partial_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{v} = \tilde{\zeta}(\phi)(V \mathbf{e}_z - \boldsymbol{v}) - \nabla \dfrac{\delta A}{\delta \phi} - \dfrac{\mathbf{e}_z}{Fr} & \\
\qquad\qquad + \dfrac{1}{\phi} \mathrm{Div} \left[\phi \mu(\phi) \left(\dfrac{\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}}{2} \right) \right] & \text{(2.37-b)}
\end{cases}
$$

のように簡略化することが出来る。但し、上の式では以下の定義を用いてある。

$$
\tilde{\zeta}(\phi) \equiv \frac{\zeta(\phi)}{\bar{\phi}^2 \phi} \tag{2.38}
$$

2.7　各パラメタの設定

モデル中には、まだその詳細な形を決定していないパラメタをいくつか含む。それは以下のものである。

- $f(\phi)$
- $\zeta(\phi)$ もしくは $\tilde{\zeta}(\phi)$
- $\mu(\phi)$

$f(\phi)$ は系の安定化に寄与する様に、極小値を一つだけ持ち その極小値が一様流動層に対応するように決める。さらに、粉体は最密充填状態以上には充填不可能であることを反映して最密充填状態で発散するように決定する。尚、粉体の体積占有率 ϕ が0と1の間の値をとることは自然に満たされている。このことについては、次節で述べる。$f(\phi)$ の関数形が必要な時には、上の条件を満たす一番簡単な形を用いた。それは次のようなものである。

$$f(\phi) = \frac{\alpha(\phi-\phi_0)^2}{2\ \phi_{\rm cp}-\phi} \tag{2.39}$$

ここで α は定数で、ϕ_0 は一様流動層に於ける粉体体積占有率で、$\phi_{\rm cp}$ は最密充填値[1] である。

$\zeta(\phi)$ は一様流動層における粉体体積占有率と流し込む気体の速度との関係を沈降実験のデータ [19] により決定される一番簡単な外挿形を用いる。具体的な形は流し込む気体の速度を U_0 とすると

$$U_0(\phi_0) = U_{\rm max}\bar{\phi}_0^n \tag{2.40}$$

である。$U_{\rm max}$ は粉体が希薄になった極限での沈降速度すなわち終端速度である。$U_{\rm max}$ は希薄極限 ($\bar{\phi}_0 \to 1$) で Stokes 則に従うことを仮定すれば以下のように書ける。

$$U_{\rm max} = (\text{重力}) / (\text{摩擦係数}) = (\frac{4}{3}\pi a^3\rho_{\rm p}g) / (6\pi a\mu_{\rm g}) \tag{2.41}$$

g は重力加速度で $\mu_{\rm g}$ は気体の粘度である。式 (2.40) に於ける n は実験によると層流状態で4程度から乱流状態で1.5程度の値をとる。ここでは、層流状態を仮定しているので $n = 4$ として定数として扱った。U_0 と ϕ_0 の関係からドラッグ係数 $\zeta(\phi)$ の決定を行なうにはモデルの一様流動層に対応した解、すなわち一様定常な解を用いておこなう。一様流動層とは粉体が 流し込まれる気体から受ける上向きのドラッグと下向きの重力が釣りあって粉体が流体として静止した様な状態である。したがって、モデル (2.32) の一様定常解を $(\phi_0, \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{u}_0, p_0)$ とすると $\boldsymbol{v}_0 = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u}_0 = U_0\mathbf{e}_z$ であり、ϕ_0 は定数で、$p_0 = p_0(z)$ という解を持つ。

$$\begin{cases} 0 &= -\phi_0\partial_z p_0 + \rho_{\rm p}g\phi_0 + \zeta(\phi_0)U_0 \\ 0 &= -\bar{\phi}_0\partial_z p_0 + \rho_{\rm g}g\bar{\phi}_0 - \zeta(\phi_0)U_0 \end{cases} \tag{2.42}$$

[1] 最密充填時の粉体粒子の体積占有率は粉体粒子を球と仮定し その半径が均一であるとすれば、粒子の並べ方により次のような値を持つ。

六方最密構造	$\sqrt{2}\pi/6 = 0.74$
面心立法構造	$\sqrt{2}\pi/6 = 0.74$
体心立法構造	$\sqrt{3}\pi/8 = 0.68$
単純立法構造	$\pi/6 = 0.52$
ダイアモンド構造	$\sqrt{3}\pi/16 = 0.34$

ここでの解析においては、$\phi_{\rm cp} = 0.7$ と設定した。

ϕ_0 が定数という密度勾配が無い状態で一様定常解が存在しているのに注意しておく。上式から $\zeta(\phi_0)$ を U_0 で書くことができて

$$\zeta(\phi_0) \;=\; (\rho_{\rm p}-\rho_{\rm g})\,\bar{\phi}_0\,\phi_0\,g\,U_0^{-1} \tag{2.43}$$

となる。式 (2.40) を用いれば

$$\zeta(\phi_0) \;=\; (\rho_{\rm p}-\rho_{\rm g})\,\bar{\phi}_0^{1-n}\,\phi_0\,g\,U_{\rm max}^{-1} \tag{2.44}$$

と書ける。これで $\zeta(\phi)$ の関数形を決定することが出来たが、ここで 2.5節での無次元化を施すと

$$\begin{aligned}\zeta(\phi) \;&=\; \frac{1-\epsilon_{\rm pg}}{Fr}\frac{U_0(\phi_0)}{U_0(\phi)}\,\bar{\phi}\,\phi \\ &=\; \frac{1-\epsilon_{\rm pg}}{Fr}\frac{U_0(\phi_0)}{U_{\rm max}}\,\bar{\phi}^{1-n}\phi \\ &=\; \frac{1-\epsilon_{\rm pg}}{Fr}\left(\frac{\bar{\phi}}{\bar{\phi}_0}\right)^{-n}\bar{\phi}\phi\end{aligned} \tag{2.45}$$

となる。また、

$$\tilde{\zeta}(\phi) \;=\; \frac{1-\epsilon_{\rm pg}}{Fr\bar{\phi}_0}\left(\frac{\bar{\phi}}{\bar{\phi}_0}\right)^{-n-1} \tag{2.46}$$

である。

μ については高密度での関数形を決定する手立ては今のところないのでとりあえず最密充填値をとると発散するような形を選んだ。

$$\mu(\phi) \;=\; \frac{\beta}{\phi_{\rm cp}-\phi} \tag{2.47}$$

しかしながら、線形解析、弱非線形解析においてはその関数形は必要としなかったので、この関数形の詳細は結果にあまり影響を及ぼさないと期待出来る。

補足：粉体の体積占有率が0から1に限られることについて

ここで粉体の体積占有率が一般に物理的意味を持った値をとることが質量保存則を解くことによって自動的に満たされていることを示しておく。質量保存則 (2.34-a)、(2.34-b) をもう一度書くと

$$\partial_t\,\phi = -\,\nabla\cdot(\phi\,\boldsymbol{v})\,,\quad \partial_t\,\bar{\phi} = -\,\nabla\cdot(\bar{\phi}\,\boldsymbol{u})$$

であった。この二つの微分方程式を解く際にそれぞれ $\frac{{\rm d}x}{{\rm d}t}=v, \frac{{\rm d}y}{{\rm d}t}=u$ で決まる経路 x,yに沿っての $\phi,\bar{\phi}$ の変化を考えると

$$\frac{{\rm d}\phi}{{\rm d}t} = -\,\phi\,\nabla\cdot\boldsymbol{v}\,,\quad \frac{{\rm d}\bar{\phi}}{{\rm d}t} = -\,\bar{\phi}\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}$$

であるから、

$$\phi(t)=\phi(0)\exp(-\int_0^t dt\,\nabla\cdot\boldsymbol{v})\,,\quad \bar{\phi}(t)=\bar{\phi}(0)\exp(-\int_0^t dt\,\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

と書ける。したがって $\phi,\bar{\phi}$ は初期時刻に全空間で正の値であればその後もずっと正の値をとる。さらに、$\phi,\bar{\phi}$ は独立ではなく $\phi+\bar{\phi}=1$ という拘束条件を満たしていた。したがって、$\phi\geq 0$, $\bar{\phi}\geq 0$ を満たすということは次のことを意味する。

$$0\leq\phi\leq 1$$

したがって、質量保存則を解くことで ϕ は物理的に意味のある範囲の値を自然に取ることが分かる [10]。

第 3 章

線形解析

3.1 一様流動層

ここでは粉体流動場のモデルの線形安定性について調べる。これまでに粉体流動場のモデルを以下のように設定した。

$$
\begin{cases}
\partial_t \phi = -\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) & \text{(3.1-a)} \\
\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v} + \bar{\phi} \boldsymbol{u}) = 0 & \text{(3.1-b)} \\
\phi [\partial_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla] \boldsymbol{v} = -\phi \nabla (p + \dfrac{\delta A}{\delta \phi}) - \dfrac{\phi}{Fr} \mathbf{e}_z & \\
\qquad\qquad - \zeta(\phi)(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) + \mathrm{Div} \left[\phi \mu(\phi) \left(\dfrac{\nabla \boldsymbol{v} + \nabla \boldsymbol{v}^t}{2} \right) \right] & \text{(3.1-c)} \\
\epsilon_{\mathrm{gp}} \bar{\phi} [\partial_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla] \boldsymbol{u} = -\bar{\phi} \nabla p - \dfrac{\epsilon_{\mathrm{gp}}}{Fr} \bar{\phi} \mathbf{e}_z - \zeta(\phi)(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) & \text{(3.1-d)}
\end{cases}
$$

この微分方程式は $\phi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, p$ についての方程式である。流し込む気体の速度が充分に小さい時には、粉体流動場は安定な流動層になる。このとき、粉体粒子は巨視的に見て静止した状態にある。粉体にかかる重力による下向きの力と気体から受ける上向きのドラッグおよび圧力勾配による力がちょうど釣り合っているためである。この状態を表すのが、この微分方程式の一様定常解である。前の章でも見たように一様定常解は以下のように書ける。

$$
(\phi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, p) = (\phi_0, \mathbf{0}, \mathbf{e}_z, p_0 - \frac{\phi_0 + \epsilon \bar{\phi}_0}{Fr} z) \qquad \text{(3.2)}
$$

流し込む気体の速度を段々に増していくと、この一様流動層はもはや安定に存在し得なくなる。一様流動層は工学的応用範囲が広く、工学的にはこの閾値を高くすることが重要になる。逆にいうと工学的見地からは線形安定になる条件を探ることが重要で非線形領域の研究は少ない。この章で得られた結果は多くの線形解析の結果と基本的に同じである。

3.2　線形モデル

まず、$\phi, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, p$ を一様定常解 (3.2) の周りに展開して微分方程式を線形化する。

$$\begin{cases} \phi &= \phi_0 + \phi_L \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{0} + \boldsymbol{v}_L \\ \boldsymbol{u} &= \mathbf{e}_z + \boldsymbol{u}_L \\ p &= p_0 - \dfrac{\phi_0 + \epsilon\bar{\phi}_0}{Fr} z + p_L \end{cases} \tag{3.3}$$

この展開の際に、

$$\begin{aligned} \nabla\frac{\delta A}{\delta\phi} &= -\kappa\nabla\triangle\phi_L + f''(\phi_0)\nabla\phi_L \\ \frac{\zeta(\phi)}{\phi} &\simeq \tilde{\zeta}(\phi_0)\,\bar{\phi}_0^2 + (\tilde{\zeta}'(\phi_0)\,\bar{\phi}_0^2 - 2\tilde{\zeta}(\phi_0)\,\bar{\phi}_0)\,\phi_L \\ \frac{\zeta(\phi)}{\bar{\phi}} &\simeq \tilde{\zeta}(\phi_0)\,\bar{\phi}_0\phi_0 + (\tilde{\zeta}'(\phi_0)\,\bar{\phi}_0\phi_0 + \tilde{\zeta}(\phi_0)\,(\bar{\phi}_0 - \phi))\,\phi_L \end{aligned}$$

等の展開式を使うと線形化したモデル方程式は次のようになる。

$$\begin{cases} \partial_t\phi_L &= -\phi_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L & \text{(3.4-a)} \\ \phi_0\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L + \bar{\phi}_0\nabla\cdot\boldsymbol{u}_L - \mathbf{e}_z\cdot\nabla\phi_L &= 0 & \text{(3.4-b)} \\ \partial_t\boldsymbol{v}_L &= -\nabla p_L + \kappa\nabla\triangle\phi_L - f_0''\nabla\phi_L - \tilde{\zeta}_0\,\bar{\phi}_0^2\,(\boldsymbol{v}_L - \boldsymbol{u}_L) & \\ &\quad +(\tilde{\zeta}_0'\,\bar{\phi}_0^2 - 2\tilde{\zeta}_0\bar{\phi}_0)\phi_L\mathbf{e}_z + \mu_0[\triangle\boldsymbol{v}_L + \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L)] & \text{(3.4-c)} \\ \epsilon\,(\partial_t + \partial_z)\boldsymbol{u}_L &= -\nabla p_L - \tilde{\zeta}_0\,\bar{\phi}_0\,\phi_0\,(\boldsymbol{u}_L - \boldsymbol{v}_L) & \\ &\quad -(\tilde{\zeta}_0'\,\bar{\phi}_0\,\phi_0 + \tilde{\zeta}_0\,(\bar{\phi}_0 - \phi_0))\,\phi_L\mathbf{e}_z & \text{(3.4-d)} \end{cases}$$

但し、$\tilde{\zeta}(\phi)$ は前章で定義したように

$$\tilde{\zeta}(\phi) \equiv \frac{\zeta(\phi)}{\bar{\phi}^2\,\phi}$$

と定義される。また、$f_0'' = f''(\phi_0)$, $\tilde{\zeta}_0 = \tilde{\zeta}(\phi_0)$, $\tilde{\zeta}_0' = \tilde{\zeta}'(\phi_0)$, $\mu_0 = \mu(\phi_0)$ 等の略記法をとった。式 (3.4-a) と式 (3.4-b) からは次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} \nabla\cdot\boldsymbol{v}_L &= -\partial_t\,\phi_L/\phi_0 & \text{(3.5-a)} \\ \nabla\cdot\boldsymbol{u}_L &= (\partial_t + \partial_z)\,\phi_L/\bar{\phi}_0 & \text{(3.5-b)} \end{aligned}$$

さらに、式 (3.4-c) と式 (3.4-d) の発散をとることにより次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} \partial_t\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L &= -\triangle p_L + \kappa\triangle^2\phi_L - f_0''\triangle\phi_L - \tilde{\zeta}_0\bar{\phi}_0^2(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L - \nabla\cdot\boldsymbol{u}_L) & \\ &\quad +(\tilde{\zeta}_0'\bar{\phi}_0^2 - 2\,\tilde{\zeta}_0\,\bar{\phi}_0)\,\partial_z\phi_L + \mu_0\triangle(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L) & \text{(3.6-a)} \\ \epsilon\,(\partial_t + \partial_z)\nabla\cdot\boldsymbol{u}_L &= -\triangle p_L - \tilde{\zeta}_0\,\bar{\phi}_0\,\phi_0\,(\nabla\cdot\boldsymbol{v}_L - \nabla\cdot\boldsymbol{u}_L) & \text{(3.6-b)} \end{aligned}$$

これら式 (3.6-a) と式 (3.6-b) の差をとり、式 (3.5-a) と式 (3.5-b) の関係式を使うことにより v_L, u_L, p_L を消去してϕ_L だけで閉じた微分方程式になる。

$$\left(1-\frac{\epsilon\phi_0}{\bar{\phi}_0}\right)\partial_t^2\,\phi_L+\left[\tilde{\zeta}_0-\mu_0\triangle+\frac{2\epsilon\phi_0}{\bar{\phi}_0}\partial_z\right]\partial_t\,\phi_L \\ +\phi_0\left[\kappa\triangle^2-f_0''\triangle+\tilde{\zeta}_0'\bar{\phi}_0\partial_z+\frac{\epsilon}{\bar{\phi}_0}\partial_z^2\right]\phi_L=0 \tag{3.7}$$

さて、ここで $\epsilon_{\rm pg}$ は流し込む空気の粉体粒子に対する比重で、実際には 10^{-3} 程度である。したがって、$\epsilon_{\rm pg}$ を 0 とおいて以後の話しを簡単にする。結局、線形モデルは次式になる。

$$\boxed{\partial_t^2\,\phi_L+\left[\tilde{\zeta}_0-\mu_0\triangle\right]\partial_t\,\phi_L+\phi_0\left[\kappa\triangle^2-f_0''\triangle+\tilde{\zeta}_0'\bar{\phi}_0\partial_z\right]\phi_L=0} \tag{3.8}$$

線形モデルには μ_0 しか含まれないので μ の関数形を必要としない。

3.3 線形解析

前節で求めた線形モデル (3.8) を時間について ラプラス変換、空間については フーリエ変換する。

$$\tilde{\phi}_L=\iint dt\,dz\;\phi_L\,\mathrm{e}^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\sigma t} \tag{3.9}$$

と定義すると、$\exp(\sigma t+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$ のモードをとって来ることに相当し、線形モデル (3.8) は変換により σ の二次方程式を与える。

$$\sigma^2\tilde{\phi}_L-\sigma\phi_L(0)-\phi_L'(0)+\left[\tilde{\zeta}_0+\mu_0k^2\right](\sigma\tilde{\phi}_L-\phi_L(0)) \\ +\phi_0\left[k^2(\kappa k^2+f_0'')+\tilde{\zeta}_0'\,\bar{\phi}_0\,ik_z\right]\tilde{\phi}_L=0 \tag{3.10}$$

ここで、$k\equiv|\mathbf{k}|$ であり、k_z は $\mathbf{k}$ の z 成分である。また、$\tilde{\phi}_L$ は $\tilde{\phi}_L(\mathbf{k},\sigma)$ であり、$\phi_L(0)$ と書いて初期時刻での ϕ_L のフーリエ成分を表し、$\phi_L'(0)$ の $'$ は時間微分を表す。$\tilde{\phi}_L$ について解けば次式を得る。

$$\tilde{\phi}_L=\frac{(\sigma+\tilde{\zeta}_0+\mu_0k^2)\phi_L(0)+\phi_L'(0)}{(\sigma-\sigma_+)(\sigma-\sigma_-)} \tag{3.11}$$

ϕ_L は上式を逆変換して求められるので、右辺の分母の零点、すなわち$\tilde{\phi}_L$の極の位置$\sigma_\pm$を求めることで解の線形安定性を議論できる。

$$(\sigma-\sigma_+)(\sigma-\sigma_-)\;\equiv\;\sigma^2+B\sigma+C+iD=0 \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} B &\equiv& \tilde{\zeta}_0+\mu_0k^2 \\ C &\equiv& \phi_0k^2(\kappa k^2+f_0'') \\ D &\equiv& \tilde{\zeta}_0'\bar{\phi}_0\phi_0k_z \end{cases} \tag{3.13}$$

二次方程式の解の公式によると、

$$\sigma_\pm=-\left(\frac{B}{2}\right)\pm\sqrt{\left(\frac{B}{2}\right)^2-C-iD}$$

であるが、ここで、公式

$$\begin{cases} Re[\sqrt{a+ib}] &= \sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \\ Im[\sqrt{a+ib}] &= sgn(b)\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}} \end{cases} \qquad a,b \text{ は実数}$$

を用いると

$$Re[\sigma_\pm] = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C\right)^2 + D^2} + \left(\frac{B}{2}\right)^2 - C\right]} \tag{3.14-a}$$

$$Im[\sigma_\pm] = \mp sgn(D)\sqrt{\frac{1}{2}\left[\sqrt{\left(\left(\frac{B}{2}\right)^2 - C\right)^2 + D^2} - \left(\frac{B}{2}\right)^2 + C\right]} \tag{3.14-b}$$

と書ける。いま、$B>0$、$C\geq 0$ に注意すると、線形安定性が破れる条件 $Re[\sigma_+]\geq 0$ は

$$D^2 \geq B^2 C \tag{3.15}$$

となり B、C、D の値を代入すれば

$$\bar{\phi}_0^2\,\phi_0\left[\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right]^2 k_z^2 \geq \left[1+\frac{\mu_0}{\tilde{\zeta}_0}k^2\right]^2 k^2\left(\kappa k^2 + f_0''\right) \tag{3.16}$$

となる。まず、$k=k_z=0$ の時、両辺はゼロとなりこのモードは中立安定である。さらに、$k\neq 0$ の時、両辺を k^2 で割ってやると左辺は $k=k_z$ で最大になり右辺は $k=0$ で最小になる。線形不安定になるモードが存在するかどうかを調べるには、$k=k_z$ としてさらに $k\sim 0$ のモードを調べると良い。したがって、判定条件は次式になる。

$$\bar{\phi}_0^2\,\phi_0\left[\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right]^2 \geq f_0'' \tag{3.17}$$

左辺の $\tilde{\zeta}(\phi)$ の対数微分があるところに前章で決定した

$$\tilde{\zeta}(\phi) = \frac{1}{Fr\bar{\phi}_0}\left(\frac{\bar{\phi}}{\bar{\phi}_0}\right)^{-n-1} \qquad n=4 \text{ 定数} \tag{3.18}$$

を用いてやると線形安定性の破れる条件は次のようになる。

$$(n+1)^2\,\phi_0 \geq f_0'' \tag{3.19}$$

さらに、右辺の f_0'' も前章で決定した形

$$f(\phi) = \frac{\alpha}{2}\frac{(\phi-\phi_0)^2}{\phi_{cp}-\phi} \tag{3.20}$$

を用いると

$$f''(\phi) = \alpha\frac{(\phi_{cp}-\phi_0)^2}{(\phi_{cp}-\phi)^3} \tag{3.21}$$

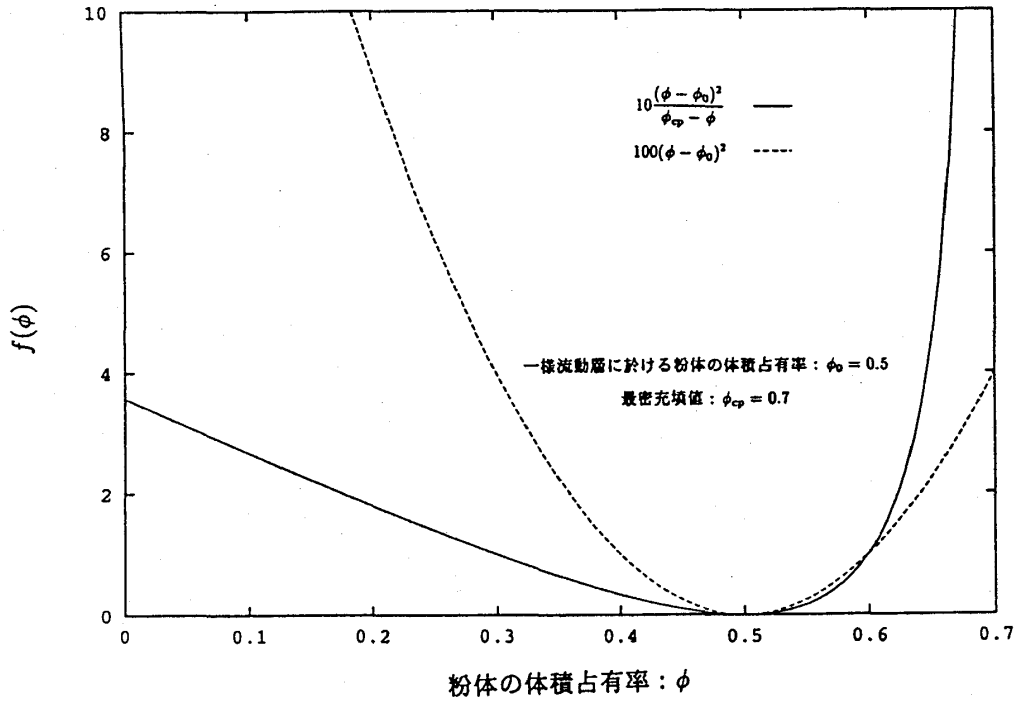

図 3.1: 粉体流動場の内部エネルギー
実線は本研究で用いたものでϕ_0で極小となり最密充填状態ϕ_{cp} $(= 0.7)$で発散する。
破線は佐々、早川 [12] で用いられたものでϕ_0で極小になる放物線である。
最密充填状態で発散する様な内部エネルギーを用いれば実験の状況を再現することが出来るが、単なる放物形では実験の状況と矛盾する結果を導く。

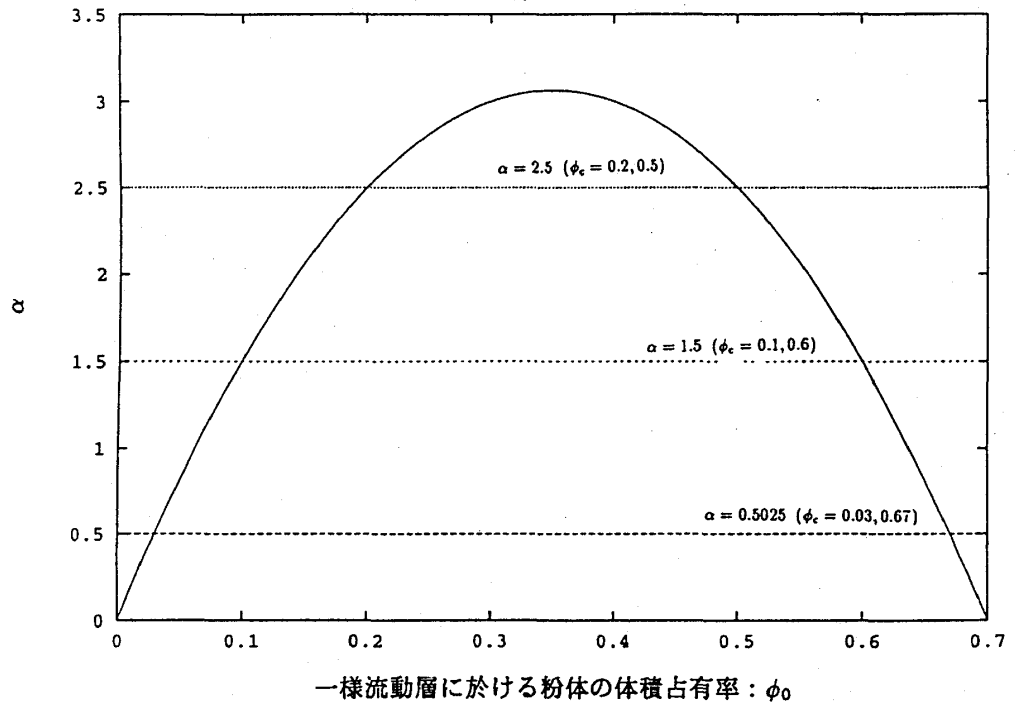

図 3.2: 粉体流動場の不安定化条件
実線は$(n+1)^2\phi_0/f_0''$をプロットしたもの。いくつかのαの値に対して水平線を引いている。
実線がこの水平線よりも上に出ているところは線形不安定である。逆に、最密充填状態に近いところと分散して希薄になったところで線形安定であることがわかる。最密充填値としては$\phi_{cp} = 0.7$を用いた。

であるから 結局、線形安定性の破れる条件は次のようになる。

$$(n+1)^2\,\phi_0\,(\phi_{cp}-\phi_0) \geq \alpha \tag{3.22}$$

今、左辺はϕ_0の関数として上に凸の放物線でありαが$\left(\frac{\phi_{cp}\,(n+1)}{2}\right)^2$より小さい時には左辺の値が右辺よりも大きくなるようなϕ_0が存在する。外部から気体を流し込む速度を増していくことを考える。最初、ϕ_0は最密充填値ϕ_{cp}に近い値をとっている。ここでは、まだ線形安定である。次第に流速を増していくとϕ_0は減少していき、ある値のところで線形安定性は破れる。さらに、流速を増していくと粉体は かなり分散した状態になりふたたび線形安定な領域に入る。このように粉体が詰まっている状態と希薄になって分散した状態が安定に存在することは実験で観測されている。これは一見逆説的な現象ではあるが、粉体粒子が希薄な状態では粉体粒子のクラスターを形成しにくいことは容易に理解できるだろう。また、ここで次のようなことに注意して欲しい。もしも$f(\phi)$に最密充填状態で発散する様な形を持つことを要請しなければ、考えられる一番簡単な形は

$$f(\phi) \;=\; \frac{\alpha}{2}(\phi-\phi_0)^2$$

というものであろう。実際、佐々、早川の論文 [12] ではこの形を用いている。しかしながらこれを用いると

$$f''(\phi) \;=\; \alpha$$

であるから、線形不安定になる条件は

$$(n+1)^2\phi_0 \geq \alpha$$

となる。 α が $(n+1)^2$ よりも小さければ気体の流し込み速度が小さいうち すなわち ϕ_0 が大きいうちは不安定で、段々 気体の流し込み速度を大きくしていくと安定化するということになる。これでは実際に実験で観察されている状況と矛盾してしまう。この様に$f(\phi)$として単純な放物形を仮定すると矛盾することが分かったが、上の議論によって $f(\phi)$ の形を決定するものではない。しかし、 $f(\phi)$ の形として式 (3.20) を用れば実験事実に対応した結果を得ることが出来ることを考えると式 (3.20) が妥当であることの一つの傍証となる。

さて、具体的に $\sigma_\pm$ 等を$k\sim 0$や$k \gg 1$の時に展開すると線形分散関係が見やすくなる。まず、$k\sim 0$で$\sigma_\pm$を展開すると

$$\begin{cases} Re[\sigma_+] \;\simeq\; \dfrac{\phi_0}{\tilde{\zeta}_0}\left[\left(\dfrac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right)^2\bar{\phi}_0^2\,\phi_0 - f_0''\right]k_z^2 - \dfrac{\phi_0}{\tilde{\zeta}_0}f_0''k_\perp^2 \\ Re[\sigma_-] \;\simeq\; -\tilde{\zeta}_0 \\ Im[\sigma_\pm] \;\simeq\; \mp\left(\dfrac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right)\bar{\phi}_0\phi_0 k_z \end{cases} \tag{3.23}$$

となる。 $Re[\sigma_+]$ を見ると線形安定性の破れは z 方向の波数 k_z の係数が正になる すなわち負の拡散係数が出現する場合に $Re[\sigma_+]$ が正となることがある。この負の拡散係数が

現れる条件は上で見た 線形安定性の破れるモードの存在する条件 (3.17) と一致する。z 方向に垂直な方向の波数 $k_\perp$ は単に普通の拡散に寄与している。この形を見ると $\tilde{\zeta}(\phi)$ が ϕ によって変化することが不安定化をもたらし、 $f(\phi)$ が系の安定化に寄与していることが分かる。 $\tilde{\zeta}(\phi)$ の ϕ 依存性が不安定化をもたらすのは物理的には次のように考えられる。系に密度の揺らぎが生じたとする。粉体の受けるドラッグは密度によって変化するので異なる密度の部分は違う速度で動こうとする。もしも、密度の高い部分の方が大きいドラッグを受けるような場合には上に行くにしたがって大きくなるような密度勾配の揺らぎが生じるとその揺らぎは成長する。逆の場合、すなわち密度の小さい部分の方が小さいドラッグを受ける様な場合にも上にいくにしたがって小さくなるような密度勾配の揺らぎが生じるとその揺らぎは成長する。実際には、粉体の詰まった部分の方がより大きいドラッグを受ける。粉体が詰まった方と分散した方のどちらが大きいドラッグを受けるかというのは ζ の微分に反映し、式 (3.23) の $Im[\sigma_\pm]$ に反映する。したがって波が上に進むか下に進むかに反映する。今の場合、線形不安定になるモード σ_+ は上に進み、線形安定なモード σ_- は下へ進むことが分かる。具体的に $\tilde{\phi}_L$ の逆変換を考えると

$$\phi_L = \frac{1}{2\pi i L}\sum_{\mathbf{k}}\int \mathrm{d}\sigma\ \tilde{\phi}_L \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}+\sigma t) \tag{3.24}$$

であるから、特に簡単な場合（単色波）

$$\phi_L(\mathbf{r},0) = \mathrm{e}^{i\mathbf{k_0}\cdot\mathbf{r}}, \qquad \partial_t\phi_L(\mathbf{r},0) = 0 \tag{3.25}$$

には

$$\begin{aligned}\phi_L &= \frac{-\sigma_-}{\sigma_+-\sigma_-}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}+\sigma_+ t} + \frac{\sigma_+}{\sigma_+-\sigma_-}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_0\cdot\mathbf{r}+\sigma_- t}\\ &= \frac{-\sigma_-\,\mathrm{e}^{Re[\sigma_+]t}}{\sigma_+-\sigma_-}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_{0\perp}\cdot\mathbf{r}_\perp+ik_{0z}(z-c_0t)} + \frac{\sigma_+\,\mathrm{e}^{Re[\sigma_-]t}}{\sigma_+-\sigma_-}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}_{0\perp}\cdot\mathbf{r}_\perp+ik_{0z}(z+c_0t)}\end{aligned} \tag{3.26}$$

$$\text{但し、}\qquad c_0 \equiv \left(\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right)\bar{\phi}_0\phi_0$$

となる。したがって、時間的に増大する波は z の正方向へ進行し、時間的に減衰する波は z の負方向へ進行し、その進行速度は c_0 である。さらに、線形不安定化する長波長領域では $\sigma_+ \sim O(k_z)$ で $\sigma_- \sim O(1)$ であるから z の負方向に進む波の成分は非常に少ないことになる。

次に $k \gg 1$ での $Re[\sigma_\pm]$ を展開をすると

- $4\kappa\phi_0/\mu_0^2 < 1$ の時　　$Re[\sigma_\pm] \simeq -\dfrac{\mu_0}{2}\,k^2\left[1 \mp \sqrt{1-\dfrac{4\kappa\phi_0}{\mu_0^2}}\right]$,　　$Im[\sigma_\pm] \simeq 0$
- $4\kappa\phi_0/\mu_0^2 \geq 1$ の時　　$Re[\sigma_\pm] \simeq -\dfrac{\mu_0}{2}k^2$,　$Im[\sigma_\pm] \simeq \mp\dfrac{\mu_0}{2}\,k^2\sqrt{\dfrac{4\kappa\phi_0}{\mu_0^2}-1}$

となり、$\kappa \neq 0$ である限り k の大きいところでは線形安定となる。逆に言えば短波長成分に対する線形安定性を保証するためには κ、すなわち、自由エネルギーの拡散項が必要であることがわかる。

ここで、直観的に理解するためにあるパラメタに対応した線形分散関係のグラフを掲載しておく。

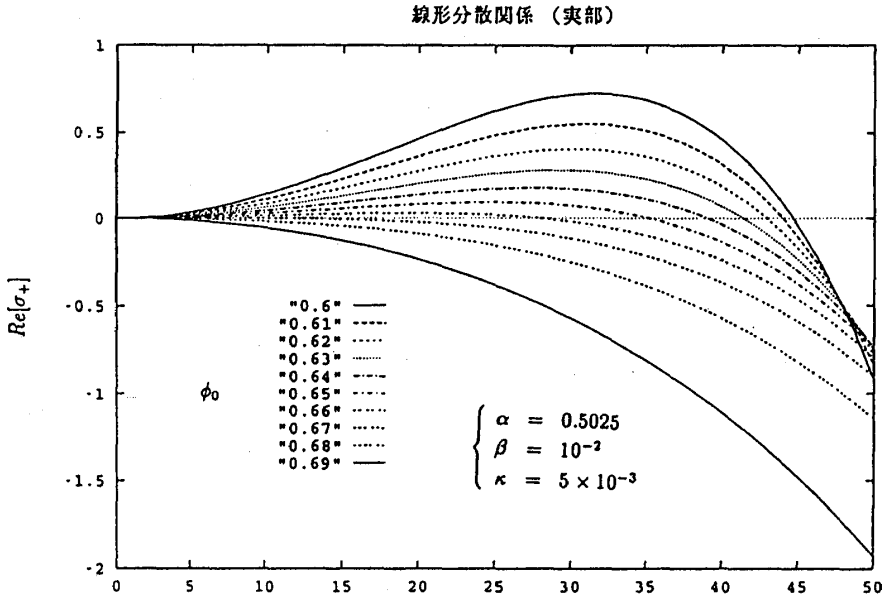

図 3.3: $Re[\sigma_+]$

図中にあるパラメタの正確な意味は計算機実験の章（第 4 章）を参照のこと。α と κ は自由エネルギーに関係し、β は粘性係数に関係する。最密充填状態を $\phi_{cp} = 0.7$ とした。この図のパラメタでは $\phi = 0.67$ で線形不安定化を起こす。横軸は z 方向の波数 k_z で横方向の波数 $k_\perp$ はゼロとした。長さの単位は計算機実験の章でシステムサイズを $L = 1$ と規格化した時に対応する。この図を見ると、$\phi_0 = 0.68, 0.69$ では $k = 0$ のモードのみが中立安定でその他のモードは線形安定である。そして、ϕ_0 が 0.67 よりも小さくなると有限の波数に対して $Re[\sigma_+]$ は正の値を持ち、大きな波数に対しては線形安定となる。基本的に k_z^2 で立ち上がって、k_z^4 で押えられるという構造をとっている。

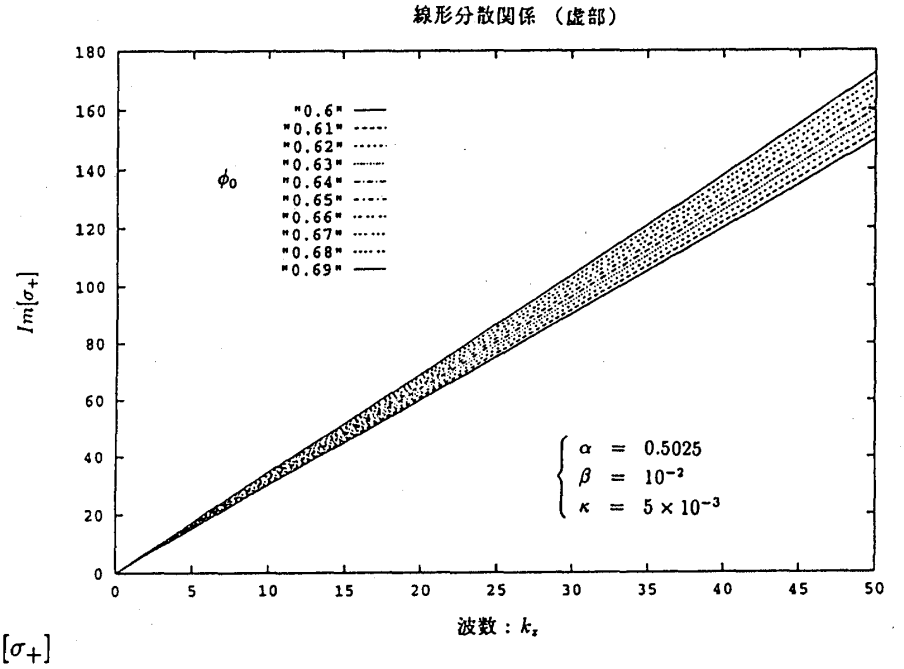

図 3.4: $Im[\sigma_+]$

パラメタは $Re[\sigma_+]$（図 3.3）と同じである。図に示してある範囲の波数については ほぼ線形と見て良い。したがって、波はほとんど変形せずにボイド波速度 c_0 で流れる。この線形性からのずれは k_z^3 で始まり、波に分散性を与えるが弱非線形解析（第 5 章）では この分散性が重要な役割をする。

第 4 章

計算機実験

4.1 計算機実験の方法

前章までにモデルの設定をして線形解析を行なった訳であるが、実際には線形の範囲では独立に考えることの出来たノーマルモードも非線形効果によって独立ではなくなり相互作用をするようになる。これによって系に波（揺らぎ）が立つと分散効果による波の変形のみでなく非線形効果による波の変形も起こる。したがって、この系について理解するためにはどうしても非線形効果を含めた解析が必要となる。この方法には、大きく分けて二つの方法がある。何か妥当な近似を用いて理論的に解析を進める方法と計算機を用いてモデル方程式を直接シミュレートする方法である。この章では、まず後者の立場に立ち この系がどんな振舞いを見せてくれるのかを見ていくことにする。

今回の計算は全て一次元系について行なった。線形解析によれば系の不安定化に重要な役割を持つのは鉛直軸方向であることがわかるが、系の物理量がこの軸の方向にのみ変化し水平方向については ほぼ一様であるといった特殊な場合を考える際にはモデルは一次元モデルに縮約される。この縮約された一次元モデルは元のモデルの不安定化の機構を充分反映したものになっているはずである。また、一次元という特殊性のためにモデル方程式には圧力が直接反映しなくなり、非常に簡単化されることになる。

実際の計算では空間差分に Tayler 展開法による 2 次精度の差分式を時間発展には 4 次精度の Runge-Kutta 法を用いたスキームを用いた。この差分近似による計算方法が実用に耐え得るものであることを確認するために、同様の差分近似による計算方法を用いて KdV 方程式の数値解 [20] が充分な精度で得られることを確認した。

4.2 モデルのパラメタ設定

我々のモデルにはいくつかのパラメタがあるので数値計算する場合にはそれらの形を正確に設定する必要がある。それらは下に示す様に仮定された。

- 長さの単位
  システムサイズを L に規格化する単位を用いた。

粉体粒子半径を $a = 0.01\,(\mathrm{cm})$ とした時、$L/a = 10000$ とした。
もしくは、$a^4/L = 10^{-10}\,(\mathrm{cm}^3)$。

- 密度の単位
粉体粒子の密度：　$\rho_\mathrm{p} = 2.5\,(\mathrm{g\,cm^{-3}})$
アルミやガラス等の値を用いた。

- 速さの単位
気体の流し込み速度：　U_0 ＝ 一様流動層での値 （定数）。
U_0 に対する ϕ_0 の関係は実験データによって与える。

$$U_0 = U_\mathrm{max}\bar{\phi}_0^n \tag{4.1}$$

ϕ_0 ：一様流動層での粉体体積占有率 （定数）。
U_max は希薄極限 ($\bar{\phi}_0 \to 1$) で Stokes 則に従うことを使って以下のように書ける。

$$U_\mathrm{max} = （重力）/（摩擦係数）= \left(\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_\mathrm{p} g\right)/\left(6\pi a \mu_\mathrm{g}\right) \tag{4.2}$$

$g = 980\,(\mathrm{cm\,s^{-2}})$：重力加速度
$\mu_\mathrm{g} = 1.8\times10^{-4}\,(\mathrm{g\,cm^{-1}\,s^{-1}})$　：空気の粘度（気体を空気とした。）
さらに、Froud 数は次のように決まる。

$$Fr = \frac{U_0^2}{gL} = \frac{U_\mathrm{max}^2}{gL}\bar{\phi}^{2n} = 0.93\,\bar{\phi}^{2n}$$

- 粉体-気体間ドラッグ

$$\tilde{\zeta}(\phi) = \frac{1}{Fr\bar{\phi}_0}\left(\frac{\bar{\phi}}{\bar{\phi}_0}\right)^{-n-1}$$

実験データの簡単な外挿形。　　$n = 4$ （定数）。

- 自由エネルギー

$$\begin{cases} \kappa = 定数 \\ f(\phi) = \dfrac{\alpha}{2}\dfrac{(\phi-\phi_0)^2}{\phi_\mathrm{cp}-\phi} \end{cases}$$

α ：定数、　$\phi_\mathrm{cp} = 0.7$ ：最密充填値。
最密充填状態で発散し極小値を一つだけ持つという条件で一番簡単なものを選んだ。

- 粉体-粉体間粘性

$$\mu(\phi) = \frac{\beta}{\phi_\mathrm{cp}-\phi}$$

β ：定数。
ϕ の単調増加関数で且つ最密充填状態で発散するという条件で一番簡単な形を選んだ。

4.3 計算結果

以下、4.2 節で述べたパラメターの値と共に計算機実験で得られた結果を掲載する。

まず、図 4.1では$\alpha = 0.5025$ と設定したので 一様流動状態はϕ_0 が 最密充填状態 $\phi_{cp} = 0.7$ と臨界値 $\phi_c = 0.67$ の間の値をとる時には線形安定で $\phi_c = 0.67$ よりも小さくなったときに線形不安定化する（図 3.2を参照)。そして、ここで用いた ϕ_0 は $\phi_0 = 0.65$ であって臨界値 ϕ_c より僅かに小さく 線形不安定なパラメタ領域に相当する。初期値としては一様流動状態 $\phi = \phi_0$ が僅かに揺らいだ状態を考えた。揺らぎは単色とし、振幅が ϕ_0 の 1％で、周期がシステムサイズとした。図 4.1は これらのパラメタ、初期値を用いて計算した結果である。横軸は実験系に対しボイド波速度 (= 3.25) で動く座標系である。尚、図中 右方向が実際の上向きに対応する。縦軸は粉体の体積占有率 (ϕ) である。また、時間 0.1 毎のスナップショットを上から下の順にずらして並べてある。波は、非線形効果によりショックを持つ傾向を持ち、突っ立った後、波はいくつかの孤立波に分裂して伝搬する。その際、孤立波は振幅の大きい方が速度も大きいので、図では孤立波が振幅の大きい順に右から並んでいるのがわかる。尚、座標の区分数を $N = 200$ とし、時間刻みを $dt = 10^{-5}$ とした。

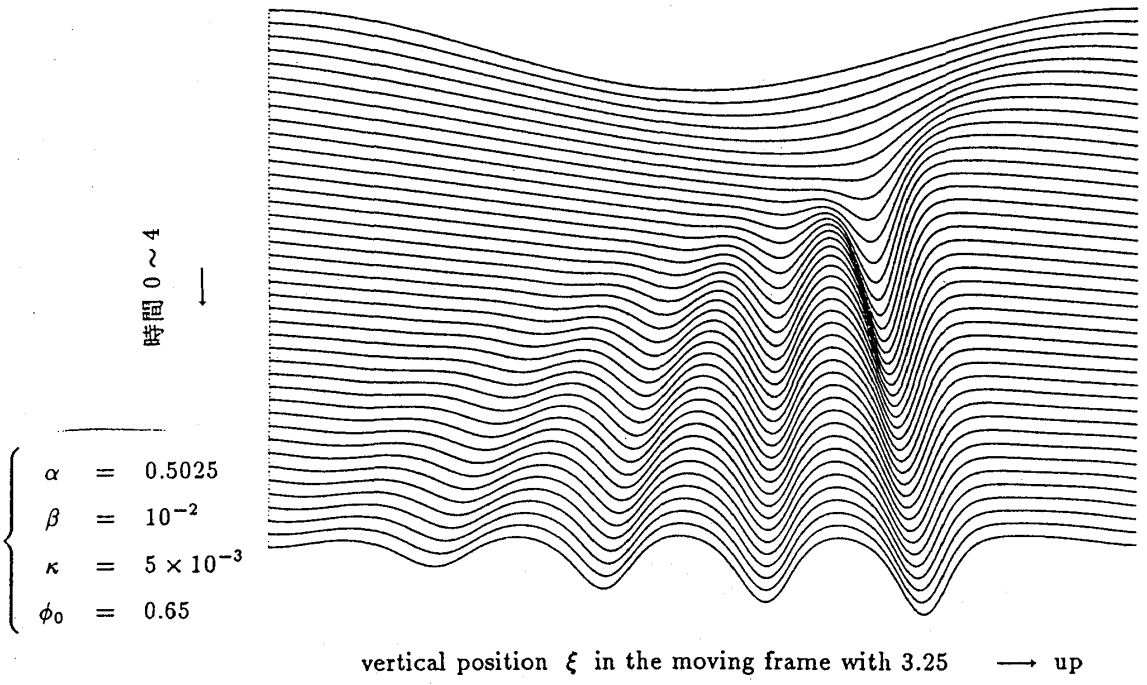

図 4.1: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

また、図 4.2は図 4.1の後さらに時間発展している図である。見やすくするために横軸の座標は二周期分描いてある。孤立波のすり抜ける様子がよくわかる。このことから孤立波がソリトンに近いことがわかる。しかし、衝突後に完全には振幅が回復していないため速度が変化している様子も窺える。以上の結果より臨界点近傍では擬似ソリトンが

存在する事を確認できた。また佐々、早川は不安定化の度合いに比べて粘性の効果が充分に大きい場合に（逆に言うと臨界点近傍で）KdV 方程式を得ていた [12]。図 4.2の結果はこの KdV 方程式のソリトン解に対応したものと考えられる（第 5 章を参照）。

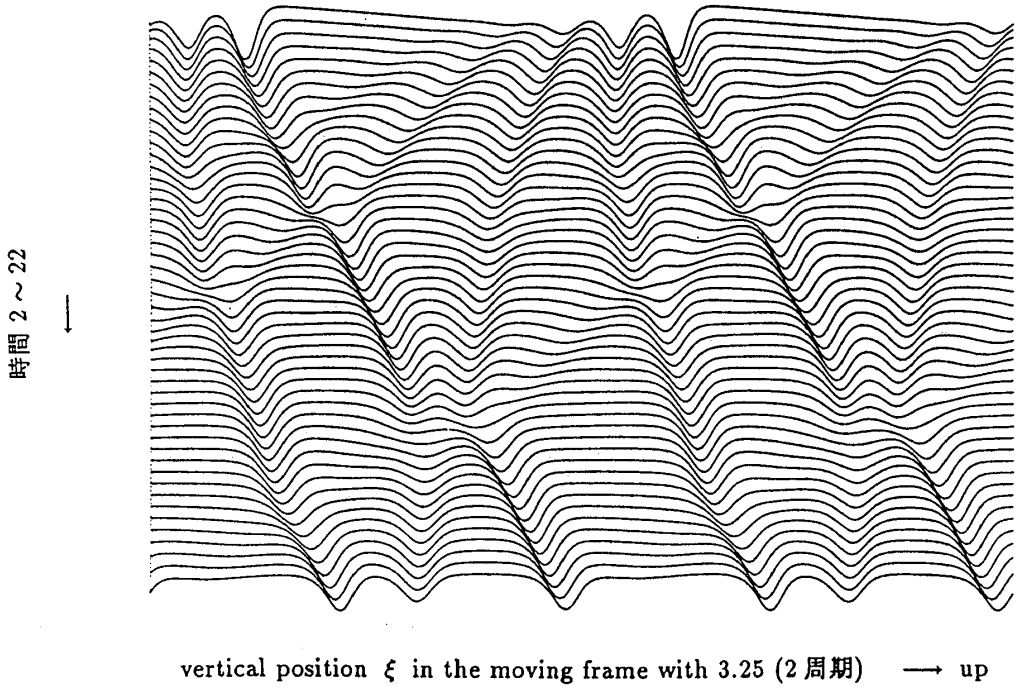

図 4.2: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

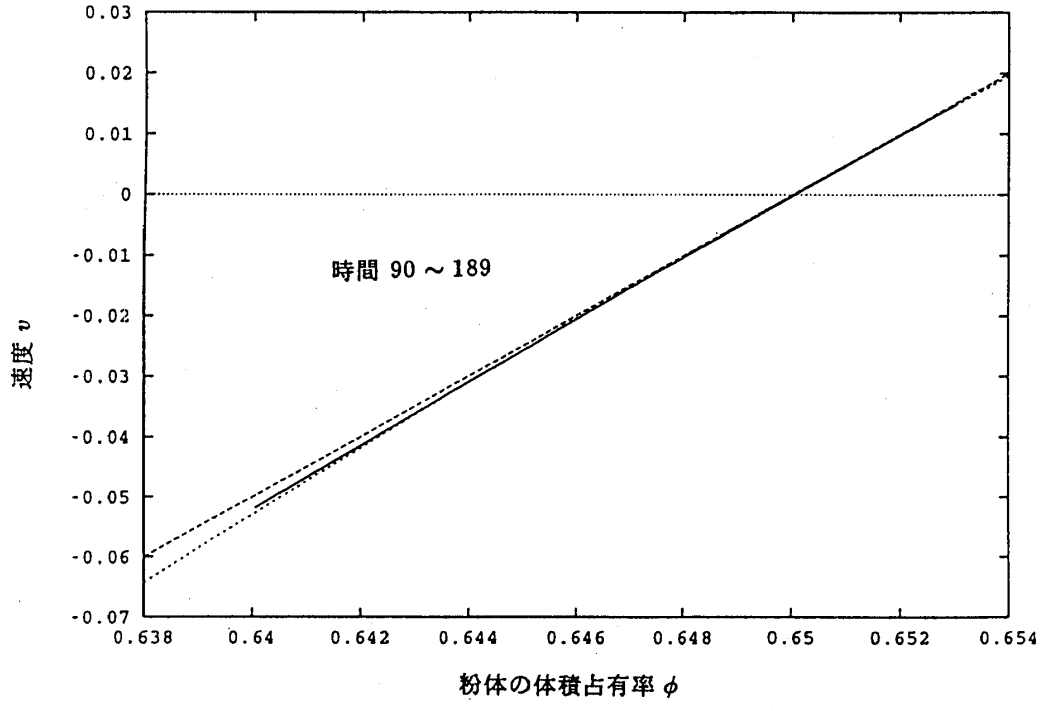

図 4.3: 粉体の体積占有率 ϕ vs. 速度 v

図 4.3は図 4.1と同じ条件で解いた際の時刻 90 から 189 までの時間 1 毎のスナップショッ

トについて重ね合わせてある。図では全ての座標点上の体積占有率ϕに対する速度vをプロットしてある。この図から読みとれることはϕとvに強い相関があることである。この相関はvがϕに追随して、Fixed Point に落ち込んでしまうことによって生じている。この Fixed Point は長波長近似では$\phi = V - \frac{1}{Fr\tilde{\zeta}}$ である。図 4.3の点線は この Fixed Point をプロットしたもので、破線は この Fixed Point をさらに線形化したものである。計算結果のプロットは これら Fixed Point に良く一致していることから、この状況ではvがϕに追随しているという描像が充分に成り立っている事がわかる。

図 4.4は図 4.1と全く同じ条件の元で解いた計算結果を図 4.1よりも もっと長時間にわたって見たものである。時刻は初期時刻 0から 99まで 時間 1毎のスナップショットを描いてある。尚、図 4.2と同様に見易さの為に空間を二周期分描いてある。最初、ソリトン的にすり抜けて伝搬していた波は次第にその振幅を変化させ 同時に、その伝搬速度を変化させていった後、ほぼ振幅の等しい孤立波が生き残って伝搬していく様子が見て取れる。

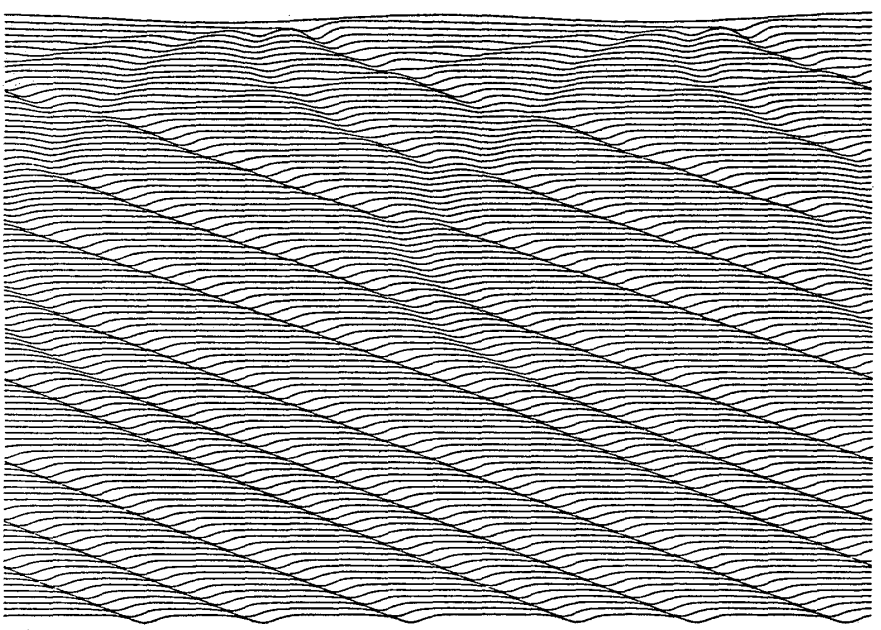

図 4.4: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

図 4.5は 図 4.4で生き残った孤立波が その後どの様になるかを追いかけたものである。時刻は 100から 時間 10毎のスナップショットを描いてある。図 4.5の横軸には見やすさを考慮してボイド波の伝搬速度ではなく、孤立波がほぼ止まって見えるようなフレームでの座標を用いている。孤立波は非常に安定に伝搬している様子が観察された。[1]

図 4.6は図 4.4の後半で形成された孤立波の形状がどれくらい変化しているのかを見た

[1]最近、金子 邦彦氏 によって発表された論文 [26] に Coupled Map Model の解として Traveling Wave Solution が報告されている。Chaos が 空間的に相互作用（拡散）することで安定な解が出てくるという全くことなる現象であるがすごく深いところでつながりがあるのかも知れない。（もちろん、無いことの方が確率が高いだろうが。）

ものである。時刻90 から 100までの時間1毎のϕのスナップショットを適当なフレームで重ねてある。真中の孤立波は左に寄っていくのでずれているが形は三つの波とも ほとんど変化していない。さらに、時間が経つと三つの孤立波はほぼ等間隔に並んでしまうことが図 4.5から わかる。

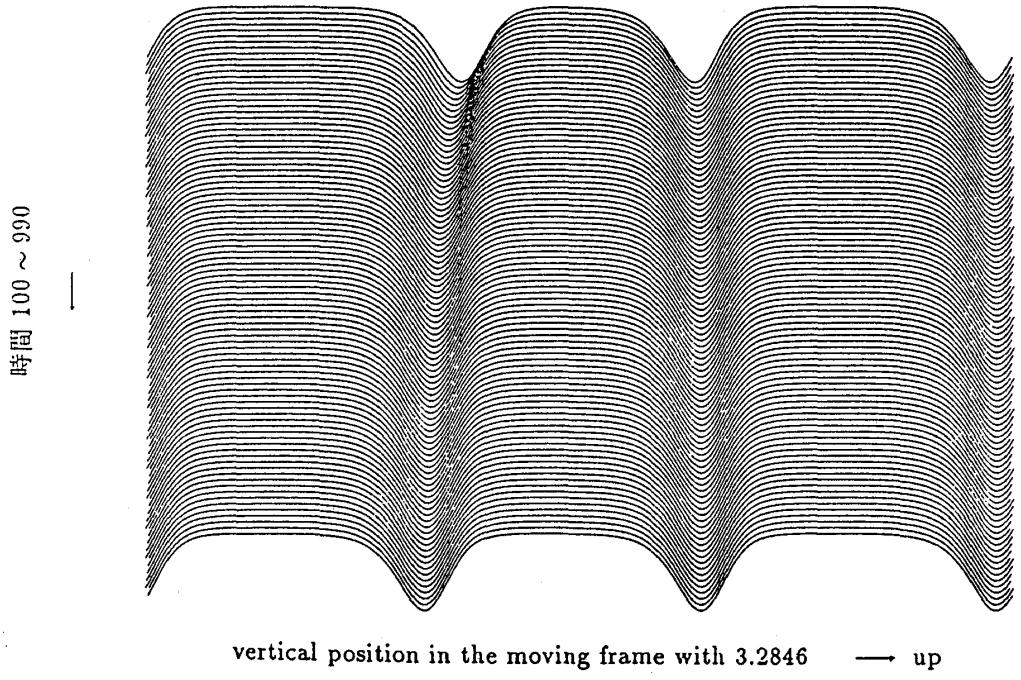

図 4.5: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

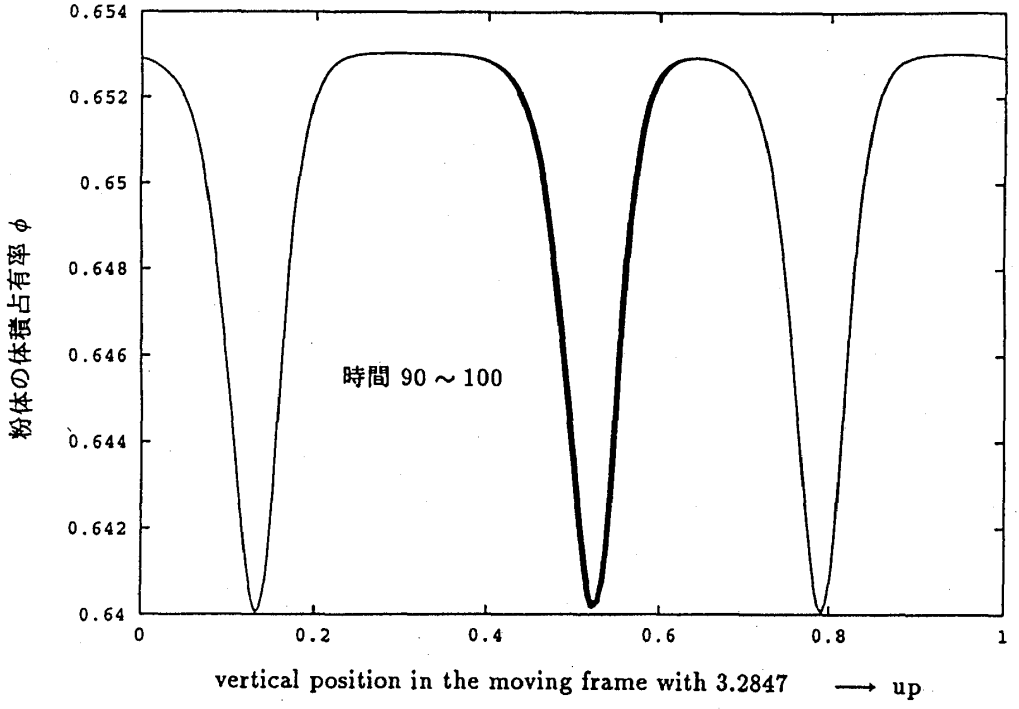

図 4.6: 粉体の体積占有率 ϕ の形状

図 4.7は新しいパラメタでの計算結果であるが、パラメタは図 4.1とほとんど同じで、ϕ_0 のみが異なっている。ここでは $\phi_0 = 0.6$ である。したがって、図 4.1 の状況に比較すると、気体の流し込み速度が大きく、系はより不安定化した状況になっている。[2]横軸はボイド波速度に乗ったフレームで二周期分表示してある。ϕ の時間 0.1 毎のスナップショットを上から下の順に並べている。図 4.1 の時と同じように非線形効果によって波は突っ立ち孤立波に分裂する。しかし、今回の場合は より不安定化しているため、孤立波は衝突をしないうちから独りでに深くなっていく。また、同時に孤立波の軌跡が湾曲していることもわかる。これは、v が ϕ に追随して Fixed Point に落ち込む場合、孤立波は深くなるほど より速く上昇するからである。さらに、わずかなきっかけ（波の衝突等）で波が急成長する様子が窺え非常に興味深い。（図中で一番下にプロットしたスナップショットを参照。）尚、座標の区分数を $N = 200$ とした。[3]

図 4.8は図 4.7の下方で衝突によって孤立波が急激な成長をしている様子をより細かく見たものである。（その後の様子も少しプロットしてある。）横軸はボイド波速度の乗ったフレームの一周期分である。すり抜ける成分や新しく生成した成分、急成長する成分などがみられかなり複雑である。急成長した深い孤立波の上昇速度は より浅い孤立波の上昇速度よりも遅く、今までの 孤立波は深いほど速く上昇するという単純な状況とは異なっている。

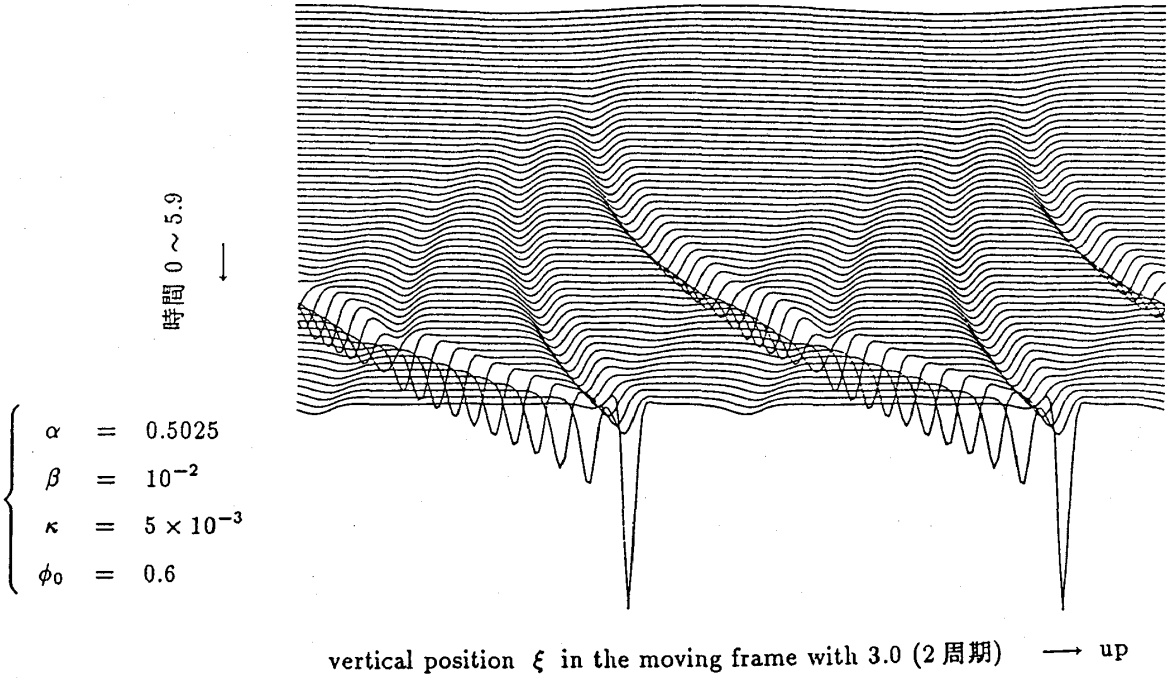

図 4.7: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

[2]しかし、ϕ_0 以外のパラメタがすべて等しいからといって必ずしも気体の流し込み速度だけを変化させたことには対応しない。何故なら、各パラメタは流し込み速度によって無次元化されており、無次元化した値として一致しているに過ぎない。

[3]今用いている手法では座標の区分数を変えると計算が発散することがあり、この解が正確にもとのモデル方程式を解いている保証はない。しかし、この $N = 200$ での計算は発散せずにかなり安定な孤立波解を与えてくれた。この解は 非常に希薄な部分が粉体流動層の中に出現するという意味で、実際の Bubble に対応している様に思えるのでとても興味深い解である。ここでは この解を厳密ではないにしてもモデル方程式に含まれる解と考えている。

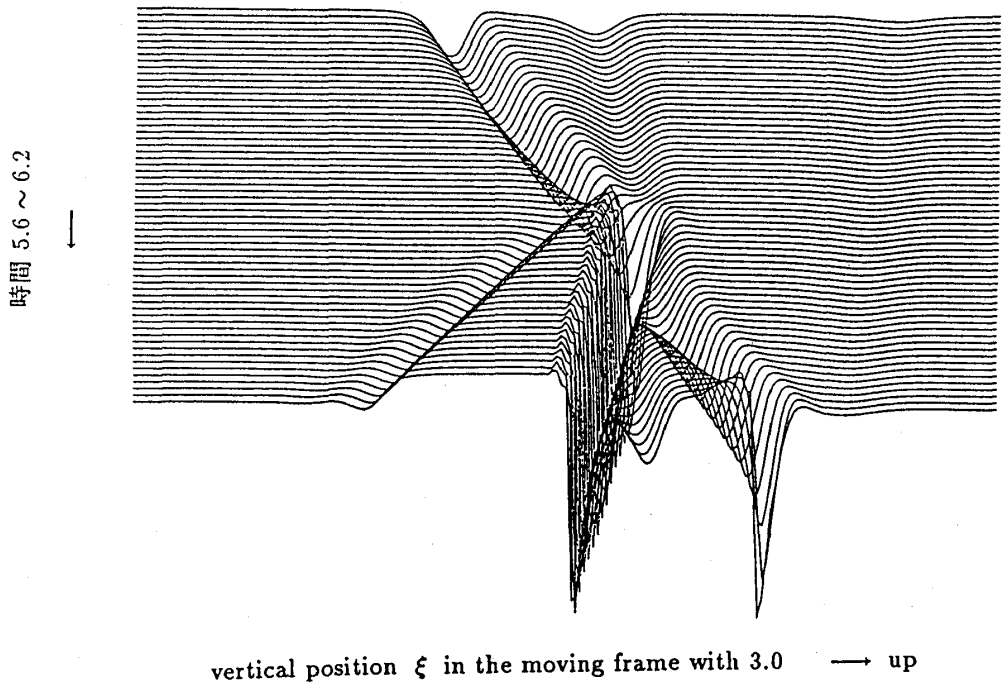

図 4.8: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

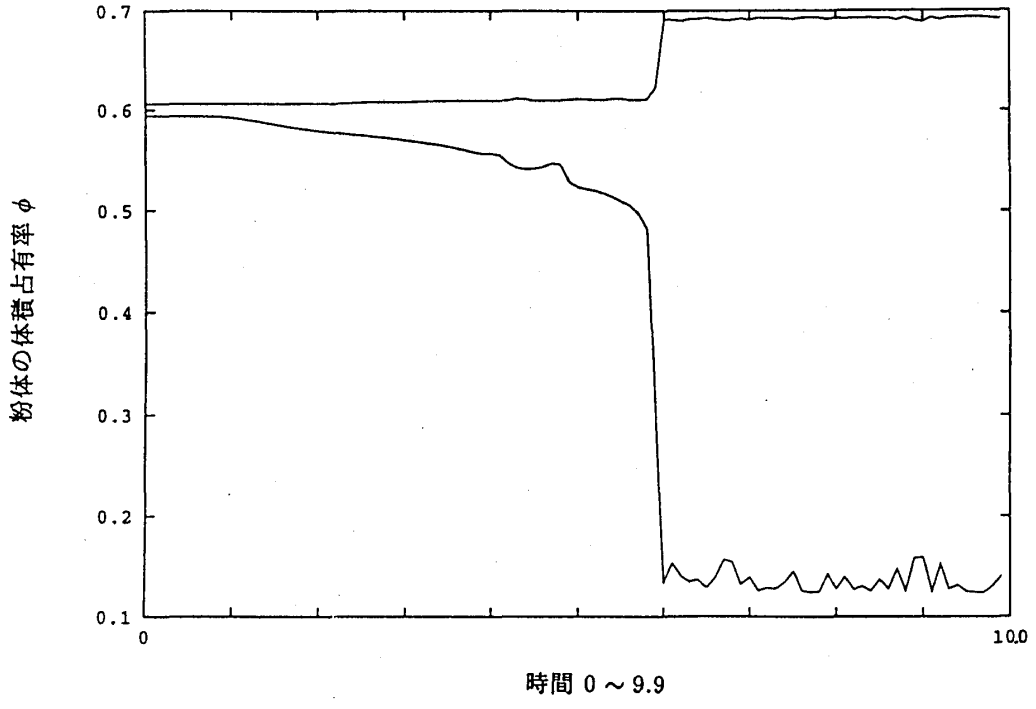

図 4.9: 粉体の体積占有率 ϕの最大値、最小値の時間変化

図 4.9は図 4.7に於いて孤立波がどれくらい急激に成長しているかを見る為にϕのスナップショットの最大値と最小値をプロットしたものである。横軸は時間で縦軸はϕの最大、最小値に対応するϕの値である。急激に成長した後、最大値と最小値はそれぞれ最密充填値と非常に希薄な状態に対応する値をとって飽和してしまう事が分かる。

図 4.10は図 4.8と同様に孤立波の急激な成長を細かく見たものであるが、図 4.8よりももうすこし長い時間スケールで見ている。本当にわずかなきっかけで次々に深い孤立波（空隙）を作るのが分かる。横軸はボイド波速度に乗ったフレームで二周期分表示してある。

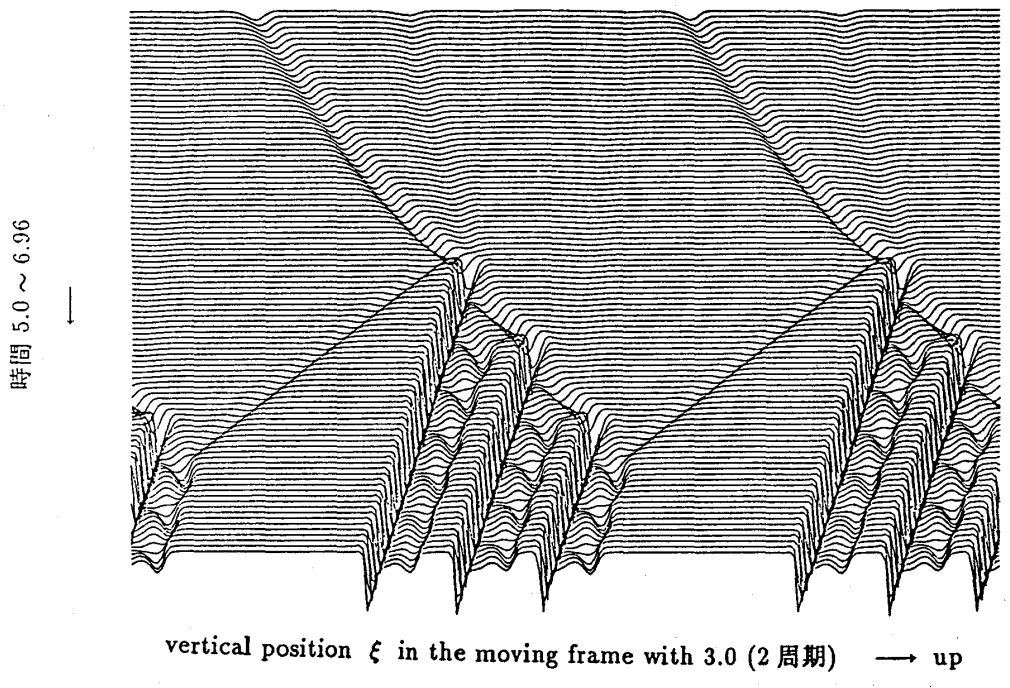

図 4.10: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

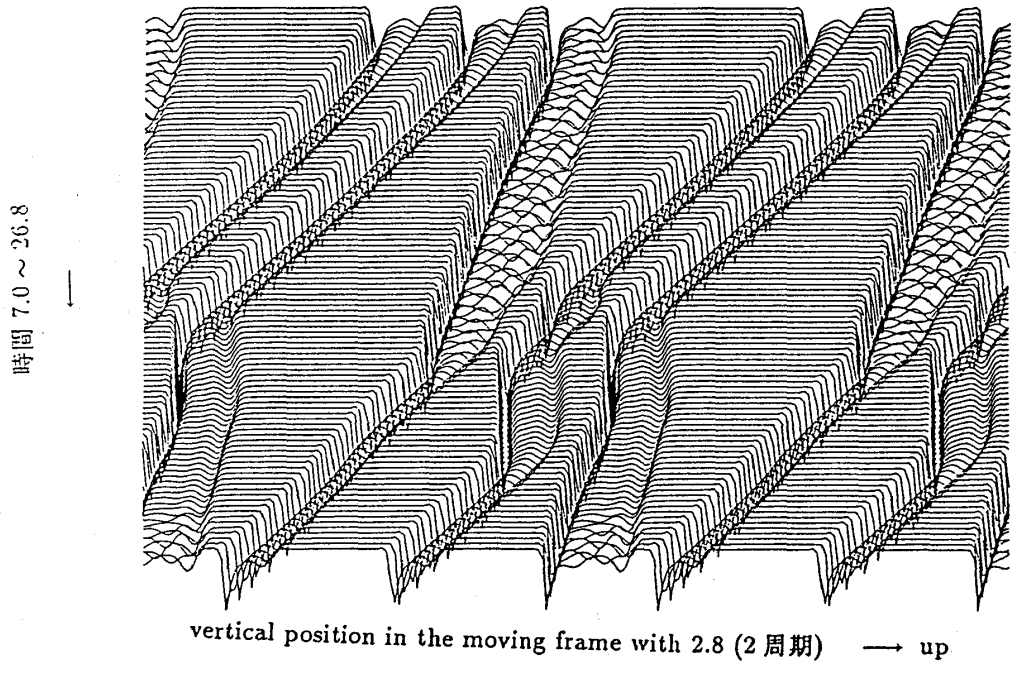

図 4.11: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

図 4.11は図 4.10に引き続く時間発展の様子を示したものである。深い孤立波（空隙）は互いに相互作用をしてクネクネと伝搬している。横軸はボイド波速度より 0.2 遅い速度で動くフレームで二周期分表示してある。この場合、孤立波は すり抜けるよりも避け合っているように見える。

図 4.12は図 4.11に引き続く時間発展の様子を示したものである。相変わらず、深い孤立波（空隙）は互いに相互作用をしてクネクネと伝搬している。横軸はボイド波速度より 0.2 遅い速度で動くフレームで二周期分表示してある。

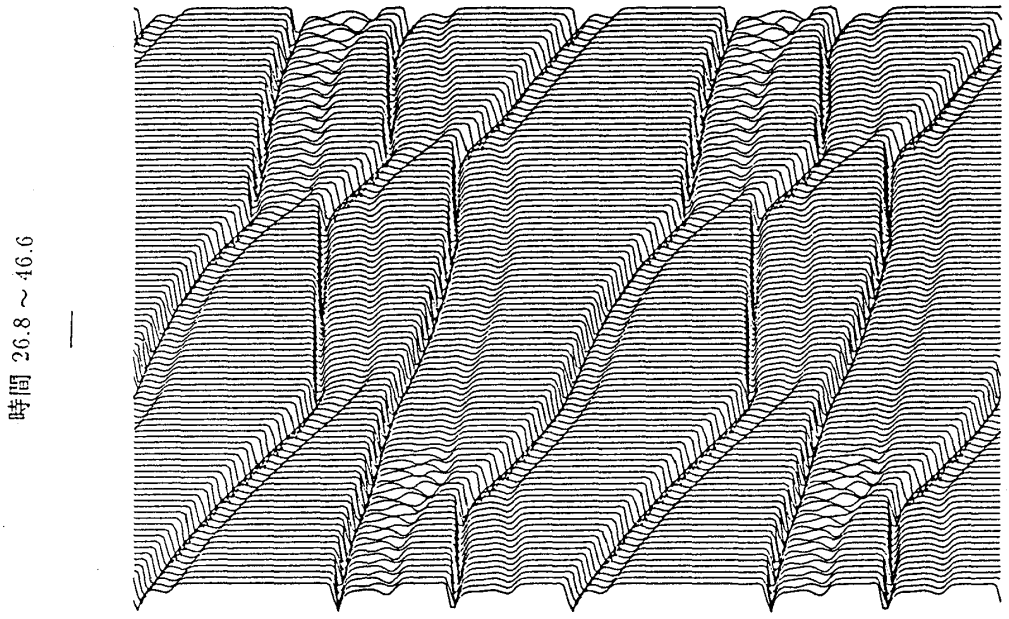

図 4.12: 粉体の体積占有率 ϕ の時間発展

図 4.13は図 4.12の中のある時刻に於ける ϕ のスナップショットであり、図 4.14は図 4.13と同時刻に於ける v のスナップショットである。横軸は座標で縦軸にそれぞれ ϕ、v をプロットしてある。図 4.6と比較して個々の孤立波は複雑な形をしていることが分かる。図 4.13の ϕ の形状と図 4.14の v の形状とを見比べると ϕ と v は単純な比例関係にないことが分かる。これは図 4.3と対照的である。

図 4.13と図 4.14を比較すると v が ϕ の小さいところで非常に大きな負の値を取っていることである。ϕ の小さいところでは粉体粒子に働くドラッグは小さくなり重力の効果によって急速に落下しているのである。しかし、波としては図 4.12から分かる様に上向きに進んでいることに注意してほしい。

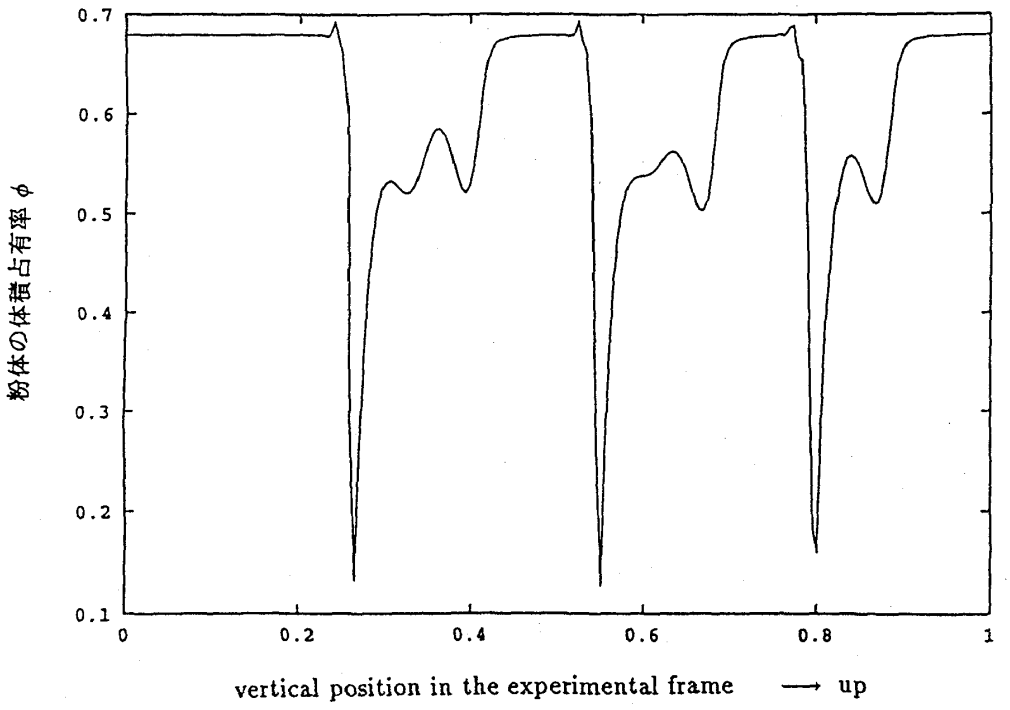

図 4.13: 粉体の体積占有率 ϕ の形状（時刻 30 ）

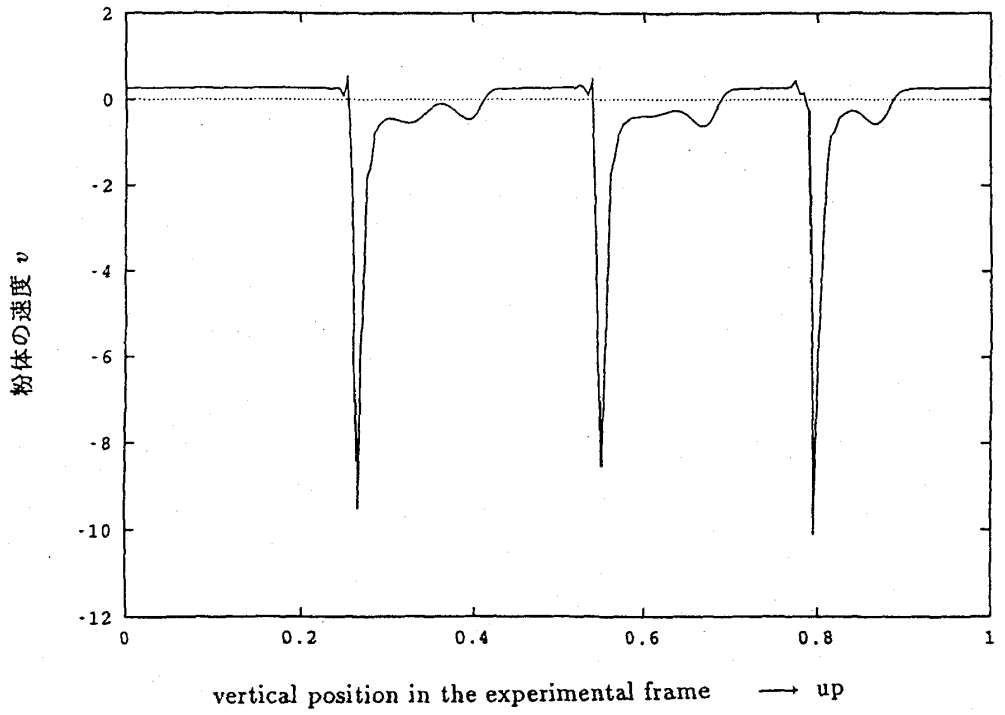

図 4.14: 粉体の速度 v の形状（時刻 30 ）

第 5 章

非線形解析

5.1　非線形解析の必要性

計算機実験によれば系に与えた揺らぎは非線形効果によってショックを形成する傾向を持ち不安定化が小さい範囲ではソリトン的振舞いをする解の存在が確認された。これらの解に対応する理論を調べようとするのがこの章の目的である。線形近似の理論に於いては、解が不安定になる領域があることがわかった。それは、負の拡散係数の出現によって特徴付けられる。最初、粉体は最密充填に近い状態で詰められている。外部からの気体の流し込みをしだいに大きくしていくと、一様粉体流動層はあるところで系のわずかな揺らぎによって不安定化する。線形理論では不安定化が起こることはわかっても、その後の振舞いについては充分な情報を与えてはくれない。本来、particulate fraction は不安定化しても $0 \leq \phi \leq \phi_{cp}$ の範囲に留まっていなければならないのだが、線形理論では一方的に増大するのみである。したがって、非線形効果も含んだ解析が必要とされる。現在、我々のモデルの非線形領域における解析は簡略モデル（2.6節）に限られている。この簡略モデルは一次元については正確に成り立つものである。したがって、主に一次元を念頭に置いた解析と言えるかも知れない。しかし、線形不安定性は z 方向の波数によって起こり、横方向の波数は普通の拡散として寄与することを考えると、まず一次元モデルについて考えることは充分に価値のあることであると思われる。もちろん簡略モデルだけでなく、元のモデルの高次元における解析も進めて逆に簡略モデルの妥当性を見ることも今後必要となるだろう。とりあえず、次の節で簡略モデルについて復習し、続く節で 佐々、早川の VFD の方法 [12] による解析を紹介し、その後で より物理的意味のはっきりした逓減摂動法により弱非線形解析を行ない、両者の一致を見た。さらに、計算機実験により逓減された方程式の妥当性についても見た。

5.2　簡略モデル

2.6節で簡略化したモデルを導出した。

$$\begin{cases} \partial_t \phi = -\nabla \cdot (\phi \boldsymbol{v}) & \text{(5.1-a)} \\ (\partial_t + \boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = \tilde{\zeta}(\phi)(V\mathbf{e}_z - \boldsymbol{v}) - \nabla\dfrac{\delta A}{\delta\phi} - \dfrac{\mathbf{e}_z}{Fr} & \\ \qquad + \dfrac{1}{\phi}\,\mathrm{Div}\left[\phi\mu(\phi)\left(\dfrac{\nabla\boldsymbol{v} + \nabla\boldsymbol{v}^t}{2}\right)\right] & \text{(5.1-b)} \end{cases}$$

V は定数であると仮定していたが、zに依存しなければx, y, tの関数であっても良い。x, yへの依存性は横方向にシステムサイズが大きい場合、したがって壁の効果があまり寄与しないと考えられる場合にはその依存性は無いとしても物理的におかしなことにはならないであろう。もちろん、$\mathbf{V}$ が横成分を持つことや x, y に強く依存する場合が考えられない訳ではない。ただ、簡単化の為に定数と考えるのである。また、t依存性も無視することは自明ではないが、系に時間的に変化する外場をかけるといったことを考えない場合にはある程度素直な仮定と考えられる。気体の流し込みの速さを次第に大きくする際にも充分ゆっくりと変化させるならば 上の仮定を当てはめて良いだろう。以後 V は定数であることを仮定する。特に 最初、一様粉体流動層である場合を考えると $V = \bar{\phi}_0 U_0$ となる。但し、U_0 は気体の流し込み速度である。特徴的な気体の速度 U_0 を使って無次元化すると $V = \bar{\phi}_0$ となる。初期状態として一様流動層を念頭においているので V を $\bar{\phi}_0$ とおいた。しかし、V が定数の場合に V を変えることは単に、Galilean 変換することに対応するだけなのでさしたる問題ではない。

5.3 VFD の方法

ここでは、佐々、早川による VFD の方法 [12] を紹介する。VFD とは聞きなれない言葉であるが Void Fraction Dynamics の略だそうだ。Void Fraction とは気体の体積分率 $\bar{\phi}$ のことである。簡略モデルは 体積分率 と 速度 の 連立微分方程式であったが速度は速い変数であり 遅い変数 体積分率に追随すると考えられる。このことにより、連立微分方程式であったモデルから体積分率のみで閉じた有効微分方程式が導かれる。これは Center Manifold の方法として良く知られたものである。尚、以下に紹介する計算の結果を見ると佐々、早川の論文 [12] で導かれた係数に誤りが見られることがわかる。しかし、これは何ら定性的違いを見せないと思われる。

以下、佐々、早川の論文 [12] と同様に一次元のモデルについて計算を行なうことにする。

$$\begin{cases} \partial_t \phi = -\partial_z(\phi v) & \text{(5.2-a)} \\ \partial_t v + v\,\partial_z v = \tilde{\zeta}(\phi)(V - v) - \dfrac{1}{Fr} & \\ \qquad - f''(\phi)\,\partial_z\phi + \kappa\,\partial_z^3\phi + \dfrac{1}{\phi}\,\partial_z[\phi\mu(\phi)\,\partial_z v] & \text{(5.2-b)} \end{cases}$$

連立偏微分方程式 (5.2) に於いて粉体の速度 v は粉体の体積分率 ϕ に追随することが期待される。というのは、物理量の空間変化が非常に緩やかな場合を考える為に、第零近似として $\partial_z = 0$ とすると 式 (5.2) は

$$\partial_t \phi = 0, \quad \partial_t v = \tilde{\zeta}(\phi)(V - v) - \frac{1}{Fr} \tag{5.3}$$

というローカルに物事が決まる式になるが、これを見ると v についての方程式は緩和型で定数 ϕ によって決まる固定点 $V - [Fr\tilde{\zeta}(\phi)]^{-1}$ に時間スケール $\zeta(\phi)^{-1}$ で落ち込むことが分かるからである。また、空間変化を考慮しなければならない場合にも線形解析から分かったように一つのノーマルモードは時間スケール $\tilde{\zeta}_0^{-1}$ で緩和する。その際のスローモードは上で見たように長波長近似で考える限り ϕ と考えられる。したがって、v が ϕ に追随するという描像が成り立つ。[1]このような場合、v は ϕ に隷従しているので

$$v = v[\phi] = v(\phi, \partial_z\phi, \partial_z^2\phi, \cdots) \tag{5.4}$$

の様に v が ϕ の汎関数で書けることが期待できる。この ϕ の汎関数 すなわち Center Manifold を v の微分展開を用いて決定しようというのがこの節の目的である。またパラメター $\tilde{\zeta}$ が大きい場合にはじめて時間スケールの分離が起こって上のような仮定が出来ることを注意しておく。さて、まずは上のモデルの第二式（v に対する運動方程式）を使うことによって $v[\phi]$ の形を決めよう。この結果をモデルの第一式（ϕ に対する運動方程式）に代入することによって ϕ だけで閉じた方程式を得ることが出来る。その方程式には v の効果が有効的に繰り込まれているはずである。v の Center Manifold を求める際に、次の関係式に注意する。

$$\begin{aligned} \partial_t v[\phi(z,t)] &\equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v[\phi(z,t+\Delta t)] - v[\phi(z,t)]}{\Delta t} \\ &= \frac{\delta v}{\delta \phi} * [\partial_t \phi] \\ &= \frac{\delta v}{\delta \phi} * [\partial_z(-\phi v)] \end{aligned} \tag{5.5}$$

ここで用いた特別な記号 $\frac{\delta v}{\delta \phi} * [\,]$（Frechet 微分）は次のように定義される。

$$v[\phi + \delta\phi] - v[\phi] = \frac{\delta v}{\delta \phi} * [\delta\phi] + O(\delta\phi^2) \tag{5.6}$$

Frechet 微分はこの定義から明らかなように次の性質を持つ。

$$\frac{\delta v}{\delta \phi} * [a + b] = \frac{\delta v}{\delta \phi} * [a] + \frac{\delta v}{\delta \phi} * [b] \tag{5.7}$$

[1]もちろん ノーマルモードが緩和して零になることで v と ϕ の間に関数関係が成り立つのである。この緩和する時間を無視すれば v と ϕ には関数関係が成り立っているのであるから同じ時間スケールで変化するように見えることには注意しておく。

通常、良く用いられる汎関数微分 $\frac{\delta A}{\delta \phi}$ の定義

$$A[\phi+\delta\phi]-A[\phi] \;=\; \int \mathrm{dr}\frac{\delta A}{\delta \phi}\,\delta\phi$$

及びその表記法と Frechet 微分の定義と表記法の違いに気を付けてもらいたい。Frechet 微分を実際に使用する計算はすぐ後に現れるので、そこで感覚を掴んでもらえると思う。また、$v\partial_z v$ を Frechet 微分を使って表すと

$$v\partial_z v = v\frac{\delta v}{\delta \phi} * [\partial_z \phi] \tag{5.8}$$

と書くことが出来る。これらを使って、v の運動方程式の左辺は次のように表すことができる。

$$\partial_t v + v\partial_z v = -\left\{\frac{\delta v}{\delta \phi} * [v\partial_z\phi] - v\frac{\delta v}{\delta \phi} * [\partial_z \phi]\right\} - \frac{\delta v}{\delta \phi} * \left[\phi\,\frac{\delta v}{\delta \phi} * [\partial_z \phi]\right] \tag{5.9}$$

となる。さて、このように v の微分が ϕ を通しての変化に書き直されただけでは $v[\phi]$ の形を依然として決定することは出来ない。v を微分展開（長波長展開）することによってはじめて逐次的に決定していくことが出来るようになる。このことは、われわれが粉体粒子のサイズに比べて十分大きなスケールでの変化のみに着目する場合には許されるだろう。また、空間変化のスケールでパラメターを規格化した時に、$\tilde{\zeta}$ が他の項に比べ充分大きいようなパラメター領域に対しては充分に妥当的な近似となり得るであろう。展開が見やすいようにしばらくの間、$\partial_z \to \epsilon\partial_z$ と書くことにして v の展開を

$$v\,[\,\phi\,] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n\, v^{(n)}\,[\,\phi\,] \tag{5.10}$$

と書こう。このとき、次の関係が成り立つ。

$$\frac{\delta v}{\delta \phi} * [\,] \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n\, \frac{\delta v^{(n)}}{\delta \phi} * [\,] \tag{5.11}$$

また、参考のために、低次の $v^{(n)}[\phi]$ についてその具体的な形を書いておく。

$$\left\{\begin{array}{lcl} v^{(0)}[\phi] &=& v_0(\phi) \\ v^{(1)}[\phi] &=& v_1(\phi)\,\partial_z\phi \\ v^{(2)}[\phi] &=& v_{21}(\phi)\partial_z^2\phi + v_{22}(\phi)(\partial_z\phi)^2 \\ v^{(3)}[\phi] &=& v_{31}(\phi)\partial_z^3\phi + v_{32}(\phi)(\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) + v_{33}(\phi)(\partial_z\phi)^3 \end{array}\right. \tag{5.12}$$

これから逐次的に決定していくのは、具体的には上の式の v_0、v_1、v_{21}、$\cdots$ である。
以下、表式を見やすくするため単に $v^{(n)}$ と書いて $v^{(n)}[\phi]$ を v_n と書いて $v_n(\phi)$ を表したり、f'' と書いて $f''(\phi)$ を表すこと等が多い。

ここで後の計算のため、低次の場合に $\dfrac{\delta v^{(n)}}{\delta\phi}*[\,]$ がどうなるか見ておこう。

$$\left\{\begin{aligned}
&v^{(0)}[\phi+\delta\phi]-v^{(0)}[\phi] &&= v_0'\,\delta\phi+O(\delta\phi^2)\\
&v^{(1)}[\phi+\delta\phi]-v^{(1)}[\phi] &&= [v_1'\,\partial_z\phi+v_1\,\partial_z]\,\delta\phi+O(\delta\phi^2)\\
&v^{(2)}[\phi+\delta\phi]-v^{(2)}[\phi] &&= [v_{21}'(\partial_z^2\phi)+v_{22}'(\partial_z\phi)^2\\
&&&\qquad +v_{21}\partial_z^2+2\,v_{22}\,(\partial_z\phi)\,\partial_z]\,\delta\phi+O(\delta\phi^2)\\
&v^{(3)}[\phi+\delta\phi]-v^{(3)}[\phi] &&= [v_{31}'(\partial_z^3\phi)+v_{32}'(\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi)+v_{33}'(\partial_z^\phi)^3\\
&\quad +v_{31}\partial_z^3+v_{32}\,((\partial_z\phi)\,\partial_z^2+(\partial_z^2\phi)\,\partial_z)+3\,v_{33}(\partial_z\phi)^2\,\partial_z]\,\delta\phi+O(\delta\phi^2)
\end{aligned}\right. \tag{5.13}$$

これらの式を Frechet 微分の定義式と照らし合わせると各次数で $\delta\phi$ に作用している線形微分演算子が $\dfrac{\delta v^{(n)}}{\delta\phi}*[\,]$ に対応することがわかる。すなわち、$\dfrac{\delta v^{(n)}}{\delta\phi}*[\,]$ は線形微分演算子に対応することがわかる。

それでは、計算を先に進めよう。まず、この v の長波長展開によって v の運動方程式の左辺は次のように書き表せる。

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{n-1}\epsilon^n\Bigg\{&-\left[\frac{\delta v^{(n-m-1)}}{\delta\phi}*\left[v^{(m)}\partial_z\phi\right]-v^{(m)}\frac{\delta v^{(n-m-1)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi]\right]\\
&-\frac{\delta v^{(n-m-1)}}{\delta\phi}*\left[\phi\frac{\delta v^{(m)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi]\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{5.14}$$

また、v の運動方程式の右辺はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
&\epsilon^0\left\{\tilde\zeta(V-v^{(0)})-\frac{1}{Fr}\right\}\\
&+\epsilon^1\left\{-\tilde\zeta\,v^{(1)}-f''\,\partial_z\phi\right\}\\
&+\epsilon^2\left\{-\tilde\zeta\,v^{(2)}+\mu*\left[\frac{\delta v^{(0)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi]\right]\right\}\\
&+\epsilon^3\left\{-\tilde\zeta\,v^{(3)}+\kappa\,\partial_z^3\phi+\mu*\left[\frac{\delta v^{(1)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi]\right]\right\}\\
&+\sum_{n=4}^{\infty}\epsilon^n\left\{-\tilde\zeta\,v^{(n)}+\mu*\left[\frac{\delta v^{(n-2)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi]\right]\right\}
\end{aligned} \tag{5.15}$$

但し、ここで微分演算子 $\mu*[\,]$ を次のように定義してある。

$$\mu*[a]\equiv(\mu/\phi+\mu')\,(\partial_z\phi)\,a+\mu\,\partial_z a \tag{5.16}$$

あとは、これらを運動方程式に代入して同じ次数を拾って来れば $v^{(n)}$ について $n=0$ から逐次的に決定することが出来る。

♠ $O(\epsilon^0)$:

式 (5.14) には次数 0 の項は存在しないので

$$0 = \tilde{\zeta}\,(V - v^{(0)}) - \frac{1}{Fr}$$

$v^{(0)}$ について解けば、

$$\boxed{v^{(0)} = V - \frac{1}{Fr\tilde{\zeta}} \equiv v_0} \tag{5.17}$$

を得る。

♠ $O(\epsilon^1)$:

今、式 (5.14) において $\dfrac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * [\,]$ の交換関係

$$\frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * [ab] - a \frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * [b] = 0$$

に注意すれば、

$$-\frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * \left[\phi \frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * [\partial_z \phi] \right] = -\tilde{\zeta} v^{(1)} - f''\,\partial_z \phi$$

$v^{(1)}$ について解けば、

$$\boxed{v^{(1)} = \frac{1}{\tilde{\zeta}} \left(v_0'^2\,\phi - f'' \right) \partial_z \phi \equiv v_1 \partial_z \phi} \tag{5.18}$$

$$\text{尚、} \qquad v_0' = \bar{\phi}_0 \left(\frac{\tilde{\zeta}'}{\tilde{\zeta}} \right)$$

を得る。

♠ $O(\epsilon^2)$:

式 (5.14) において $\dfrac{\delta v^{(1)}}{\delta \phi} * [\,]$ の交換関係

$$\frac{\delta v^{(1)}}{\delta \phi} * [ab] - a \frac{\delta v^{(1)}}{\delta \phi} * [b] = b v_1 \partial_z a$$

に注意すれば、

$$-(\partial_z \phi)\, v_1\, \partial_z v^{(0)} - \frac{\delta v^{(1)}}{\delta \phi} * \left[\phi \frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * [\partial_z \phi] \right] - \frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * \left[\phi \frac{\delta v^{(1)}}{\delta \phi} * [\partial_z \phi] \right]$$
$$= -\tilde{\zeta}\, v^{(2)} + \mu * \left[\frac{\delta v^{(0)}}{\delta \phi} * [\partial_z \phi] \right]$$

$\dfrac{\delta v^{(n)}}{\delta\phi}*[\,]$ と $\mu*[\,]$ の具体的な表式を代入すると、

$$
\begin{aligned}
&-(\partial_z\phi)\,v_1\,\partial_z v^{(0)} - [v_1'\partial_z\phi + v_1\partial_z][\phi v_0'\partial_z\phi] - v_0'\phi[v_1'\partial_z\phi + v_1\partial_z]\partial_z\phi \\
&= -2\,\phi v_1 v_0'\partial_z^2\phi - (2v_1v_0' + 2\phi v_1'v_0' + \phi v_1 v_0'')(\partial_z\phi)^2 \\
&= -\tilde{\zeta}\,v^{(2)} + [(\mu/\phi + \mu')(\partial_z\phi) + \mu\,\partial_z](v_0'\,\partial_z\phi) \\
&= -\tilde{\zeta}\,v^{(2)} + (\mu/\phi + \mu')\,v_0'(\partial_z\phi)^2 + \mu\,v_0''(\partial_z\phi)^2 + \mu\,v_0'\,\partial_z^2\phi
\end{aligned}
$$

$\dfrac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*[\,]$ について解くと、

$$
v^{(2)} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}\left\{(\mu + 2\phi v_1)\,v_0'\partial_z^2\phi + [(\mu/\phi + \mu' + 2v_1 + 2\phi v_1')\,v_0' + (\mu + \phi v_1)](\partial_z\phi)^2\right\}
$$

であるから

$$
\boxed{v_{21} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}(\mu + 2\phi v_1)\,v_0'} \tag{5.19}
$$

$$
\boxed{v_{22} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}[(\mu/\phi + \mu' + 2v_1 + 2\phi v_1')\,v_0' + (\mu + \phi v_1)]} \tag{5.20}
$$

となる。

♠ $\underline{O(\epsilon^3)}$:

式 (5.14) において $\dfrac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*[\,]$ の交換関係

$$
\frac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*[ab] - a\frac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*[b] = v_{21}[2\,(\partial_z a)(\partial_z b) + (\partial_z^2 a)\,b] + 2\,v_{22}\,(\partial_z\phi)\,(\partial_z a)\,b]
$$

に注意して各項を書き下すと、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*\left[v^{(0)}\partial_z\phi\right] - v^{(0)}\frac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi] \\
&\quad= v_{21}[2(\partial_z v^{(0)})(\partial_z^2\phi) + (\partial_z^2 v^{(0)})(\partial_z\phi)] + 2v_{22}(\partial_z\phi)\partial_z v^{(0)}(\partial_z\phi) \\
&\quad= 3v_{21}v_0'(\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) + (v_{21}v_0'' + 2v_{22}v_0')(\partial_z\phi)^3
\end{aligned}
$$

$$
\frac{\delta v^{(1)}}{\delta\phi}*\left[v^{(1)}\partial_z\phi\right] - v^{(1)}\frac{\delta v^{(1)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi] = v_1^2(\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) + v_1v_1'(\partial_z\phi)^3
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi}*\left[\phi\frac{\delta v^{(0)}}{\delta\phi}*[\partial_z\phi]\right] \\
&\quad= [v_{21}'(\partial_z^2\phi) + v_{22}'(\partial_z\phi)^2 + v_{21}\partial_z^2 + 2v_{22}(\partial_z\phi)\partial_z](\phi v_0'\partial_z\phi) \\
&\quad= \phi v_{21}v_0'\partial_z^3\phi \\
&\quad+ [\phi v_{21}'v_0' + 3v_{21}(v_0' + \phi v_0'') + 2\phi v_{22}v_0'](\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) \\
&\quad+ [\phi v_{22}'v_0' + 2v_{21}v_0'' + \phi v_{21}v_0''' + 2v_{22}(v_0' + \phi v_0'')](\partial_z\phi)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta v^{(1)}}{\delta\phi} * \left[\phi \frac{\delta v^{(1)}}{\delta\phi} * [\partial_z \phi]\right] \\
&\quad = [v_1'(\partial_z\phi) + v_1\partial_z][\phi(v_1'(\partial_z\phi)^2 + v_1\partial_z^2\phi)] \\
&\quad = \phi v_1^2 \partial_z^3 \phi \\
&\quad + [v_1^2 + 4\phi v_1 v_1'](\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) \\
&\quad + [\phi v_1'^2 + v_1 v_1' + \phi v_1 v_1''](\partial_z\phi)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\delta v^{(0)}}{\delta\phi} * \left[\phi \frac{\delta v^{(2)}}{\delta\phi} * [\partial_z \phi]\right] \\
&\quad = v_0'\phi[\, v_{21}'(\partial_z^2\phi) + v_{22}'(\partial_z\phi)^2 + v_{21}\partial_z^2 + 2v_{22}(\partial_z\phi)\partial_z](\partial_z\phi) \\
&\quad = \phi v_{21} v_0' \partial_z^3 \phi \\
&\quad + \phi v_0'(v_{21}' + 2v_{22})(\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) \\
&\quad + \phi v_{22}' v_0'(\partial_z\phi)^3
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mu * \left[\frac{\delta v^{(1)}}{\delta\phi} * [\partial_z \phi]\right] \\
&\quad = [(\mu/\phi + \mu')(\partial_z\phi) + \mu\partial_z][v_1'(\partial_z\phi)^2 + v_1\partial_z^2\phi] \\
&\quad = \mu v_1 \partial_z^3 \phi \\
&\quad + [\,(\mu/\phi + \mu')\, v_1 + 3\mu v_1'\,](\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi) \\
&\quad + [\,(\mu/\phi + \mu')\, v_1' + \mu v_1''\,](\partial_z\phi)^3
\end{aligned}
$$

であるので、$(\partial_z^3\phi)$ の項から

$$
\boxed{v_{31} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}(\kappa + \mu v_1 + 2\phi v_{21} v_0' + \phi v_1^2)} \tag{5.21}
$$

$(\partial_z^2\phi)(\partial_z\phi)$ の項から

$$
\boxed{\begin{aligned} v_{32} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}[&(\mu/\phi + \mu')v_1 + 3\mu v_1' + 4\phi v_{22} v_0' + 6 v_{21} v_0' \\ &+ 2\phi v_{21}' v_0' + 3\phi v_{21} v_0'' + 2v_1^2 + 4\phi v_1 v_1'\,] \end{aligned}} \tag{5.22}
$$

$(\partial_z\phi)^3$ の項から

$$
\boxed{\begin{aligned} v_{33} = \frac{1}{\tilde{\zeta}}[&(\mu/\phi + \mu')v_1' + \mu v_1'' + 4v_{22} v_0' + 2\phi v_{22}' v_0' + 2\phi v_{22} v_0'' + 3 v_{21} v_0'' \\ &+ \phi v_{21} v_0''' + 2 v_1 v_1' + \phi v_1'^2 + \phi v_1 v_1''] \end{aligned}} \tag{5.23}
$$

が求まる。

これらの結果より、Center Manifold が決定できた。佐々、早川の論文 [12] の中で v_{31} に対応する項（$C_4(\phi)$ と記載されている）には式 (5.21) の第三項の数係数 2 が落ちている。

有効微分方程式は質量保存則

$$\partial_t \phi \;=\; -\partial_z(\phi v) \tag{5.24}$$

に Center Manifold $v[\phi]$ を代入して求まる。

5.4　逓減摂動法による弱非線形解析

前節で導かれた方程式（式 (5.24) に $v[\phi]$ を代入したもの）はϕのみの偏微分方程式とはいえ、とても複雑極な ϕ の非線形方程式であり実際に解の挙動を見るにはさらなる情報の縮約を必要とする。実際、佐々、早川の論文 [12] では $v[\phi]$ を使って導いた式から弱非線形解析を行なって ϕ が KdV 方程式に従うことを導いているがその情報を抽出することはより簡便な方法によって行なえる。そこで本節では逓減摂動法 (Reductive Perturbation Method) を用いて、モデル方程式から本質的な運動方程式を取り出すことを考える。逓減摂動法とは、座標と時間及び場の量を同時に同一のパラメタで展開してスケール不変な場の方程式を導こうというものである。いま、系が臨界点近傍にあるような場合、臨界点からのズレが系を特徴づけるパラメタであると考えられるので、このズレをパラメタとした逓減摂動を考えるのが最も自然である。この際の時間と空間のパラメタ展開の仕方は以下のように線形分散関係式に基づいて決定することが出来る。

線形分散関係式は線形不安定になるモードに対して

$$\sigma_+ \;=\; \delta k_z^2 \;-\; \frac{\phi_0}{\zeta_0}\, k_\perp^2 \;-\; i c_0 k_z (1 \;-\; E\, k_z^2 \;-\; F\, k_\perp^2) \;-\; O(k^4) \tag{5.25}$$

であった。δ は臨界点からのズレを表し、正確な表式は以下の通りである。

$$\delta \;=\; \frac{1}{\zeta_0}[c_0^2 - \phi_0 f_0''] \tag{5.26}$$

また E, F は次の様に定義されている。

$$\begin{cases} E \;=\; \dfrac{1}{\zeta_0}[\mu_0 \;+\; 2\,\delta] \\ F \;=\; \dfrac{1}{\zeta_0}\left[\mu_0 \;-\; \dfrac{2\,\phi_0\, f_0''}{\zeta_0}\right] \end{cases} \tag{5.27}$$

まず、線形分散関係式からわかるのは最も重要な波数（すなわち、most unstable mode ）が $k_z \sim \epsilon, k_\perp \sim \epsilon^2$ で与えられることである。これは、σ_+ の実部が k_z^2 で立ち上がって $k_\perp^2, k_z^4$ で押えられることによる。また、この際の時間変化は σ_+ の実部から ϵ^4 の寄与があり、σ_+ の虚部から ϵ^1, ϵ^3 の寄与がある。ϵ^1 の寄与は速度 c_0 で動く座標系に移ることで取り込めるので時間変化は ϵ^3 のオーダーの寄与を見るような変換を考えることが自然で

あろう。以上より、次の Gardner-Morikawa 変換 [21] を行なう。

$$\begin{cases} \tau &\equiv \epsilon^3 t \\ \xi &\equiv \epsilon(z - c_0 t) \\ \eta &\equiv \epsilon^2 x \end{cases} \tag{5.28}$$

但し、$\epsilon^2 \equiv \delta$ と定義してある。

我々の簡略化したモデルは次のようなものであった。

$$\partial_t \phi = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\phi \boldsymbol{v}) \tag{5.29-a}$$

$$(\partial_t + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{v} = \tilde{\zeta}(\phi)(V\mathbf{e}_z - \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{\nabla}\frac{\delta A}{\delta \phi} - \frac{\mathbf{e}_z}{Fr} + \frac{1}{\phi}\,\mathrm{Div}\left[\phi\mu(\phi)\left(\frac{\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v} + \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{v}^{\mathrm{t}}}{2}\right)\right] \tag{5.29-b}$$

このモデルを Gardner-Morikawa 変換 (5.28) によって変換すると

$$\begin{cases} \partial_t &\rightarrow -\epsilon c_0 \partial_\xi + \epsilon^3 \partial_\tau \\ \partial_z &\rightarrow \epsilon^1 \partial_\xi \\ \partial_x &\rightarrow \epsilon^2 \partial_\eta \end{cases} \tag{5.30}$$

であるから、

$$\epsilon^3 \partial_\tau \phi = -\epsilon \partial_\xi [\phi(v - c_0)] - \epsilon^2 \partial_\eta (\phi u) \tag{5.31-a}$$

$$\begin{aligned} [\,\epsilon^3 \partial_\tau &+ \epsilon(v - c_0)\partial_\xi + \epsilon^2 u \partial_\eta]\, v \\ &= \tilde{\zeta}(\phi)\,(V - v) - \frac{1}{Fr} \\ &\quad + [-\epsilon f''(\phi)\partial_\xi + \epsilon^3 \kappa \partial_\xi^3 + \epsilon^5 \kappa \partial_\xi \partial_\eta^2]\phi \\ &\quad + \frac{\mu}{2}[2\epsilon^2 \partial_\xi^2 v + \epsilon^3 \partial_\xi \partial_\eta w + \epsilon^4 \partial_\eta^2 v] \\ &\quad + \frac{\mu/\phi + \mu'}{2}[2\epsilon^2(\partial_\xi \phi)(\partial_\xi v) + \epsilon^3(\partial_\eta \phi)(\partial_\xi u) + \epsilon^4(\partial_\eta \phi)(\partial_\eta v)] \end{aligned} \tag{5.31-b}$$

$$\begin{aligned} [\,\epsilon^3 \partial_\tau &+ \epsilon(v - c_0)\partial_\xi + \epsilon^2 u \partial_\eta]\, u \\ &= -\tilde{\zeta}(\phi)\, u \\ &\quad + [-\epsilon^2 f''(\phi)\partial_\eta + \epsilon^4 \kappa \partial_\xi^2 \partial_\eta + \epsilon^6 \kappa \partial_\eta^3]\phi \\ &\quad + \frac{\mu}{2}[\epsilon^2 \partial_\xi^2 u + \epsilon^3 \partial_\xi \partial_\eta v + 2\epsilon^4 \partial_\eta^2 u] \\ &\quad + \frac{\mu/\phi + \mu'}{2}[\epsilon^2(\partial_\xi \phi)(\partial_\xi u) + \epsilon^3(\partial_\xi \phi)(\partial_\eta v) + 2\epsilon^4(\partial_\eta \phi)(\partial_\eta u)] \end{aligned} \tag{5.31-c}$$

但し、$\boldsymbol{v} = (u, v)$ とした。ϕ, v, u の ϵ に関する展開は非線形効果が分散効果 ($O(\epsilon^3)$) と釣り合うような領域を考えることによって決定する。式 (5.31-b) の $O(\epsilon^0)$ の項を見ると

$$0 = \tilde{\zeta}(V - v) - \frac{1}{Fr} \tag{5.32}$$

であるから

$$v = V - \frac{1}{Fr\tilde{\zeta}} \sim \frac{\tilde{\zeta}_0'}{Fr\tilde{\zeta}_0^2}(\phi - \phi_0) \tag{5.33}$$

となってvと$\phi - \phi_0$は同じϵの巾で展開が始まると考えられる。このことを念頭において式 (5.31-b) を見ると右辺第一項より非線形項は

$$-\epsilon\partial_\xi(\phi - \phi_0)^2 \tag{5.34}$$

と書け、これが分散効果を反映した左辺$\epsilon^3\partial_\tau\phi$ と釣り合うためには$\phi - \phi_0$の展開はϵ^2で始まらなければならない。uの展開は式 (5.31-c) から決める。u の最小の巾は右辺第一項で決まりそれが右辺第二項から来る$\epsilon^2 f''\partial_\eta\phi$と釣り合うことから$u$の展開は$\phi - \phi_0$よりも$\epsilon^2$だけ高い次数すなわち$\epsilon^4$から始まると考えられる。$v$の展開は$\phi - \phi_0$と同じ次数で始まることはわかっていたので、結局、次の展開を仮定した。

$$\begin{cases} \phi - \phi_0 &= \epsilon^2\phi_2 + \epsilon^3\phi_3 + \epsilon^4\phi_4 + \epsilon^5\phi_5 + \cdots \\ v &= \epsilon^2 v_2 + \epsilon^3 v_3 + \epsilon^4 v_4 + \epsilon^5 v_5 + \cdots \\ u &= \epsilon^4 u_4 + \epsilon^5 u_5 + \cdots \end{cases} \tag{5.35}$$

なお、最低巾以降の展開をϵでおこなったのは微分展開の意味も込めてのことである。この他の展開が考えられないこともないが、例えばϵ^2での展開をすると矛盾した結果しか得られなかった。また、ϵの非整数巾での展開をすると各項をϵ の巾で整理することが意味不明と成りかねない。したがって、ϵでの展開が最も自然でかつ矛盾しない結果を与えてくれる展開であった。さて、式 (5.35) の第一式すなわち ϕ の展開を使って$\tilde{\zeta}(\phi), f''(\phi), \mu(\phi)$も展開しておこう。

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}(\phi) &= \tilde{\zeta}_0 + \tilde{\zeta}_0'(\phi - \phi_0) + \tfrac{1}{2}\tilde{\zeta}_0''(\phi - \phi_0)^2 + \cdots \\ f''(\phi) &= f_0'' + f_0'''(\phi - \phi_0) + \tfrac{1}{2}f^{(4)}(\phi - \phi_0)^2 + \cdots \\ \mu(\phi) &= \mu_0 + \mu_0'(\phi - \phi_0) + \cdots \end{aligned} \tag{5.36}$$

また、f_0''は臨界条件に関わっていたので

$$f_0'' = \frac{c_0^2}{\phi_0} - \frac{\tilde{\zeta}_0}{\phi_0}\epsilon^2 \tag{5.37}$$

とさらに展開しておくことができる。

これらの展開を式 (5.31) に代入してϵの同じ巾で拾い出すことにより次の結果を得た。以後すべて式 (5.31) の三つの式から得られる関係をそれぞれ順番に列挙してある。

♠ $O(\epsilon^0)$

$$\begin{cases} \text{対応する項なし。} \\ \tilde{\zeta}_0 V - \dfrac{1}{Fr} = 0 \\ \text{対応する項なし。} \end{cases}$$

この式は、ϕ_0が一様流動層 (Uniformly Fluidized Bed) の解であることを表す。

♠ $O(\epsilon^1)$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{対応する項なし。} \\ \text{対応する項なし。} \\ \text{対応する項なし。} \end{array}\right.$$

♠ $O(\epsilon^2)$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{対応する項なし。} \\ 0 = \tilde{\zeta}_0'\phi_2\bar{\phi}_0 - \tilde{\zeta}_0 v_2 \\ \text{対応する項なし。} \end{array}\right.$$

この式は、線形解析に於いて安定なモードσ_-が固定点 (Fixed Point , Center Manifold) に落ち込むことを反映している。この関係により v_2 は ϕ_2 を用いて書くことが出来る。

$$\boxed{v_2 = \frac{c_0}{\phi_0}\phi_2} \tag{5.38}$$

♠ $O(\epsilon^3)$

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 &= -\phi_0\partial_\xi v_2 + c_0\partial_\xi\phi_2 \\ -c_0\partial_\xi v_2 &= \tilde{\zeta}_0'\phi_3\bar{\phi}_0 - \tilde{\zeta}_0 v_3 - \dfrac{c_0}{\phi_0}\phi_3 \\ & \text{対応する項なし。} \end{array}\right.$$

$O(\epsilon^2)$ で出てきた関係を使えば第一式は恒等式となり、第二式は $O(\epsilon^2)$ の場合と同様に安定モードの固定点への落ち込みを反映して、v_3 と ϕ_3 の関係式となる。

$$\boxed{v_3 = \frac{c_0}{\phi_0}\phi_3} \tag{5.39}$$

♠ $O(\epsilon^4)$

$$\left\{\begin{array}{rl} 0 &= -\phi_0\partial_\xi v_3 + c_0\partial_\xi\phi_3 \\ -c_0\partial_\xi v_3 &= \tilde{\zeta}_0'\phi_4\bar{\phi}_0 + \frac{1}{2}\tilde{\zeta}_0''\phi_2^2\bar{\phi}_0 - \tilde{\zeta}_0 v_4 - \tilde{\zeta}_0'\phi_2 v_2 - \dfrac{c_0^2}{\phi_0}\partial_\xi\phi_3 + \mu_0\partial_\xi^2 v_2 \\ 0 &= -\tilde{\zeta}_0 u_4 - \dfrac{c_0^2}{\phi_0}\partial_\eta\phi_2 \end{array}\right.$$

$O(\epsilon^3)$ で出てきた式を使えば第一式は恒等式となり、第二式は安定モードが固定点へ落ち込むのを反映した式となる。但し、今までと違って固定点には非線形効果と微分の効果を含む。

$$\boxed{v_4 - \frac{c_0}{\phi_0}\phi_4 = \bar{\phi}_0\left[\frac{\tilde{\zeta}_0''}{2\tilde{\zeta}_0} - \left(\frac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right)^2\right]\phi_2^2 + \frac{c_0\mu_0}{\phi_0\tilde{\zeta}_0}\partial_\xi^2\phi_2} \tag{5.40}$$

♠ $O(\epsilon^5)$

$$\partial_\tau \phi_2 = -\partial_\xi(\phi_0 v_4 + \phi_2 v_2 - c_0 \phi_4) \tag{5.41-a}$$

$$\partial_\tau v_2 + v_2 \partial_\xi v_2 - c_0 \partial_\xi v_4 = \tilde{\zeta}_0' \phi_5 \bar{\phi}_0 + \tilde{\zeta}_0'' \phi_2 \phi_3 \bar{\phi}_0 - \tilde{\zeta}_0 v_5 - \tilde{\zeta}_0' \phi_2 v_3 - \tilde{\zeta}_0' \phi_3 v_2 - \frac{c_0^2}{\phi_0} \partial_\xi \phi_4 + \frac{\tilde{\zeta}_0}{\phi_0} \partial_\xi \phi_2 - f_0''' \phi_2 \partial_\xi \phi_2 + \kappa \partial_\xi^3 \phi_2 + \frac{\eta_0}{\phi_0} \partial_\xi^2 v_3 \tag{5.41-b}$$

省略 (5.41-c)

第一式は ϕ_2 の運動方程式である。その右辺には ϕ_4 と v_4 を含むが、$O(\epsilon^4)$ で得られた関係式 (5.40) を用いて ϕ_2 で書けてしまうので ϕ_2 のみで閉じた運動方程式を得ることになる。

$$\boxed{\partial_\tau \phi_2 + \lambda \partial_\xi \phi_2^2 + \gamma \partial_\xi^3 \phi_2 = 0} \tag{5.42}$$

但し、

$$\begin{cases} \lambda \equiv \left(\dfrac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right) \bar{\phi}_0 \left[1 + \dfrac{\phi_0}{2}\left(\dfrac{\tilde{\zeta}_0''}{\tilde{\zeta}_0'}\right) - \phi_0 \left(\dfrac{\tilde{\zeta}_0'}{\tilde{\zeta}_0}\right)\right] \\ \gamma \equiv \dfrac{c_0 \mu_0}{\tilde{\zeta}_0} \end{cases} \tag{5.43}$$

こうして得られた ϕ_2 の運動方程式 (5.42) は良く知られた一次元 Korteweg-de Vries 方程式である。ここで、注意して欲しいのはこの運動方程式には横方向の効果と垂直方向の負の拡散係数による効果が全く含まれないことである。負の拡散係数はともかく一次元的になるというのはかなり特殊な状況と考えられるがもとの簡略モデルが一次元的であることを反映している。これを正当化するには簡略化する前のモデルを用いて簡略モデルが有効であることを示さなければならない。しかし、これは現段階では成功していない。また、簡略モデルが有効であると仮定すれば Gardner-Morikawa 変換 (5.28) を行なうと、この次数では負の拡散と横方向の拡散効果は出て来ることは出来ない。この変換は臨界点近傍では自然に出てきたものなので、臨界点近傍を考える限りにおいて横方向の効果は摂動として現れるという描像が成り立つ。また、式 (5.41-b) と式 (5.40) を使うと $v_5 - \frac{c_0}{\phi_0}\phi_5$ を ϕ_2, ϕ_3 だけで書くことが出来る。

$$\boxed{\begin{aligned} v_5 - \frac{c_0}{\phi_0}\phi_5 = \frac{1}{\tilde{\zeta}_0}\Bigg\{ & -\frac{c_0}{\phi_0}\partial_\tau \phi_2 - \partial_\xi \left[\frac{1}{2}\left(\frac{c_0}{\phi_0}\right)^2 \phi_2^2\right] \\ & + c_0 \partial_\xi \left(v_4 - \frac{c_0}{\phi_0}\phi_4\right) + \left(\tilde{\zeta}_0'' \bar{\phi}_0 - 2\tilde{\zeta}_0' \frac{c_0}{\phi_0}\right)\phi_2 \phi_3 \\ & + \frac{\tilde{\zeta}_0}{\phi_0}\partial_\xi \phi_2 - \partial_\xi \frac{f_0'''}{2}\phi_2^2 + \kappa \partial_\xi^3 \phi_2 + \frac{c_0 \mu_0}{\phi_0}\partial_\xi^2 \phi_3 \Bigg\} \end{aligned}} \tag{5.44}$$

♠ $O(\epsilon^6)$

$$\begin{cases} \partial_\tau \phi_3 = -\partial_\xi(\phi_0 v_5 + \phi_2 v_3 + \phi_3 v_2 - c_0 \phi_5) - \phi_0 \partial_\eta u_4 & \text{(5.45-a)} \\ \partial_\tau v_3 + v_2 \partial_\xi v_3 + v_3 \partial_\xi v_2 - c_0 \partial_\xi v_4 = \tilde{\zeta}_0' \phi_6 \bar{\phi}_0 - \tilde{\zeta}_0 v_6 + \cdots & \text{(5.45-b)} \\ \text{省略} & \text{(5.45-c)} \end{cases}$$

式 (5.45) は $v_6 - \frac{c_0}{\phi_0}\phi_6$ をより低い次数の式で表す式であるがこれ以上次数の計算を行なわないので略して書いた。第一式からは ϕ_2 を含む ϕ_3 の運動方程式を得る訳だが式 (5.42) と組み合わせることにより次式を得る。

$$\boxed{\partial_\tau \psi + \partial_\xi \lambda \psi^2 + \gamma \partial_\xi^3 \psi = -\epsilon [\partial_\xi \psi + \lambda' \partial_\xi^2 \psi^2 + \gamma' \partial_\xi^4 \psi - \frac{c_0^2}{\tilde{\zeta}_0} \partial_\eta^2 \psi] + O(\epsilon^2)} \quad (5.46)$$

但し、

$$\begin{cases} \psi \equiv \phi_2 + \epsilon \phi_3 \\ \lambda' \equiv \frac{2c_0}{\tilde{\zeta}_0}\lambda - \frac{3\phi_0}{2\tilde{\zeta}_0}\left(\frac{c_0}{\phi_0}\right)^2 - \frac{\phi_0 f_0'''}{2\tilde{\zeta}_0} \\ \gamma' \equiv \frac{2c_0}{\tilde{\zeta}_0}\gamma + \frac{\phi_0 \kappa}{\tilde{\zeta}_0} \end{cases} \quad (5.47)$$

となる。この有効微分方程式には負の拡散係数に対応する項と横方向の正の拡散が摂動として KdV 方程式に加わった形をしている。この有効微分方程式は形式的に導いたので、この適用には注意を要する。前節の VFD による方法で導いた Center Manifold $v[\phi]$ から作られる有効微分方程式に含まれる ϕ の関数等を $\phi - \phi_0$ の巾に展開し $\partial_z \sim \epsilon$, $\phi - \phi_0 \sim \epsilon^2$ として低次の項を拾ってくれば弱非線形解析を行なえるがその結果はここで得た有効微分方程式 (5.46) と一致する。

5.5 有効微分方程式の検証

前節で導いた有効微分方程式 (5.46) は形式的に導かれ、その中に展開パラメター ϵ を含むのでその妥当性については疑問が残る。そこで、特殊な初期条件のもとで計算機実験を行なって両者の一致を調べてみた。計算機実験に用いたパラメタは

$$\begin{cases} \alpha = 0.5025 \\ \beta = 10^{-2} \\ \kappa = 5 \times 10^{-3} \\ \phi_0 = 0.65 \\ L = 2 \end{cases} \quad (5.48)$$

である。これに対応して

$$\begin{cases} \delta &= 2.95 \times 10^{-4} \\ \lambda &= -13.6 \\ \gamma &= 4.76 \times 10^{-5} \\ \lambda' &= -2.26 \times 10^{-2} \\ \gamma' &= 2.61 \times 10^{-7} \end{cases} \tag{5.49}$$

となっている。特殊な初期条件としては KdV 方程式 (5.42) の 2 ソリトン解を使った。具体的には KdV 方程式の標準形

$$\partial_t u - 3\partial_x u^2 + \partial_x^3 u \;=\; 0 \tag{5.50}$$

の 2 ソリトン解 [22] の一つである

$$u \;=\; -12\frac{3 + \cosh(4x - 64t) + 4\cosh(2x - 8t)}{[\cosh(3x - 36t) + 3\cosh(x - 28t)]^2} \tag{5.51}$$

を変換

$$\phi = \gamma^{\frac{1}{3}} u\,, \;\; z = -\frac{3\gamma^{\frac{1}{3}}}{\lambda} x \tag{5.52}$$

によってスケールしたものを使った。

図 5.1は 2 ソリトン解 (5.51) をスケール (5.52) したものを初期値として KdV 方程式 (5.42) を解いた場合のスナップショットである。縦軸は ϕ_2、横軸は空間座標である。空間の上方向は図の右方向に対応している。また、KdV 方程式 (5.42) の導出過程から空間座標は実験室系に対しボイド波速度 c_0 で動いている座標に対応する事が分かる。尚、システムサイズは;$L = 2$ となる様に規格化した。KdV 方程式を解くわけであるから、当然 孤立波は衝突に際して完全にすり抜け、元の孤立波に回復する。実線、破線、点線はそれぞれ衝突の前、途中、後の孤立波の形状である。時間発展すると大きい方のソリトンが小さい方のソリトンを追い越して元の大きさに完全に回復する様子が見える。

図 5.2は図 5.1 と同じ解であり、時間 0.01 毎のスナップショットを上から下の順にずらしながら重ね合わせたものである。横軸は実験室系に対してボイド波速度 + 0.25 の速度で動く座標系である。

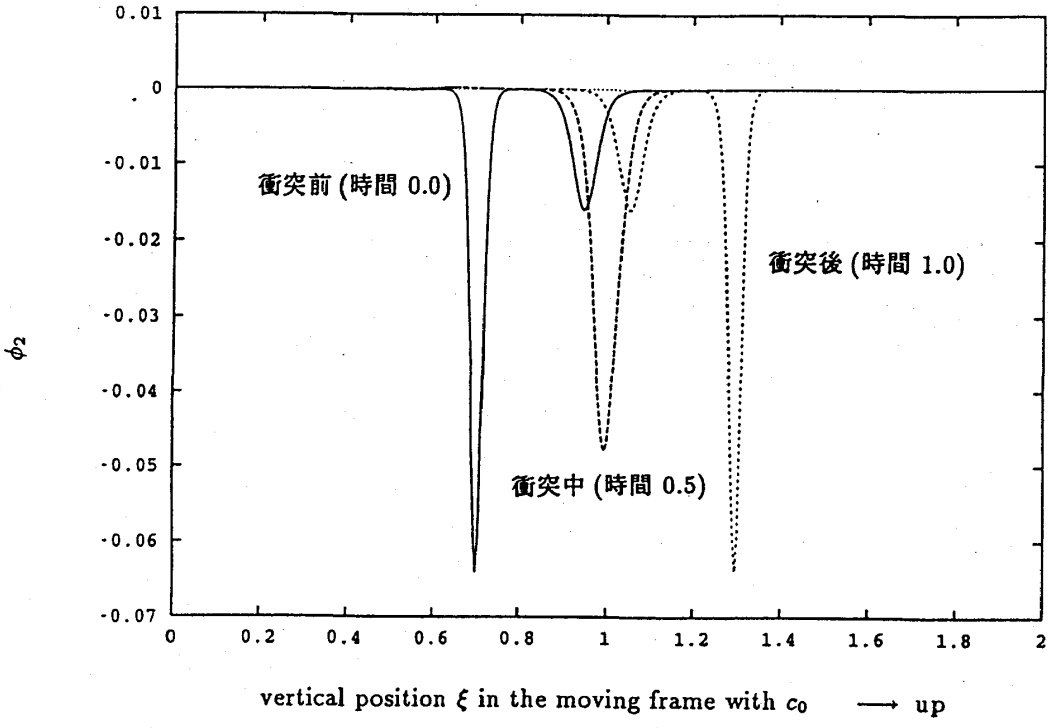

図 5.1: KdV 方程式の場合

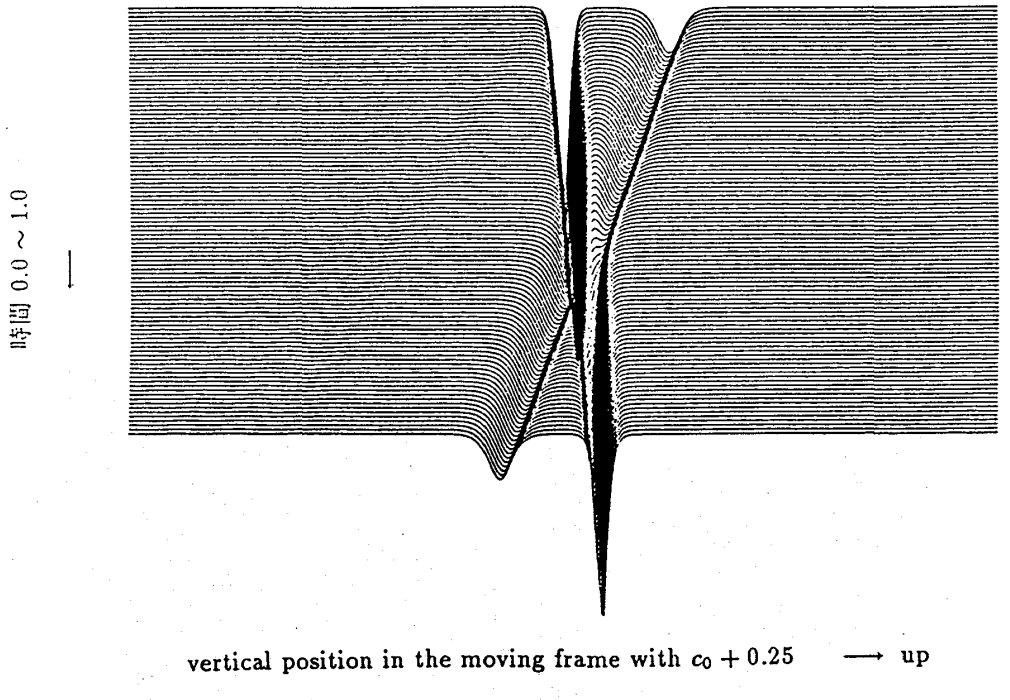

図 5.2: KdV 方程式の場合

図 5.3は図 5.1 と同じ初期値（実線）で二流体モデル (2.37) を解いた場合のスナップショットである。縦軸は粉体の体積占有率、横軸は実験室系の座標である。KdV の場合と同様に大きい孤立波が小さい孤立波を追い越すのだが、KdV の場合と異なるのは衝突後に孤立波が元の大きさに復元しないことである。また、振幅が小さくなってしまうの

で速度が遅く、KdV の場合と比べて衝突時間が遅くなっている様子も見える。

図 5.4は図 5.3 と同じ解であり、時間0.02毎のスナップショットを上から下の順にずらしながら重ね合わせたものである。横軸は実験室系に対してボイド波速度＋0.25の速度で動く座標系である。左の方に逃げていく さざ波が見られる。

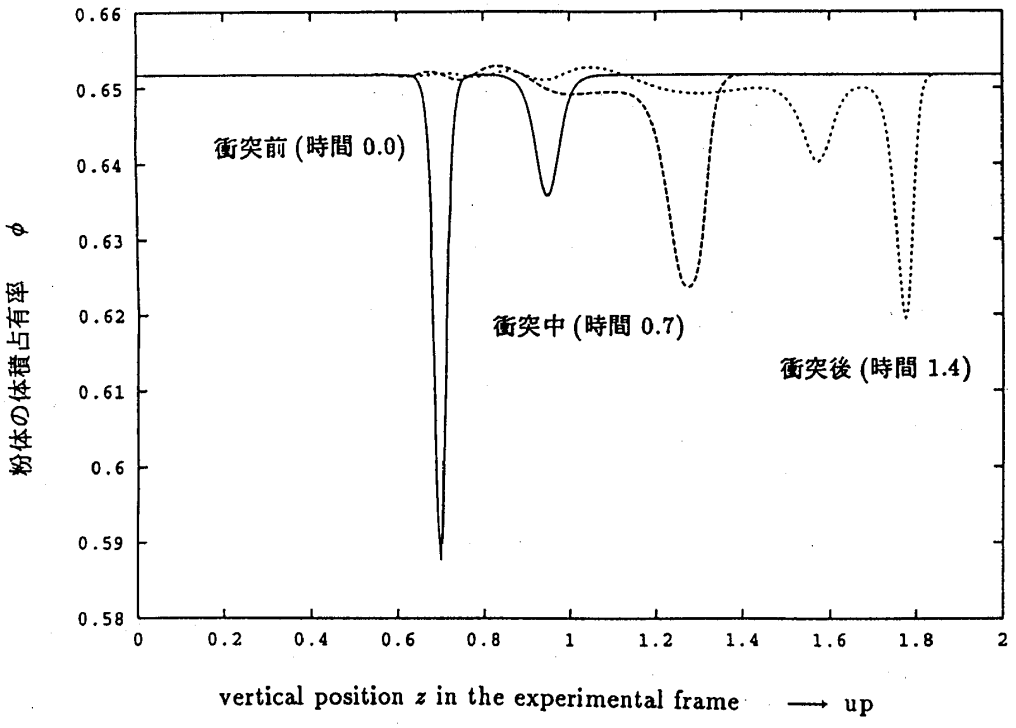

図 5.3: 二流体モデルの場合

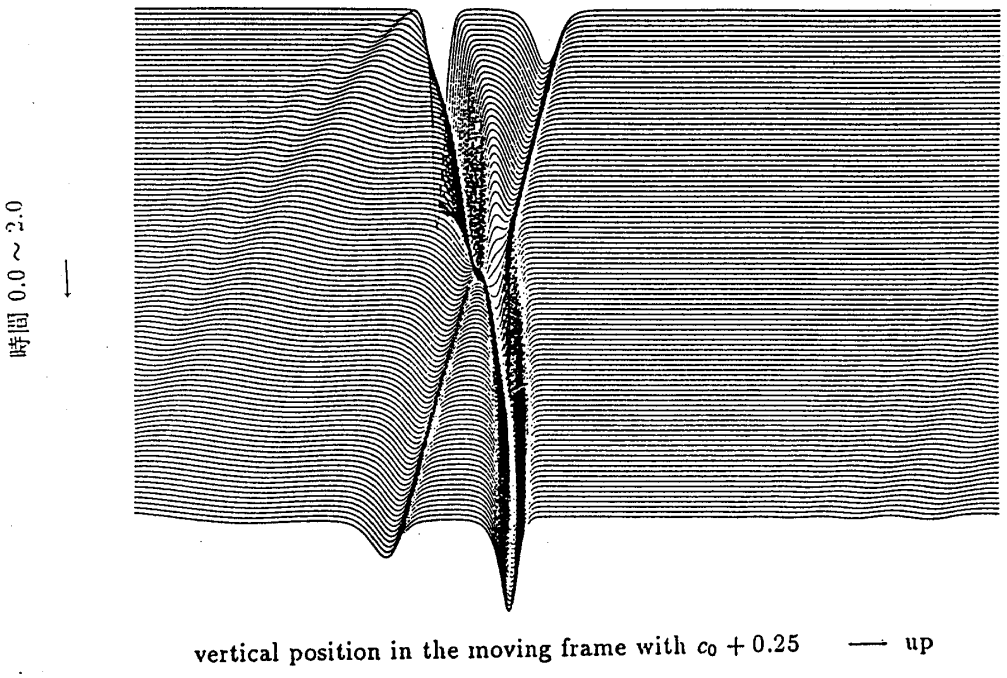

図 5.4: 二流体モデルの場合

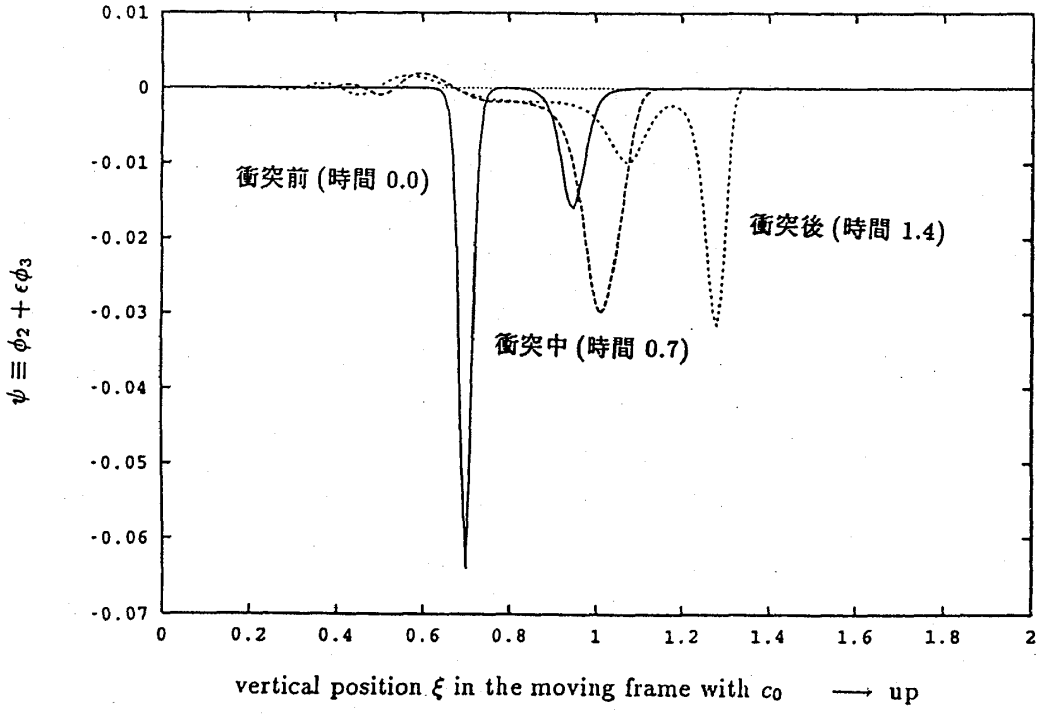

図 5.5: 有効微分方程式の場合

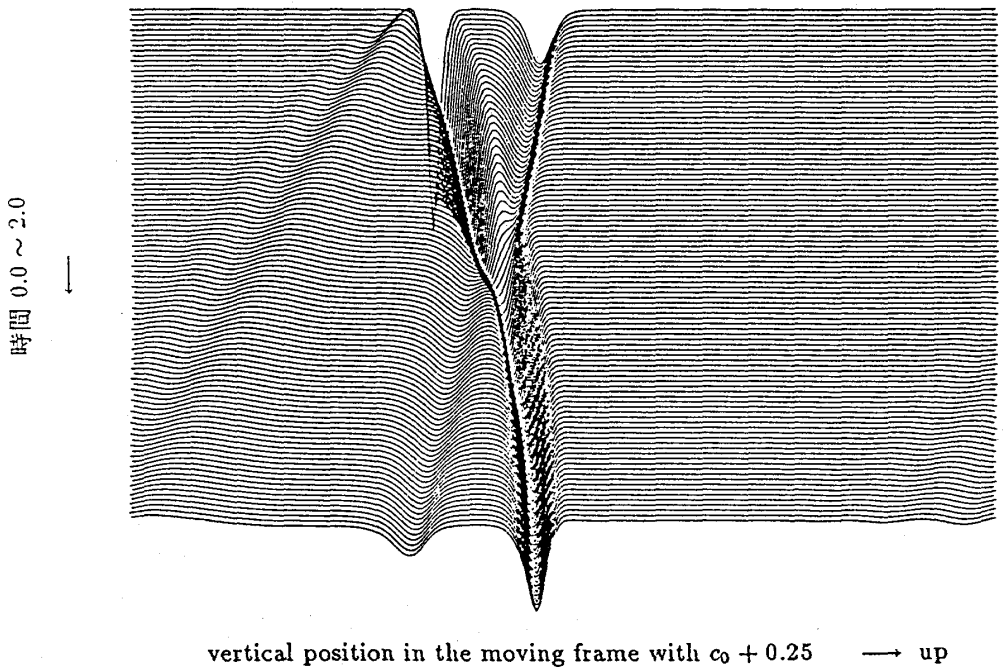

図 5.6: 有効微分方程式の場合

図 5.5は図 5.1 と同じ初期値（実線）で逓減摂動で導かれた有効微分方程式 (5.46) を解いた場合のスナップショットである。縦軸は ψ、横軸は実験室系に対しボイド波速度で動く座標である。二流体モデルの場合と同じ振舞いをする解は そのままパラメタ (5.49) を用いた場合には再現できなかった。しかしながら、λ' の値をパラメタ (5.49) の値の 1.7

倍にして計算したのが上の図である。図5.3と比較して衝突する位置が違うように見えるかも知れないがそれは二流体モデルの解は実験室座標系で見ているのに対し今の場合にはボイド波速度で動く座標系で見ているためである。衝突の時間や衝突後の振幅等はほぼ等しいことが分かる。このことは形式的に導かれた有効方程式 (5.46) が妥当であることの傍証となる。

図5.6は図5.5と同じ解であり、時間0.02毎のスナップショットを上から下の順にずらしながら重ね合わせたものである。横軸は実験室系に対してボイド波速度＋0.25の速度で動く座標系である。図5.4と比較すると非常に一致が良いことが分かる。この時にも左の方に逃げていく さざ波が見られる。

以上、特殊な初期条件（２ソリトン解）のもとでの振舞いが有効微分方程式の係数に$O(1)$の変更（1.7倍）を許す場合にはかなり一致した結果を与えることが分かった。本来、有効微分方程式 (5.46) は形式的に導かれたに過ぎないのでその妥当性には疑問が残るところである。しかし、この計算機による結果を見ると少なくとも$O(1)$の係数の精度で解を再現することがあることが分かった。これは有効微分方程式の妥当性の傍証となる。しかし、はっきりしたことは じっくりと様子を見た上でないと言えないであろう。これは、今後の課題に残される。

第 6 章

まとめ

6.1　結果のまとめ

まず、第一に粉体流動場の二流体モデルの構成については、佐々、早川の論文 [12] で不備のあった変分法による定式化を正確に再定式化し直したことと、内部エネルギーに含まれる$f(\phi)$が最密充填状態の存在を反映してϕが最密充填値をとるところで発散するであろうことを指摘したということが新しい結果として挙げられる。

次に線形解析に於いては 多くの他の論文と同じように垂直方向に負の拡散係数が出現によって一様膨潤状態が線形安定性を失うことを示し、さらに負の拡散係数が出現するようなパラメタ領域では線形不安定になるモードは上昇し、線形安定なモードは下降すること、また、現実には不安定モードのみが観測されるであろうことも示した。

さらに、筆者によって提示された二流体モデルの計算機実験を行なった結果、小さい負の拡散係数を持つ領域では ソリトン的な振舞いをする解があることがわかった。計算

機実験によってみられるソリトンは保存系のソリトンと異なり衝突に際しその振幅等を保存せず、長時間経過した後には振幅の揃った数個のソリトンが生き残ることが観察された。

最後に、計算機実験の結果を解釈するために理論的考察を行なったところ、Gardner-Morikawa 変換 [21] を用いた逓減摂動法を使ってモデル方程式から KdV 方程式を導くことに成功した。さらに高次の近似をして負の拡散係数に対応する項を含む新しい方程式を導き、その方程式と元のモデル方程式との比較を計算機を使って特殊な初期条件の元で行ないある程度の一致を見た。

6.2 今後の課題

最後に、本分野の今後の発展のために本研究の問題点 及び今後の課題をまとめ本論文の結びとしたい。

まず、本研究における定式化は現象論的なものであり、微視的な過程との関係を明らかではないことは問題である。特に、ドラッグ係数と内部エネルギーに関しては その関数形が不安定化の鍵を握っていたので微視的な過程との関係を明らかにすることは非常に重要である。

計算機実験は一次元系についてしか行なっていないので、さらに高次元の場合についても計算機実験を行なって実際に泡状の不安定化が起こるのか、泡が形成されるメカニズム、泡のダイナミクス等について調べることは必要である。またその際、圧力を消去して簡単化したモデルと圧力まで完全に解いたものとの比較も行なう必要がある。また、計算機実験において垂直方向に周期境界条件を課したことにより実際の系の振舞いと比較して定性的違いが生じる可能性を吟味しておくことも必要である。しかし、非線形波動はボイド波の速度で動くためにシステムサイズを大きくする工夫をしなければならない。

理論的考察において 逓減摂動法から導かれた新しいタイプの方程式（ KdV 方程式に摂動が加わった型の方程式）について 微分方程式としての特性を調べて その解の多様性を調べることと、この逓減摂動によって形式的に展開パラメターを含んだ方程式を導くことの正当性を吟味することも必要である。

以上、定式化、計算機実験、理論的解析の全てに渡って、はっきりとさせなければならないことがまだ数多く残っている。さらに、本研究の本来の出発点で述べた粉体流動場で起きている現象を非平衡相転移現象として捉えるといった観点から本研究を振り返る時、とても 満足出来る結果が出たとは言い難いのが本当のところである。しかし、この粉体流動場に関連した現象は非常に興味深く、上で述べた観点から この研究分野を捉えていこうとする時今後の発展次第では 粉体という物を越えたところにある本質的な物理的概念に辿り着ける可能性は充分にあるといえるだろう。

謝辞

本研究をはじめるに当たって早川先生（東北大理）には本問題の特質や研究方針等について詳しく御教授を頂きました。また、研究を進める上で連日 議論を行なって頂き、研究の方針やアイデアの提案を頂きました。都築先生（東北大理）にはとてもお忙しいにもかかわらず、議論に時間を惜しみなく割いて頂きました。佐々先生（京大理）には研究会及び E-mail を通してとても貴重な御意見を頂きました。森岡先生（京大工）には研究会で貴重な御意見を頂き さらに論文も送って頂きました。高木先生（東北大理）及び岩井さん（東北大理)、市来君（東北大理）をはじめ物性理論研究室の皆様にはセミナー等で貴重な御意見を頂きました。また、本研究は伊藤科学財団及びホソカワ粉体工学振興財団の援助を受けて行なわれました。

上記の皆様に貴重な御意見、援助等を頂くことによって本研究を行なうことが出来ました。ここに、お世話になった皆様に感謝致します。

参考文献

[1] 寺田 寅彦 科学, 3 (1933) 77-81.

[2] *Fluidization*, edited by Davidson, J.F., Clift, R. & Harrison, D., (Academic Press, London, 1985).

[3] Fanucci, J.B., Ness, N. & Yen, R. *J. Fluid Mech.* 94 (1979) 353.

[4] Drew, D.A. *Ann. Rev. Fluid Mech.* 15 (1983) 261.

[5] Homsy, G.M. in *Theory of Dispersed Multiphase Flow* edited by R.E.Meyer (Academic Press, London, 1983).

[6] Jackson, R. in ref.[2].

[7] D.Gidaspow *Appl. Mech. Rev.* 39 (1986) 1.

[8] Green, D. & Homsy, G.M. *Int. J. Multiphase Flow* 13 (1987) 443,459.

[9] Batchelor, G.K. *J. Fluid Mech.* 193 (1988) 75.

[10] Singh, P. & Joseph, D.D. *IMA Volumes Math. Appl.* 26 *Two Phase Flows and Waves* (1990) 130.

[11] Göz, M.F. *J. Fluid Mech.* 240 (1992) 379.

[12] Sasa, S. & Hayakawa, H. *Europhys. Lett.* 17 (1992) 685.
Hayakawa, H. & Sasa, S. to be published in *the Proceedings of the XI Sitges Conference on Complex Fluids* ed. by L.Garrido (Springer, 1993).

[13] Komatsu, T.S. & Hayakawa, H. submitted to *Phys. Rev. Lett.*.

[14] Jenkins, J.T. & Savage, S.B. *J. Fluid Mech.* 130 (1983) 187.
Lun, C.K.K., Savage, S.B., Jeffery, D.J. & Chepurniy, N. *J. Fluid Mech.* 140 (1984) 223.
Lin, J.S., Chen, M.M. & Chao, B.T. *AIChE J.* 31(3) (1985) 465.
Ding, J. & Gidaspow, D. *AIChE J.* 36 (1990) 523.
Morioka, S. & Nakajima, T. *J. Méca. Théor. Appl.* 6 (1987) 77.

[15] Chapman, S. & Cowling, T.G. *The Mathematical Theory of Non-uniform Gases* , 3rd ed., Cambridge Univ. Press (1970).

[16] Cundall, P.A. & Strack, O.D.L. *Geotechnique* 29-1 (1979) 47.
Kawaguchi, T. , Tanaka, T. & Tsuji, Y. in *Proceedings of Int. Conf. on Multiphase Flows* (Tsukuba, 1991).

[17] Ichiki, K. & Hayakawa, H. to be published in *Int. J. Mod. Phys. B.*

[18] Batchelor, G.K. *J. Fluid Mech.* 52 (1972) 245.
Durlofsky, L.J. & Brady, J.F. *J. Fluid Mech.*200 (1989) 39.
Koch, D.L. & Shaqfeh, E.S.G. *J. Fluid Mech.* 224 (1991) 275.
Davis, R.H. & Hill, N.A. *J. Fluid Mech.* 236 (1992) 513.

[19] Bascall, R., Goodwin, J.W., Ottewill, R.H. & Tadros, T.F. *J. Colloid Interface Sci.* 85 (1982) 78.

[20] Zabusky, N.J. & Kruskal, M.D. *Phys. Rev. Lett.* 15(1965) 240.

[21] Gardner, C.S. & Morikawa, G.K. *Courant Inst. Math. Sci. Rept.* NYO-9082 (1960) 1.

[22] 渡辺 慎介 ソリトン物理入門 (培風館,1985).
Toda, M. & Wadati, M. *J. Phys. Soc. Jpn.* 34 (1973) 18.

[23] Herivel, J.W. *Proc. Camb. Phil. Soc.* 50 (1955) 344.
Yourgrau, W. & Mandelstam, S. *Variational Priciples in Dynamics and Quantum Theory*, Dover (1968).

[24] Landau, L.D. & Lifshits, E.M. *Statistical Physics*, Pergamon (1964) Chap.12.

[25] Doi, M. & Onuki, A. *J. Phys. II France* 2 (1992) 1631.

[26] Kaneko, K. *Phys. Rev. Lett.* 69 (1992) 905.