

飛砂による地形の動力学*)

— 風紋と砂丘 —

西森 拓 大内則幸

茨城大学 理学部 東京大学 教養学部

(1993年12月3日受理)

0. はじめに

我々は小学校で物質には、固体、液体、気体の3つの形態があると習った(と思う)。

大学の一般的な教科書では、固体に対しては弾性力学、液体、気体に対しては流体力学が系の動力学に対する処方箋として示されている(と思う)。またその中間の粘性体にはレオロジーがある。

粉体の取り扱いがやっかいなのは、田口善弘氏が指摘しているように系が固体的にも流体的にも化けるということである。さらに流動化がおこったのちでも密度の空間的非一様性が激しく、例えば東北大の小松輝久氏の修士論文(早川尚男氏との共同研究)にあるように二相流体として複雑な取扱いが必要となる。

そもそも 粉体の運動をモデル化するにあたって連続化という操作は どれほど一般性もち得るのか? 粉体を形成する粒子の系を小さくしていった極限はやはり粉体なのか? それとも流体なのか?

我々の研究では、系の空間的離散性が本質的に効いてくる(と筆者の一人 H.N が思いこんでいる) 砂の表面の動力学を取り扱う。手順として、一方では勝手な離散的モデルをでっちあげて計算機実験を行い、一方では、連続体として解析を行っている。竜頭蛇尾なやり方ではあるが、両者の結果は、今の段階では残念ながら(!)、互いにコンシステントである。(本当は、連続体としてはとてもおさまりきれない部分をこれみよがしに陳列したかったのであるが... このことについては 最後の部分で簡単に説明する) なお、この小文は、極めて非包括的であり、これがこの分野の見晴らし台になるとは到底思われない。また、この文は、所々散文的なっている。効率的に研究内容を伝えるという目的に対しては、すでに発表された論文[4]があるのでこれと同じ事をかいても意味がない。寧ろ、模型の至らぬ点をさらすことで、これならもっとましな案がいくらかでも浮かぶわい、とほくそえみその挙げ句、一緒に泥沼にはまってくれる、ありがたい被害者がでることを願う次第である。

1. 動機

「砂丘のひみつ」という本[1]の表紙の風紋の写真が目にとまったのは2年前の生協の書籍コーナーである。柳田達雄氏の沸騰の数値シミュレーション[5]を見て直接目に見えるスケールの生き生きとした複雑な自然を簡単なモデルで再現できないものかと思いを巡らせている時期であった。また、砂のDynamicsを何でもかんでもP.Bakの自己組織化臨界現象[12]に結び付けたのでは、砂がかわいそうではないか考えていた時期でもあった。本の文中には風に駆動された砂

*) 本稿は、編集部の方から特別にお願いして執筆していただいた記事である。

粒子の運動の素過程が簡単に解説されていた。この分類は、Bagnold[6]によるもので、次の3形態をとる

1. creep(表面這行)
2. saltation(飛行)
3. suspension(浮遊).

creepは砂粒子の砂床での連続的な移動であり、いかにも連続近似が効き、普通の連続方程式におとせる感じであったのに対して、2,3は(砂床のみを空間と考えた場合(注)粒子の遠隔地へのジャンプであり解析的には扱いづらそう)とにかく、模型をつかって目の前でダイナミクスを展開しないことにはとりあえず理解ができないように感じられた。これが我々に興味を引き起こさせた最大の理由である。

我々は、それ以降、主に上の2の運動形態を持ち動き続けるような砂粒からなる系すなわち、砂浜と砂丘のダイナミクスに関して、まずは、代表的な論文や教科書に接した。その中で最も詳細かつ包括的なのが有名なBagnoldの教科書(1941)[6]である。数年前には、「International Workshop on the Physics of Blown Sand」(1985)と名付けられた国際会議さえ開かれた活発な分野であるが、基礎をなす観測と理論の多くは50年も前にBagnoldの一連の論文によって発表され、その内容の多くはこの一冊の教科書に収められている。逆にいえば、Bagnoldの掌のなかから、半世紀も抜け出せないできた分野である。1990年発行のK.PyeとH.Tsoarの解説書[8]には今日に至るまでの研究の蓄積が、詳しく紹介されており、膨大な量の砂丘の写真や観測事実、参考文献の山からこの分野の研究がBagnold以降、いかに、脈々と力強く続いて来たか知ることができるが、そこで紹介されている目を見張るべき、複雑でダイナミックな砂地形のパターンの時間発展のからくりに関しては、いまだ、包括的な理論の提案の余地が残されているようである。

以下でのべるのは、単純さを最大の美德とした、砂地形のダイナミクスに対する模型である。単に一つの見地からの、片寄ったアプローチであるが、部分部分の詳細な観測の蓄積がいまだ、地形のパターンの変化に対して決定的な助けとなっていない以上このような模型の存在する意味がある。もし、しっかりした知識を得ることを望むなら、この小文ではなく、まずBagnoldやPyeの本を読むのがよいと思われる。

2. 飛砂のダイナミクス

上であげた風による砂での運動の3形態のなかで、砂の表面付近に拘束された運動は、creepとsaltationである。黄砂現象などで知られるsuspensionは、砂床からの高さ、飛距離ともスケールが大きすぎて、これからの興味の対象である砂浜や砂丘の動力学には直接効いてこない[6]。そこで、我々の提出する模型ではsuspensionを無視し、creepとsaltationのみを素過程として話を進める。

卓越風による砂の運動は次のようである。まず、卓越風による摩擦速度 v^* (=表面砂粒への剪断応力の指標)[3]がある一定値 v_{*c} を上回ると、それまで止まっていた表面を砂粒が一斉に動き出す。これがcreepである。砂粒はころがりながらスピードをまし、やがて、砂床上の何かの障害物にぶつくと空中へ飛び出す(saltation)。飛び出した砂粒は、卓越風によって加速され、やがて風下の砂床にぶつかる。このとき着陸点にあった砂粒のいくつかは、運動エネルギーを受取り、空中へ弾き出される。こうしてsaltationの連鎖ができる。一旦、saltationの連鎖の輪ができあがると摩擦速度が v_{*c} を下回ってもsaltationはつづく。ただし、あらたな数居値 $v_{*c}^{\prime} (< v_{*c}^*)$ を下回ると連鎖の輪は切れてしまう。それぞれの数居値を流体数居値、衝突数居値という。これが

らの議論は、摩擦速度がこの二つの数値を上回り、saltation が系内で持続的に起こっているという状況を考える。

次にこれらの過程で生成される地形であるが、砂浜の風紋と砂丘をとりあげる。両者の第一の相違点は、空間スケールである。砂丘のスケールは km であり風紋のスケールは cm のオーダーである。また両者の間にはスケール以外に、明かな構造の違いがあり、比較的単調な形状の風紋に比べて、砂丘にはより多くの形が存在する。また砂丘の中には、ネットワークを組みながら離合集散し進化していくという際だった特徴を持ったものがある。ただし、両者の構成要素はともに砂であり、ダイナミクスはおもに、creep と saltation である。両者を統一して論ずるのは一つの目標であるが、今のところ成功していない。そこで、まずは、小地形である風紋の生成を説明し、そのうち砂丘の形成について論じる。

3. 風紋形成のダイナミクス

3.1. Saltation

ここから具体的な数値的モデルの説明に入る。ただし、最初は砂丘ではなく、風紋の話である。2次元格子 $\{(i, j) | i, j \in \text{自然数}\}$ を考え、各 cell に変数として、その cell 内での砂床の平均高さ $h(i, j)$ を割り当てる。ここで各 cell の大きさは、一個一個の砂粒にくらべて十分大きいものとし $h(i, j)$ は連続量となる。

卓越風が x の正方向に向かって吹き、各 cell から saltation によって、砂粒子が距離 L だけ風下の cell へ飛ぶものとする。

ここで話を大幅に簡単化する。すなわち saltation の過程で砂は卓越風の影響を受けるが、卓越風は砂の影響を受けないというものである。また卓越風の風速は、(上での摩擦速度の考え方との一貫性に目をつぶって) 高さによらず一定とする。すると、上空に弾き出された砂粒の運動を大ざっぱに計算することができる。

一度飛び出した砂粒は、最高高度まで達したあと、必ず砂床の高さの空間平均 $\langle h(x, y) \rangle$ まで降下して、そこで地面におつかるという一種の平均場近似を使うと結果として、高いところから出発した粒子は、遠くまで飛ぶという直感的に当たり前の関係が導かれる。¹

$$L = L_0 + bh_n(x, y) \quad (1)$$

ここで L_0 、 b は、それぞれ、平均飛距離、卓越風の速度などに依存した定数、である。

平均飛距離が摩擦速度の単調増加関数であることは、Bagnold などによって説明されている。ここで、卓越風の速度の鉛直方向への profile は単純でないので卓越風の風力をあらかずコントロールパラメータとしては、より現実的な L_0 を使うことを注意して置く。

saltation による砂の移動によって、砂の離陸点、着地点、各 cell の高さは q だけ交換される。²

$$h_{n'}(x, y) = h_n(x, y) - q \quad (2)$$

$$h_{n'}(x + L(h_n(x, y)), y) = h_n(x + L(h_n(x, y)), y) + q$$

¹ saltation のスケールに比べて地形のスケールが小さい場合 (風紋) に有効ではあるが、後述するように大規模地形 (砂丘) にはあてはまらない

² 交換されるものは、実際は高さではなく、砂の量であるがここでは両者は同一ということにした。複雑なものを再現するためのモデルの簡単化これいかに ...

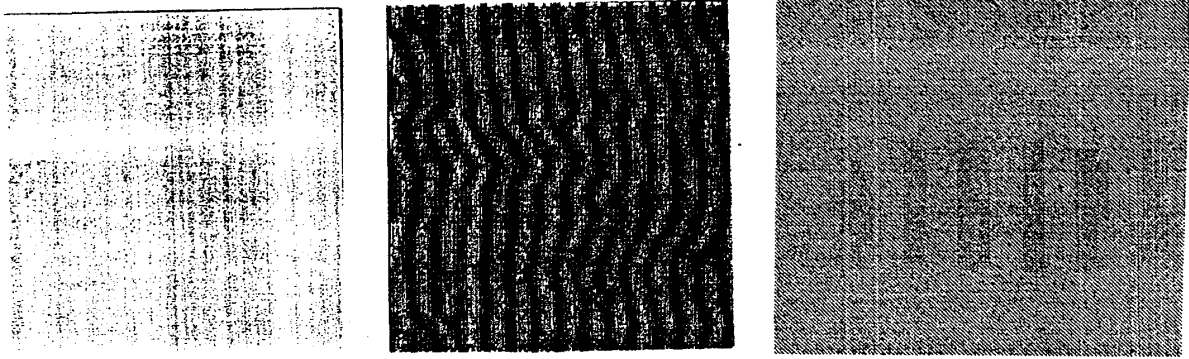


図1. Snap shots of steady spatial patterns in two limit models. In both systems, wind is set to blow from left to right. Fig.1(a)(b)ともに定常パターン。卓越風力が臨界値以下 (a) では風紋が現れない。卓越風がある程度つよくなると定常状態として風紋が現れる (b)。濃淡で砂表面の高度を表現。色の淡いところが山、濃いところが谷を表す。風は左から右へ吹いている。



図2. 「草履虫パターン」プロファイルの包絡線は孤立波のようになる。

これが、風紋形成の過程での saltation による、砂表面の時間発展である。ここで n' は、saltation を終えた時点での (計算上の) 中間時間ステップであり、次の creep の過程を終えて、はじめて、full の単位時間ステップが経過したものと見なす。

3.2. Creep

creep も非常に単純化して考える。風による creep は saltation の連鎖が始まったあとは風紋の形成には、あまり効かないと仮定する。そのかわりに、先には述べなかった重力による creep を考える。すなわち、傾斜の曲率に応じた局所的な高さの緩和である。これは、拡散と同一形で

$$h_{n+1}(x, y) = h_n(x, y) + D \left(\frac{1}{6} \sum_{NN} h_{n'}(x, y) + \frac{1}{12} \sum_{NNN} h_{n'}(x, y) - h_n(x, y) \right). \quad (3)$$

と表される。ここで $\sum_{NN} h_{n'}(x, y)$ は、(i,j) の最近接 cell での和、 $\sum_{NNN} h_{n'}(x, y)$ は第2近接 cell での和である。

以上の二つのステップを交互に行い時間発展をさせる。³

あとは UNIX の画面上に風紋が浮き上がっていくのを見守るのみ！

3.3. 計算結果

初期条件として、微小で random な振幅の凹凸を空間の各 cell に割り当ててこれを、ほぼのべりとした、砂浜と見立てここに風をあてて、時間発展をさせた。初期条件によらず、ほとんどの場合は、大まかに分けて図1のような2つの定常状態にいたった。1つは、なにもできない状態。もうひとつは風紋が存在する状態。風紋は風向に対してほぼ垂直方向に延びる尾根をもち、ところどころに dislocation を含み、dislocation は繋ぎ変え運動を繰り返している。

³以上の手順は Coupled Map Lattice あるいは Cell Dynamics と呼ばれる手法の一つである [2]

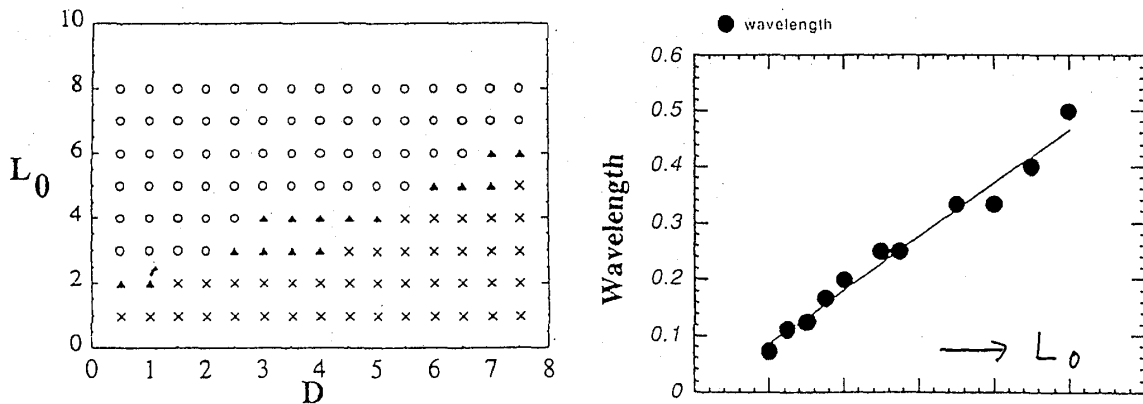


図3. The phase diagram of steady states in control parameters space. At the positions marked with ○, ripple appears in the system and occupies the whole system. The symbols × indicate the positions where no ripple pattern is observed to appear. The transient area, where ripple patterns intermittently appear in space and time, are marked with △.

図4. Wind force L_0 vs. selected wave length of ripple. When L_0 is sufficiently small no ripple is generated.

また、これらの定常パターンに加え「灰色」パターン、すなわち、限られた計算時間では定常状態か遷移過程か判断はつかないが興味を引くパターンがあった。その一つは、図2にみられる「草履虫パターン」である。草履虫はソリトンのように有限のサポートをもって系内を這う。このときの背景は平坦である。

卓越風の風力(ここでは摩擦速度)の指標 L_0 と creep の速さ D 、の2つのコントロールパラメータの空間で定常状態を調べていくと図3のダイアグラムのようなになった。中間にどっちつかずの灰色ゾーンはあるものの、風紋発生の有無に関してははっきりした区分ができる。

言葉でいうと、「creep rate を一定に保った場合、風力がある一定値を越えたところで、いきなり風紋発生の条件が満たされる。」一方、「風力を一定に保った場合、creep rate がある程度以上になると風紋は発生しない。」ということになる。

また、 L_0 に応じて風紋の波長が単調に増加する。この関係は図4に示した。

3.4. 解析

上の結果に対して簡単な解析を行う。一次元でも二次元でも風紋発生の条件自体は本質的には変わらないと思えるので一次元に限定して話を進める。

まず各粒子に着目すると、saltation によって、第 n ステップから第 $n+1$ ステップにかけて、位置が

$$x_{n+1} = x_n + L(h(x_n)) \tag{4}$$

と変化する。

この結果として各場所での砂表の高さの変化は、

$$\begin{aligned} h_{n+1}(x) &= h_n(x) + q \sum_{x'} (\delta_{x'+L(h(x')), x}) \\ &- q + D \left(\frac{1}{N} \sum_{x''} h_n(x'') - h_n(x) \right). \end{aligned} \tag{5}$$

となる。ここで D や q は 2 次元のときと同じ、 N は隣接 cell の数、 δ は、クロネッカーのデルタである。右辺第 2 項、第 3 項がそれぞれ、cell x への砂の流入、流出による、 x での砂床の高さ h の変化を表している。この式を直接解析すればよいのだが、とても手がつかない。そこで、ここは、泣く泣く次の連続化を行う。

$$\begin{aligned}
 \tau \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} &= q \left[\int_{-\infty}^x \delta(\xi + L(h(\xi)) - x) d\xi \right] + D' \Delta h(x, t) \partial x \\
 &= q \left(\sum_{\xi} \frac{d\xi}{dx} - 1 \right) + D' \Delta h(x, t) \quad (6)
 \end{aligned}$$

ここで、 τ は、時間の刻み幅、 δ はデルタ関数、 \sum_{ξ} は、 $\{\xi | \xi < x, \xi + L(h(\xi)) = x\}$ を満たす任意の ξ に対して和をとる。また、 Δ は $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ の略。最後の項にでてくる $\frac{d\xi}{dx}$ は、

$$\begin{aligned}
 \frac{d\xi}{dx} &= \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} = \left(\frac{d[\xi + L(h(\xi))]}{d\xi} \right)^{-1} \\
 ((1) \text{より}) &= \left(1 + b \frac{dh(\xi)}{d\xi} \right)^{-1} \quad (7)
 \end{aligned}$$

これを (6) に代入すれば、砂床の時間発展方程式ができる。これで、先に泣く泣く連続化したことを除けばほとんど、もとの数値模型の情報を失わない方程式ができあがった。これには、もしかして「草履虫ソリトン」の謎もつまっているのかもしれない。しかし、いきなり手をつけるのはちょっと厳しい。でもできるだけ、エッセンスを掬い取りたい！と考えつついまのところ時間の都合もあって次に示す線形解析しか施されていない。

線形化の過程は、河村の文献 [7] を参考としている。まず、 $\frac{d\xi}{dx} < \infty$ という仮定で式 (7) の発散はおさえ解析的に扱えるようにする。ただし、この仮定は、 $\frac{dh(\xi)}{d\xi} > -\frac{1}{b}$ (近似 1) という事になり系でおこる面白い現象一つ、「表面砂粒の追い抜き」を排除する事になってしまう。これによって、離陸点と着陸点が 1 対 1 対応し、よって (6) の \sum_{ξ} が消える。(これに関連して、後の検討の節に簡単に記述しています) さらに、上の仮定の不等号 $<$ を \ll と直すと、

$$\frac{d\xi}{dx} \simeq \left(1 - b \frac{dh(\xi)}{d\xi} \right) \quad (\text{近似 2}) \quad (8)$$

ここで、 ξ を $x - L_0$ で置き換えるという一種の平均場近似 (近似 3) を使うと線形化が完成し式 (6) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \tau \frac{\partial h(x, t)}{\partial t} &= -qb \frac{\partial h(\xi, t)}{\partial \xi} + D' \Delta h(x, t) \\
 (\text{近似 3 より}) &= -qb \bar{A} \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} + D' \Delta h(x, t) \quad (9)
 \end{aligned}$$

ただし \bar{A} は、並進移動の演算子。すなわち、 $\bar{A}f(x) = f(x - L_0)$ 。ここで $f(x)$ は任意の関数。上の方程式に $h(x, t) = \exp(\sigma t + i\nu x)$ と代入して、関係

$$\bar{\sigma}(\nu) \equiv \text{real}(\sigma(\nu)) = -Aqb\nu \sin(\nu L_0) - D\nu^2 \quad (10)$$

を得る。右辺の、第 1 項と第 2 項の競合で、波 (この場合風紋) ができあがるかどうか決定される。 ν が正の場合のみを考えて、 $-Aqb \sin(\nu L_0)$ と $D\nu$ のグラフを比べると、図 5 のようになる。

ここで 砂粒の平均飛距離 L_0 が卓越風の風力、 D が creep の速さを表す指標であったことを思い出して頂きたい。 D がゼロでなく、風力が弱いときは、グラフが交わらず風紋は発生しない。しかし D を固定して L_0 を増して行くと 2 つのグラフは近づきやがて、不安定点が発生する。これが風紋の発生機構と考えられる。

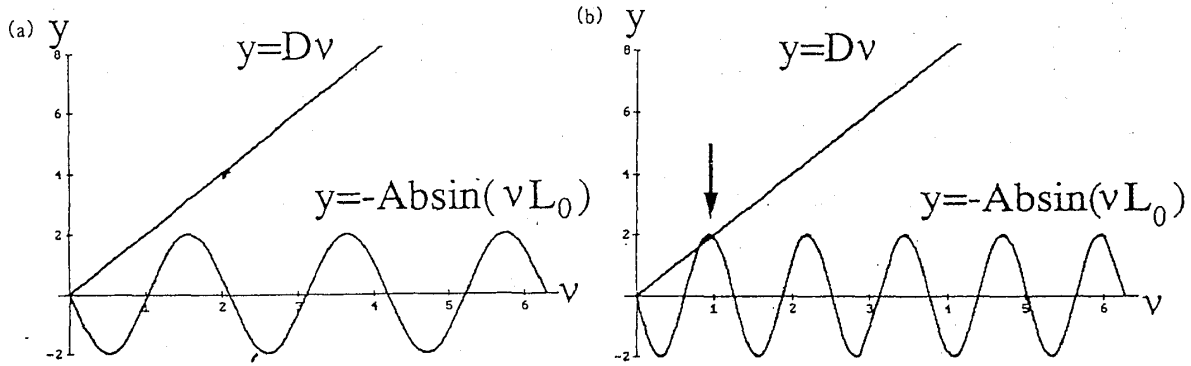


図5. A schematic explanation for the generation mechanism of sand ripples. When creep rate D is fixed and wind force L_0 is sufficiently large, the growth rate of wave, $\bar{\sigma} \equiv \text{real}(\sigma) = -ANbv\sin(vL_0) - Dv^2$ is negative at any wave number v , (fig.4(a)). When L_0 increase to exceed a threshold value the sine curve shrink to the left and a region in wave number space indicated by arrow goes unstable. (fig.4(b)). This is the same case when D goes below a threshold value with a fixed L_0

このときの L_0 を「臨界平均飛行距離」と名付け、これは D に依存するので、 $L_{0C}(D)$ で表す。先に述べたように、 L_0 は、卓越風の強さを表す指標となるので L_{0C} は、風紋ができるための臨界風力に対応する物理量といえる。

さらに風力を増すと、不安定領域は有限の幅を持ったバンドとなる。この場合バンドの中でどの波数が選択されるかについては、現段階では言及できない。しかしながら少なくとも、最大成長波数は L_0 に 反比例して減少していく。また、 L_0 を止めて、 D を有限値から順に減らしていくと同じ様に風紋の発生が起こる。このときの D の値を $D_c(L_0)$ と表す。 L_{0C} と D_c の関係は先の線形方程式を 次のように無次元化することで明らかである。

$$\frac{\partial h(x', t')}{\partial t'} = \bar{A} \frac{\partial h(x', t')}{\partial x'} + \Delta h(x', t') \quad (11)$$

となる。ただし、 $x' = \left(\frac{qb}{D'}\right)x$ また、 $t' = \left(\frac{q^2 b^2}{D'}\right)t$ 。ここで注目すべきことは、上式中で、空間スケールは、 \bar{A} に L_0 の並進操作が含まれるのみでという事実である。これより、風紋ができる、臨界平均飛行距離 L_{0C} とそれに対応する、creep rate D' の間の関係

$$L_{0C}(D) \propto \left(\frac{D'}{qb}\right) \quad (12)$$

が導かれる。

これらの結果は、先に示した計算結果中の、ダイアグラム（図3）中の境界線と対応している。以上、「風紋の発生の機構」という点に絞れば、線形解析も捨てたものではない、と思いたくなる。

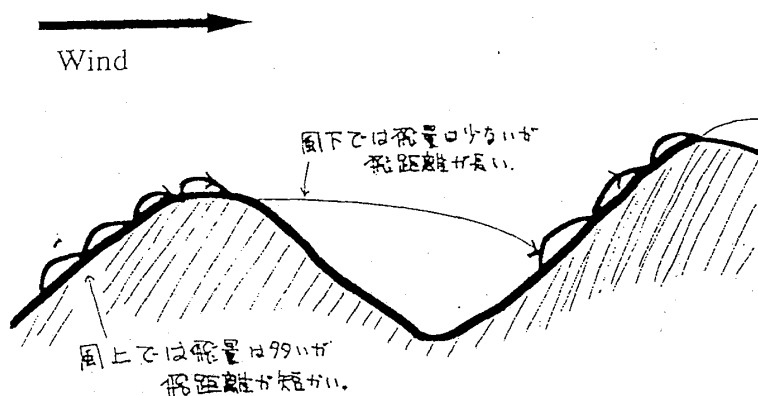


図6. 風上では離陸点の高度によらず飛距離小、風下では大。〔9〕

4. 砂丘形成のダイナミクス

砂丘の形成の模型については、現在も模索中の段階である。砂丘のパターンは非常に多彩で、風の強さ、粒子の非一様性などに応じて、様々な顔を見せる。[6, 8] しかも、時間とともにその形状は進化して行き、やがて、別の形状の砂丘に生まれ変わる。いまのところ、我々は、これらを包括的に説明するだけの模型を提出する事には成功していない。次に紹介するのは、(先の模型よりもっと極端なレベルの) 素朴な仮定に基づいた、「おもちゃ」である。しかしながら、それから生成される数値実験の結果は砂丘のパターン動力学の特徴の一面をよく表しており、現象論構築の端緒になり得ると考えている。以下が我々のモデルとそれに対する計算結果の概要である。

4-1. 模型の概要

風紋の模型と同様、saltation と creep からダイナミクスを構成する。saltation については、系の空間スケールが saltation のスケールに比べて十分に大きいと考えて、砂丘の風上側では saltation による飛距離が小、風下側では飛距離が大と設定する(図6)。また、出発点の地形のみで、saltation の飛距離が決まるという仮定は風紋の場合と同様である。ただし風紋の場合と違って、離陸点の高さには飛距離は依存しないと考える。上の仮定を盛り込むと、saltation の距離について

$$L = L_0 - \alpha \tanh(\nabla_x h(x)) \quad (13)$$

となる。 α は定数。saltation によって、離陸点と着陸点の cell の高さは、(2)と同様に砂の移動量に応じた量 q だけ交換される。ただし、今の場合 q は、一定ではない。すなわち、

$$q = q_0 + \beta \tanh(\nabla_x h(x)) \quad (14)$$

とする。 $(\beta$ は定数)

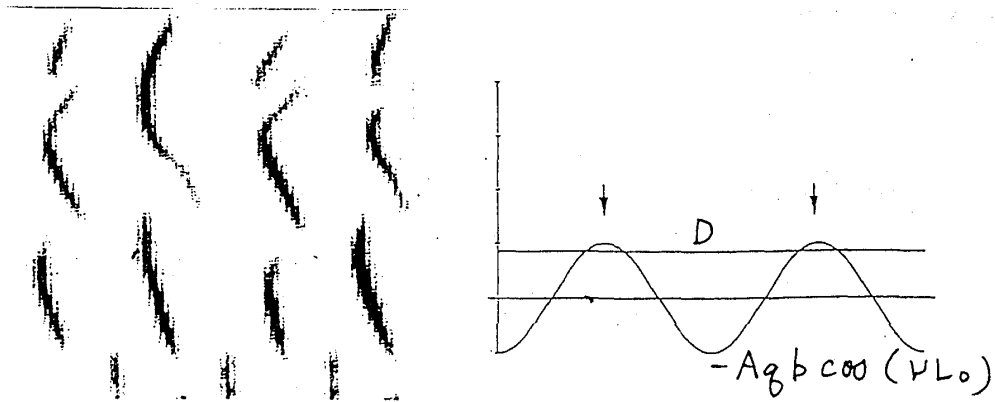


図7. 砂丘のシミュレーション。バルハン砂丘のようなパターンが、形状を保ちながら風下方向に動いていく様子。風は左から右へ吹いている。色の濃いところが砂丘の尾根付近。

図8. D (creep rate) を減らしていくと、多くの波数がいっせいに不安定化する。

これは、風上側では風下側に比べて saltation が活発で、計算上の粗視化された単位 cell 内 (3-1 節) での単位時間あたりの粒子の移動量が大きいという仮定に基づくものである。

こうして、saltation による砂表面の時間発展は

$$h_n'(x, y) = h_n(x, y) - q(x, y) \tag{15}$$

$$h_n'(x + L(h_n(x, y)), y) = h_n(x + L(h_n(x, y)), y) + q(x, y)$$

で表される。また、creep については、風紋の模型と同様 (式(3)) とする。

4-2. 計算結果および解析

出現するパターンはコントロールパラメータに依存して非常に多様である。調整次第で、様々な空間パターンを出せる。そもそも toy(おもちゃ) モデルであるゆえ、これら一つ一つが実在の砂丘パターンに対応するのか詳細な議論は、現段階では避ける。ただし、いくつかの代表的な砂丘に類似したパターンが、モニターのなかに生成されていくのが見られた。これらの中には、バルハン砂丘もしくは三日月砂丘と呼ばれる、極めて特徴的な形状で知られている孤立砂丘に似通った形状も認められた。(図7) この形状は、現実系のごとく、その形状を保ちながら、風下に向かって移動していく。

この場合も風紋の場合と同様の線形解析ができる。ただし、波数 ν の成長率 $\bar{\sigma}(\nu)$ は、

$$\bar{\sigma}(\nu) \equiv \text{real}(\sigma(\nu)) = -Aqb\nu^2 \cos(\nu L_0) - D\nu^2 \tag{16}$$

となる。よって、図8からわかるように、モードの不安定性は風力の変化によって生じるのではなく、creep rate D の変化によってのみ起こり、さらに、複数のモードが、 D がある数居値を

下回ったときに、同時に不安定化する機構が考えられる。これより、（少なくともこの模型でできた）砂丘パターンの多様性は、「複数モードの同時不安定化」に帰することができそうである。

ただし、この模型はあくまでも相当程度に戯画化されたもので、現実系との対応は不十分である。これについては、筆者の一人(N.O)が主となって、観測事実に基づいた[10]、より現実的な模型を構築している途上である。

5. 検討

以上の計算および解析では、第一近似による系の理解をとりあえずの目標としたがため、多くの事に目をつむってきた。しかしながらそのために闇へ消された、興味深いもろもろが自己を主張しがっているのを筆者は感じている。以下、それらについて箇条書きする。

1) 風紋の模型で線形化の手続きを行った際、 $\frac{dh(x,t)}{dt} \gg -\frac{1}{\tau}$ の近似（近似2）を行ったが、ここで展開の次数をあげてみると、時間発展の方程式は、

$$\frac{\partial h(x',t')}{\partial t'} = \tilde{A} \left[\frac{\partial h(x',t')}{\partial x'} + \left(\frac{\partial h(x',t')}{\partial x'} \right)^2 \right] + \Delta h(x',t') \quad (17)$$

となる。これを解析することで、草履虫も出てくるか？という期待がある。ここで \tilde{A} は、並進操作の演算子であるのでそれほど簡単ではない。また、近似3において飛距離を平均飛距離 L_0 で置き換える操作を行っており、ここをちゃんと扱えば、 \tilde{A} の並進移動が一定でなくなり、さらなる非線形性がでてくる。

2) また、「近似1」によって排除された追い抜きは、現実の系、及び我々のシミュレーションの中は起こっているだろうと考えられる。一個一個の粒子の動きに着目すれば、ある時間ステップから次の時間ステップへの位置の変化は、

$$x_{n+1} = x_n + L(h(x_n)) = x_n + L_0 + bh(x_n) \quad (18)$$

という写像で表される。例えば、先の線形近似で仮定したように、プロファイル $h(x)$ をSIN関数だとすると、上は粒子の位置に関するサインサークル写像となり、特に、 $|vb| > 1$ が成り立つ場合折り返しが起こる。（ ν は波数、 b は上の式中の定数）。ただし、 $h(x)$ 自体も時間とともに変化する場合はより一般的であり、この変化は先に述べた砂表面の動力学が決定するという、2重構造になっている。このように個々の粒子の動きは非常に複雑であると考えられる。しかしながら、系の中には、風紋や砂丘という巨視的パターンが、自発的に形成され維持されているということも事実であり、そこから、個々の粒子の乱れた動きと系の巨視的秩序の形成の間の関係が問題となる。筆者としては、双方に、何らかの積極的な相関が存在することを期待しており数値的な検討も試みているが、現段階では、議論は、茶飲み話の域をでない。

3) 先の計算では、系を構成する砂粒が一様である場合を扱ったが、現実系では砂粒の非一様性が系の動力学に重大な影響を与えていると予想できる。現在までに、非一様な系に関するいくつかの計算を実行してきたが、その中で得られた面白い現象は、風紋における異種の砂粒間の相分離である。すなわち、大きい砂粒が時間と共に風紋の山頂部に集まり、逆に、小さい粒子は谷に集まってくる現象が、我々の計算結果としてでている(図9)[9]⁴。

⁴最近のnature誌[11]に、同様の計算結果が掲載されている

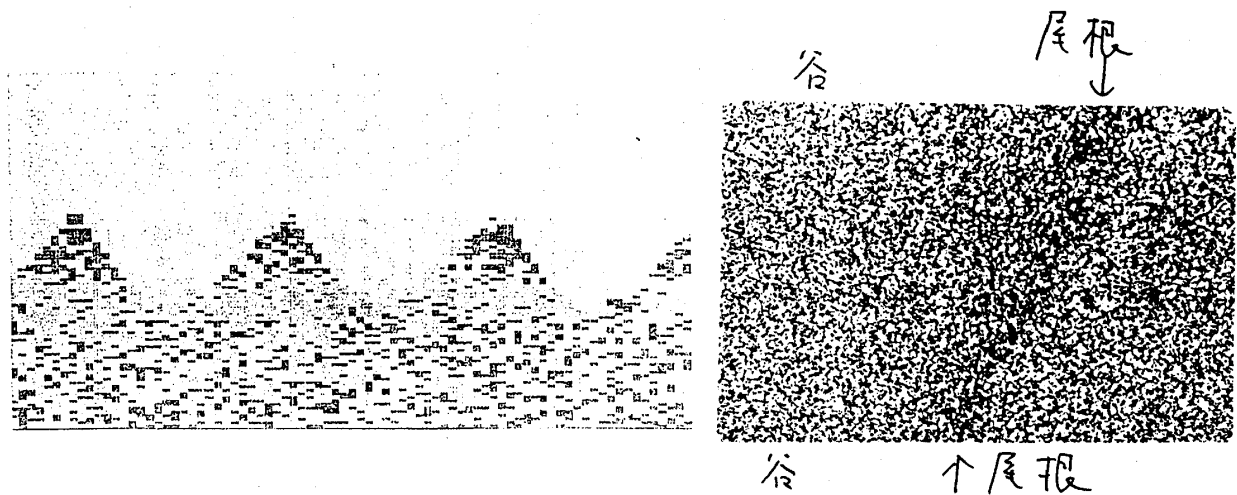


図9. セルオートマトンによる非一様系の計算例(文献8)。図は砂の断面。動きの悪い粒子(大きい粒子:濃い色で表現)が時間と共に系の上部に集まってくる。

写真1. 筆者の一人(H.N)が海岸で撮った写真。風紋の頂上に大きい粒子(色の濃いもの)が集まっているのがわかる。

これは、現実の風紋にみられる事実とよく対応している。(写真1) また、非一様性が高くなるにしたがって、砂表のプロファイルが風上と風下で非対称的になること、すなわち、風下ではより急峻、風上ではよりなだらかでになることが知られている。また、それによって、系の選択波数や波の振幅にどのような影響が生じるのか、議論が待たれている。そもそも、系の非一様性は、系のパターン形成とその持続に正の影響を与えるのか、系のパターンを阻害するのか、話題の「ねた」は尽きない。

以上、我々の砂表面の動力学のアプローチの現状について述べたが、多分まだ「物理」として消化しきれていないという印象を与えたかも知れない。対象とする現象が自然環境そのもので、とくに砂丘のスケールでは実験による制御が難しい。我々の提出するモデルも定性的な議論にとどまっている。

先に生き生きした自然ということ述べたが、我々の目的の一つは、その「鮮度」を失わないようにして、自然を理解したいということである。理想化された、対称性のよい対象物を選んで厳密に扱うのは、精密科学としての物理学の一つの方向であるかも知れない。しかしながら、我々の周りには、その謎を知る欲求を喚起されざる得ないような、素朴で興味深い対象が多く転がっており、これらの多くは、対象性の極めて悪い「汚い系」である。これらを包括的に理解できればよいのだが、包括性を求めて、既知の微視的な原理に降りていくばかりでは、「世界と同じ大きさの世界地図」を書くことになりかねない。⁵

微視的に戻らずに、かつ個別的にならずにと言う要請は系の理解のしかたについて、新たな、枠組みを要請する。

これらの汚い(しかし多彩で、楽しい)現象に対する記述の試みはその多様性の源の一つであろうと考えられている、現象の非線形性一般への関心の深まりとあいまって世界各地で盛んになってきてはいるが、物理屋の多くは、未だ、自分達が慣れ親しんできた手法の延長上になくこれらの系の研究に携わるのを躊躇しているように思える。

八百万の神を祭り上げ、少なくとも歴史的には物事の多様性を重んじてきた日本人にとって、この分野は、世界に向けてオリジナリティを発揮し易い分野であるとあると思うのだが、いかがでしょうか？

⁵無論、既知でない微視的視点から汚さの起源を問う試みも活発になってきている

本研究を始めるにあたって、砂の輸送に関するたくさんの資料を見せて下さった上、研究の意義について、励ましとなるアドバイスを頂いた京大の河田恵昭教授、および、シミュレーションの実行にあたって随分助けて下さった東京工大の柳田達雄さんに感謝致します。なお、本研究は平成5年度文部省科研費補助金(奨励A)による援助をうけて遂行されています。

参考文献

- [1] 赤木三郎, 砂丘のひみつ, (青木書店,1991)
- [2] K.Kaneko, Simulating Physics with Coupled Map Lattice, Volume 1 of *Dynamics and Statistics of Patterns*, (World Scientific, Shingapole,1991) ,Y. Oono and S. Puri *Phys. Rev. A* **38** 434 (1988).
- [3] 摩擦速度は、 $v^* = (\tau_0/\rho)^{1/2}$ と定義される。ここで、 τ_0 は砂表面における剪断応力、 ρ は空気の密度。摩擦速度は観測データから次のように求まる。すなわち、表面から高さ z の位置における水平方向の風の強さの時間平均 U は関係: $U = v_*/k \log(z/z_0)$ に従う。ここで、 k は Karman の普遍定数で z_0 は 砂表面のラフネス長 ([8]) と呼ばれるものである。
- [4] H.Nishimori and N.Ouchi, *Int.J.Mod.Phys.* **7** 2025(1993) ; *Phys.Rev.Lett.* **71** 197(1993)
- [5] T.Yanagita, *Chaos* **2** 343(1992)
- [6] R.A.Bagnold, *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, (Mathuen, London,1941)
- [7] R. Kawamura, Rept. Inst. Sci. Technol, Univ.Tokyo 5. Nos 3/4 (1951) p.95 ; *科学* **18** 24(1948)
- [8] K.Pye and H.Tsoar, *Aeolian sand and sand dunes*, (Unwin Hyman , London,1990)
- [9] 大内則幸, 修士論文(1993)
- [10] J.Hardisty and R.J.S.Whitehouse, *Nature* **332** 532 (1988)
- [11] R.S.Anderson and Kirby L.Bunas,*Nature* **365** 740(1993)
- [12] P.Bak, C.Tang ,K.Weisenfeld, *Phys.Rev.Lett.* **59** 381(1987)