

平面三体問題における最終状態の初期値依存性

早大理工 梅原広明 相澤洋二

Introduction

本研究では、等質量、初速度0での平面三体問題における系の最終状態を調べた。研究の動機は、様々な初期値で系の最終状態を体系的に調べることが相空間のトポロジーを把握する一助となるからである。1989年に Anosova 等 [1] は系のふるまいと初期座標との関係を示した。しかし、最終状態まで調べた領域は広くはなかった。本研究ではさらに計算を進め最終状態を目指した。また、初期座標を細かく変化させ同様に調べた。そして triple encounter と最終状態との関係を考えて。最後に、softening $1/r$ ポテンシャルについても同様の計算を行ない、 $1/r$ ポテンシャルとの相違点を調べたので、捕捉的にふれる。

全質点の初速度が0の場合、運動は初期座標平面上に限られる。さらに、全エネルギー E が負で全角運動量が0であるため、系の最終状態 ($t \rightarrow \infty$ のときの状態) は次の3種類に限られる。(1) 3質点とも有限領域にとどまっている (trap) か、(2) 2質点が binary となり残る1質点が binary から離れる (escape) か、(3) 3重衝突となる場合かである。

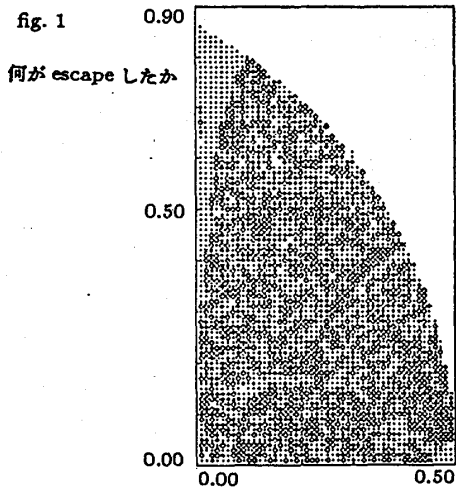
さて、実際には $t \rightarrow \infty$ までの計算は不可能なので escape criterion を利用する。これはある $t = t_0$ のときに binary の重心と escaper (escape する質点) との距離 ρ がある値 a 以上に離れていて、両者の相対速度が離れる方向に向いていて、なおかつある値 b 以上であるならば、その後の $t > t_0$ では $\rho \rightarrow \infty$ となる、という定理である。ただし、これは十分条件であるため定数 a, b をできるだけシビアにとろうと今世紀初めから今日においても考えられている。本研究では Standish [2] による値を用いた。

Results — $1/r$ potential

まず、初期座標と系の最終状態との関係を4次の Runge-Kutta 法によって調べた。ただし、 $r_{\min} \leq 0.01$ (r_{\min} は近接2体間の距離) のときは Levi-Civita の正則化を施した (具体的な表式は [3] に詳しい)。初期値は Anosova [1] と同じで、質量がすべて1、初速度はすべて0、初期座標は $A(-0.5, 0)$, $B(0.5, 0)$, $C(x, y)$ とした。ただし、系の保存量が 10^{-6} を越えた場合、計算は無効にした。

ただし、Anosova は最初に escape しようとした質点に戻る (今後 first rounding と呼ぶ) ときに計算を止めている。本研究ではそれ以降も計算を進めた。しかし、すべての領域で最終状態の判定ができるわけではなく、時間等の制約もあるので、時間と相互距離に上限 $t \leq 100$, $\rho \leq 20a$ を設けた。 $\rho > 20a$ となれば escape criterion を満たしていなくても、相当離れているため escape したと仮定し (今後 conditional escape と呼ぶ)、完全な escape と conditional escape となる初期値において何が escape したのかを図示した (fig. 1)。● は $A(-0.5, 0)$ が、◇ は $B(0.5, 0)$ が、○ は $C(x, y)$ が escape した。なお、等質量で初速度0の場合、 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $(x + 0.5)^2 + y^2 \leq 1$ を満たす x, y のみで行なえば、相似不変性により、すべての初期座標で行なったことに相当する。

いずれの計算においても、最終状態はすべて escape になった。ある部分を拡大 (fig. 1 の10倍) して見ると fig. 2 になる。すると、規則的な模様に見える領域が表れた。この領域は first rounding の前に escape criterion を満たしている。この領域内では Anosova の指摘どおり、escape する質点別に3層に分かれていた。その他の領域は、何が escape する



かが初期座標に対して鋭敏に依存している(今後この領域をカオスの領域と呼ぶ)。さて、規則的模様領域内で、B が escape する層と C が escape する層との境界付近をさらに拡大した結果 fig. 3 が得られた (fig. 2 の 100 倍)。すると、境界にカオスの領域のあることがわかった。

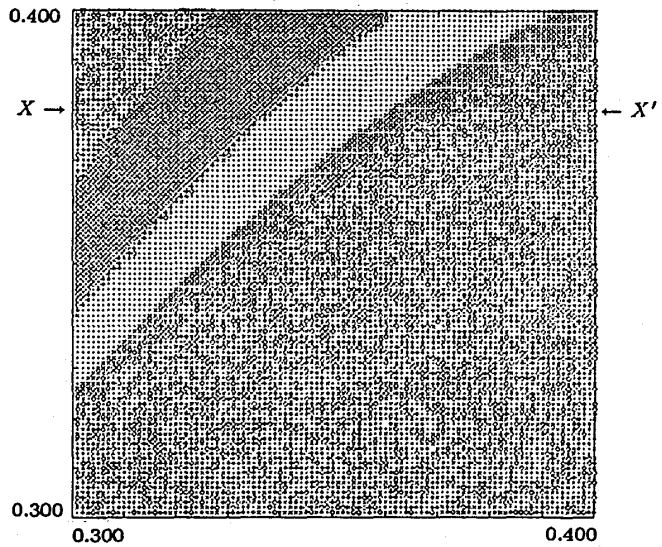


fig. 2 (fig. 1 × 10)

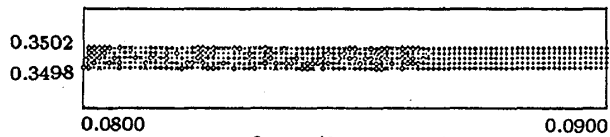


fig. 3 (fig. 2 × 100)

Discussion

— triple encounter

どの初期値のときに3重衝突が起きるのかを見当づけるために、初期値と triple encounter のときの3体間を結ぶ三角形の周長(以下、周長と略す)との関係を調べた。ただし最初の triple encounterに限った。 $y = 0.38$ のときの x と周長との関係は fig. 4 のようになった。 x に対して周長が最小値をとるところは規則的模様領域の C が escape する層と A の層との間にあった。また、規則的模様領域とカオスの領域との境界付近は特異的な様子は見られなかった。すなわち、first triple encounter は2つの領域を分ける要因ではないことがわかった。

それと関連することだが、fig. 1 の計算過程から、C(0.39, 0.42) だ

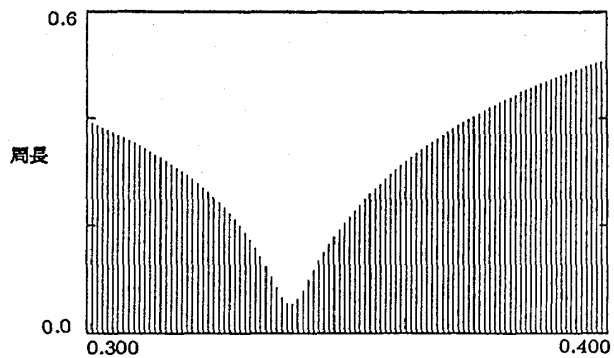


fig. 4 triple encounter の周長 (fig. 2 の X-X' 上)

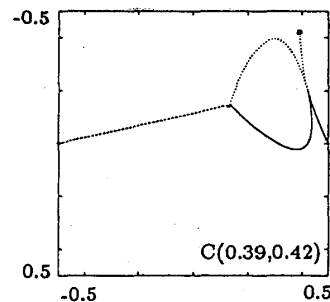


fig. 5 軌道

け first rounding までに系の保存量が 10^{-6} を越えていることがわかった。そこは 3 重衝突に非常に近い軌道になっている (fig. 5)。ところで、 $(x+0.5)^2 + y^2 = 1$ 付近に C がある場合、二等辺三角形の三体問題 (isosceles three-body problem) に非常に近い。isosceles three-body problem は今までに詳細に調べられている [4][5]。今後の指針として isosceles 付近をもとに軌道の様子をトポロジカルに考えていくつもりである。

Appendix

— Softening $1/r$ potential

softening $1/r$ ポテンシャル

$$-\sum_{i \neq j} m_i m_j / \sqrt{r_{ij}^2 + \epsilon^2}$$

において、fig. 2 と同じ条件で計算した結果 fig. 6 が得られた。 $\epsilon = \sqrt{2.0} \times 10^{-2}$ とした。 $1/r$ ポテンシャルで $r_{\min} \leq 0.01$ のとき正則化を行なったのだが、それとの関連で $r_{\min} = 0.01$ のときポテンシャルが変極点となるように ϵ を定めた次第である。なお、softening $1/r$ ポテンシャルでも escape criterion がそのまま成り立つことは [2] に従えば容易に証明できる。

規則的模様の領域は $1/r$ ポテンシャルより狭くなっている。これはポテンシャルに底があるため、長く trap されていることによる。また、やはり規則的模様の領域の中に escape する質点別に 3 層に分かれている。しかし、その並び方が $1/r$ ポテンシャルとは違う。この理由は 3 体の軌道を表している fig. 7(a)(b) を比較すればわかる。最初に 2 体が接近した後 180° 曲がるか通り抜けるかで、その後の質点の立場が入れ替わっている。

ところで、最初の動機である、特異点の有無による最終状態の違い、という見地に立つと有意な違いは見られなかったといえる。

References

- [1] Anosova, Zh.P. and Zavalov, N.N.: States of strong gravitational interaction in the general three-body problem. *Astron. Zh.* 66, 152 (1989). (*Sov. Astron.* 33(1), 79 (1989)).
- [2] Standish, E.M.: Sufficient conditions for escape in the three-body problem. *Cele. Mech.* 4, 44 (1971).
- [3] 堀 源一郎: 天体力学講義. 東京大学出版会 (1989).
- [4] Devaney, R.L.: Triple collision in the planar isosceles three body problem. *Inven. math.* 60, 249 (1980).
- [5] Simó, C. and Martínez, R.: Qualitative study of the planar isosceles three-body problem. *Cele. Mech.* 41, 179 (1988).

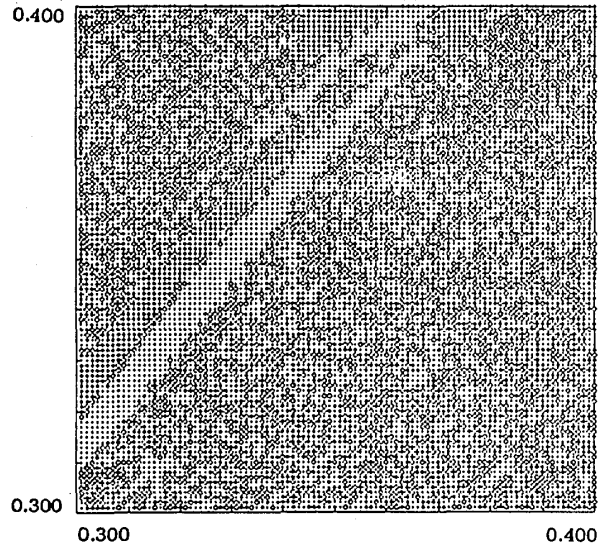


fig. 6 何が escape したか

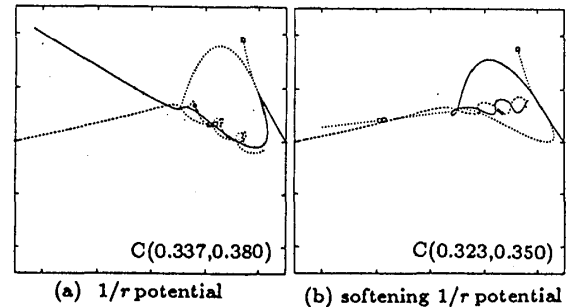


fig. 7 軌道