

一次元自己重力系の準平衡状態の解析

土屋俊夫 (京都大学)、小西哲郎 (名古屋大学)、郷田直輝 (大阪大学)

1 Introduction

一般に大自由度系では、個々の自由度に関する微視的な運動はカオスで、複雑な振舞いをする。しかしこのカオスが十分強く、運動がエルゴード的ならば、巨視的な振舞いはむしろ単純になって統計による記述が良くなる。

重力多体系は、大自由度系であるが、次に挙げる理由から、統計的な扱いの正当性は疑問である。1つには、重力は遠距離力であるため、近くの星の重力より、全系が作る重力の寄与の方が大きい。そのため、微視、巨視の区別が難しく、個々の星のカオス的な振舞いが、全系の構造にも大きな影響を与える。もう1つの理由は、重力系は比熱が負であるため、孤立系では安定な定常状態は存在しないことにある。

熱力学的な不安定性に起因する現象として gravothermal instability が知られている。この現象は熱力学的な緩和時間 (2 体緩和時間) で起こるがこれは球状星団でも宇宙年齢と同程度、楕円銀河では宇宙年齢の 100 万倍も長い [1]。

これより短いタイムスケールの現象として、観測や N 体計算によって dynamical time の数～数 10 倍で達成される、力学的平衡状態が存在することがわかっている。この力学的平衡が達成されるメカニズムはまだ完全には理解されていない。

上述のように、重力多体系では、系の巨視的な振舞いにカオス系の特徴が現われると考えられる。そこで系全体の進化を Γ 空間の中の軌道と考え力学系として扱う。もし軌道がエルゴード的ならば、系の持つ平衡状態は熱力学的平衡だけで、それに至る緩和時間より短い現象は、非平衡の遷移過程でしかない。しかし、力学系においてはしばしば軌道は非エルゴード的になり、その結果短いタイムスケールでの準定常状態が出現することが知られている。従って重力多体系における力学的平衡状態を理解するためには、系のカオスの様子を調べておくことが重要である。

そこで我々は、重力多体系のエルゴード性に焦点を当てて、系の進化の数値的な解析を行なった。

2 1 次元シートモデル

我々は重力多体系の 1 つのモデルとして 1 次元シート系を考える。これは無限の広がりを持った厚みのない平板の集合で、面に垂直な方向にのみ運動する。面密度を σ とすると、Hamiltonian は

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N v_i^2 + 2\pi G\sigma \sum_{j<i} |x_i - x_j| \quad (1)$$

と表される。シートは交差した後すり抜けて運動するとする。

このモデルを選んだ理由は次の通りである。

1. シートの交差が起こるまでは、各々のシートは放物運動をする。従って系の進化は解析解をつなぐことによって得られるので、数値積分方による誤差が排除できる。
2. 1次元系では比熱は正であり、軌道の広がり是有界なので、従来の統計力学の枠組の中で議論できる。
3. 3次元的な運動をする質点系とは違った力を持つが、重力の遠距離力としての性質は保っており、大局的に結合した系の性質は調べることができる。

3 数値実験の結果

次の3つの初期分布の時間発展を数値的に追った。

1. *isothermal* 分布

エントロピー最大の条件から定義される熱平衡状態。 $\rho(x) \propto \text{sech}(x)$ 、 $\theta(v) \propto \exp[-\beta v^2]$

2. *water-bag* 分布

位相密度一定。 $f(x, v) = \text{const.}$

3. *iso-energy* 分布

すべてのシートが等しい1粒子エネルギーを持つ。 $f(x, v) = \delta(E(x, v) - E_0)$ 。

シート数は256、時間の単位を力学的時間 ($t_d = L/V$ 但し L, V は系の特徴的な長さとして速度) にとって $10^6 t_d$ まで計算を行なった。この単位で1枚のシートが系を横切る時間は $5 \sim 10 t_d$ である。

isothermal と *water-bag* 分布は、無衝突ボルツマン方程式の安定な定常解であり、2体散乱の影響が無視できれば分布は変わらないはずである。2体散乱の効果は、シート間のエネルギーの交換で評価する。Figure 1. は *water-bag* 分布についていくつか選び出した粒子のエネルギーを、横軸で表した時刻 T までで時間平均したものを表している。この図から、 $T = 10^6$ 程度でシートは十分にエネルギーを交換してほぼエネルギー等分配が達成されていることがわかる。これが熱力学的な平衡への移行を示しているとするならば、*water-bag* 分布は進化の終状態 ($T = 10^6$) では *isothermal* 分布になっているはずである。Figure 2. は *isothermal* 分布と *water-bag* 分布のいくつかの代表時刻における累積エネルギー分布を表している。選んだ時刻は $T = 0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ である。この図から、粒子間のエネルギー交換が十分に進んだ後でも、エネルギー分布はほとんど変わらないことがわかる。初期に *water-bag* だったものが、*isothermal* へ向かわないことは明らかであろう。

Figure 1. と Figure 2. は、運動の多重エルゴード性 [2] を示していると思われる。多重エルゴード性とは、位相空間中に近似的にエルゴード性を示す領域が複数存在していることである。この多重エルゴード性は、小数自由度系では、KAM トーラスの存在との関

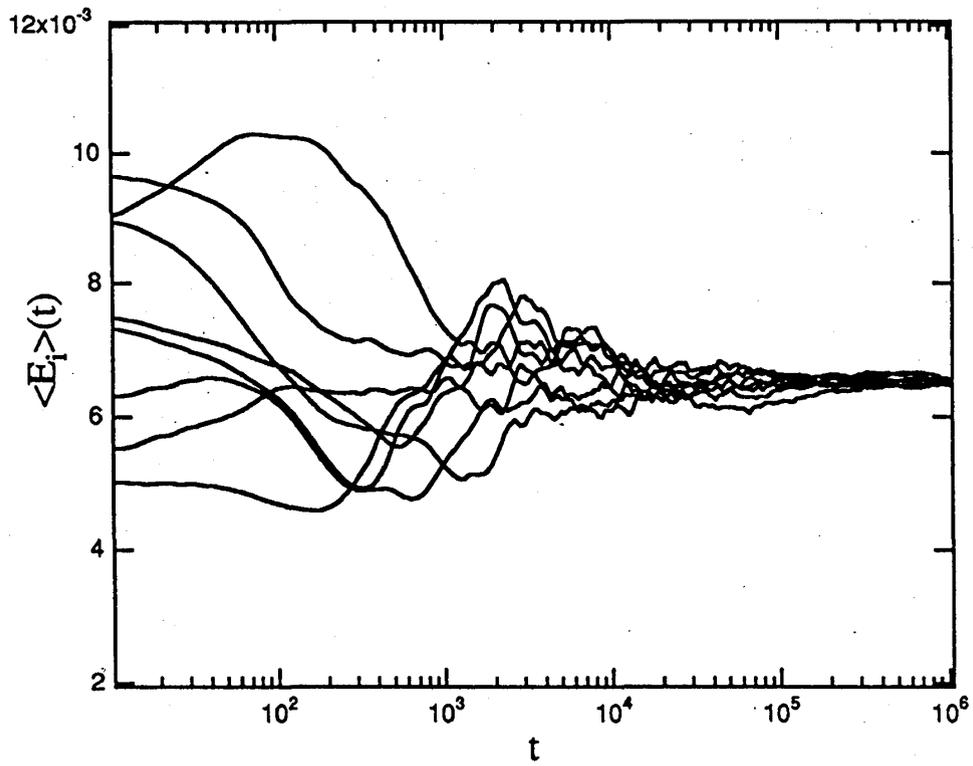


Fig.1

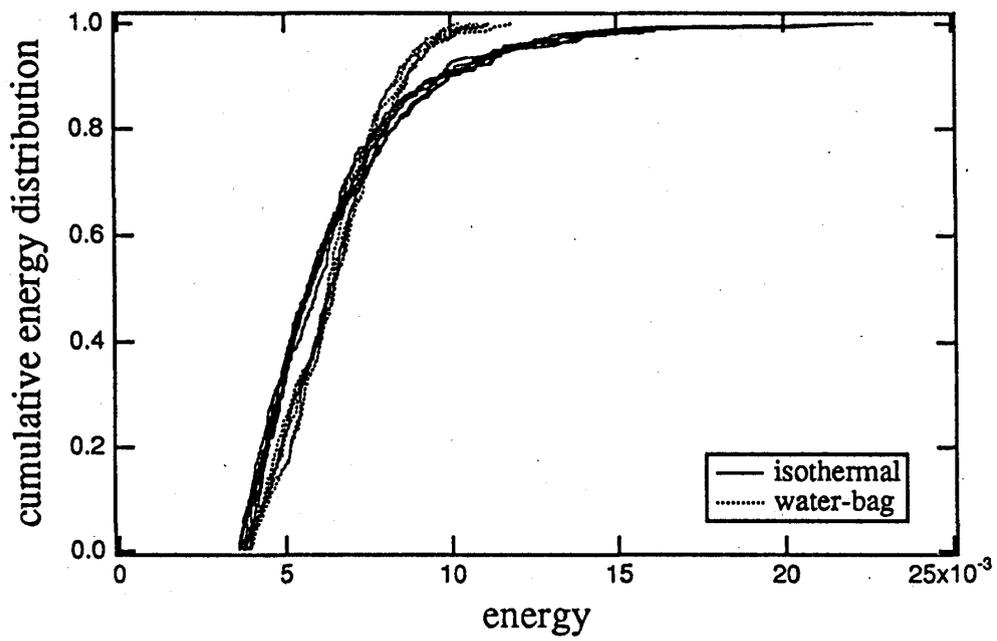


Fig.2

連が調べられているが、シート系で多重エルゴード性を示す原因についてはまだ明らかではない。

今回のシミュレーションで新しく見つかったもう1つの現象は、iso-energy 状態から water-bag へのゆっくりとした遷移現象である。Figure 3 は iso-energy の累積エネルギー分布を表しているが、初期には全ての粒子が等しいエネルギーを持っているのが、 $T \sim 200$ で dynamical instability を起こして壊れ、 $T \sim 10^4$ ではほとんど water-bag になっている。この遷移の様子を、Lyapunov 数で見たものが Figure 4 である。ここで Lyapunov 数 $\lambda(t)$ は横軸で示した時間までの平均で定義され、 Γ 空間内での微小変位 $d(T)$ に対して、

$$\lambda(T) = \frac{1}{T} \ln \frac{d(T)}{d(0)} \quad (2)$$

で表される。isothermal、water-bag とも、 $T \sim 10^4$ で Lyapunov 数はほぼ収束し、その後は変化しないのに対し、iso-energy は $T \sim 200$ での dynamical instability に対応して Lyapunov 数を急激に変化させた後、 $T \sim 10^4$ で一旦収束する。この時分布は water-bag になっているが、Lyapunov 数の値は water-bag と異なっている。さらに進化を追うと $T \sim 4 \times 10^4$ で再び値を変化させ、Lyapunov 数の値も water-bag に近付いていく。この間の Lyapunov 数の変化の様子を見るため、短い時間 (T_{loc}) で平均した Lyapunov 数、

$$\lambda_{loc}(T) \equiv \frac{1}{T_{loc}} \ln \frac{d(T + T_{loc})}{d(T)} \quad (3)$$

の揺らぎのパワースペクトル $S(\omega)$ を調べた (Figure 5)。パワースペクトルは揺らぎの自己相関関数のフーリエ振幅なので、Fig.5 は揺らぎの長時間相関が存在していることを示している。isothermal 及び water-bag について同様の解析を行なうとパワースペクトルはほぼフラットになり、揺らぎの性質が時間相関を持たないホワイトノイズと同じであることがわかった。系がエルゴード領域の中を運動している時には拡散によって位相空間中に広がっていくので、フラットなパワースペクトルはエルゴード性を示していると思われる。それに対し、iso-energy は 1次元シート系の位相空間中に非エルゴード領域も存在していることを示している。

これらの多様な (位相空間中の) 軌道構造は、強いカオスの系でも近可積分系でもない、中間の性質を持つという 1次元シート系の特徴を表していると思われる。今回は、3つの例しか調べられなかったが、このような系では複雑な軌道構造に起因するさまざまな振舞いが見られると期待されるので、今後更なる研究が必要であろう。

参考文献

- [1] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics* (Princeton Univ. Press, Princeton, 1987).
- [2] Y. Aizawa, *Prog.Theor.Phys.* 81, 249 (1989).

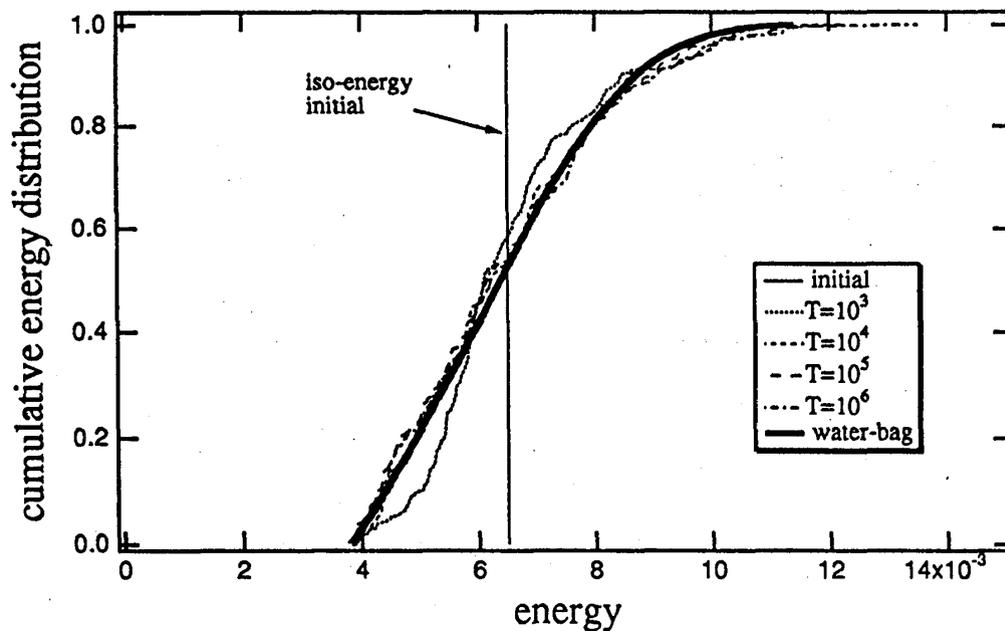


Fig.3

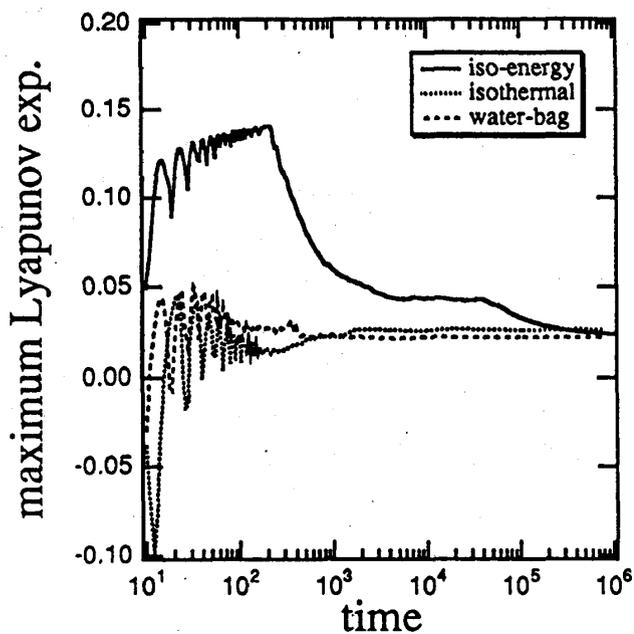


Fig.4

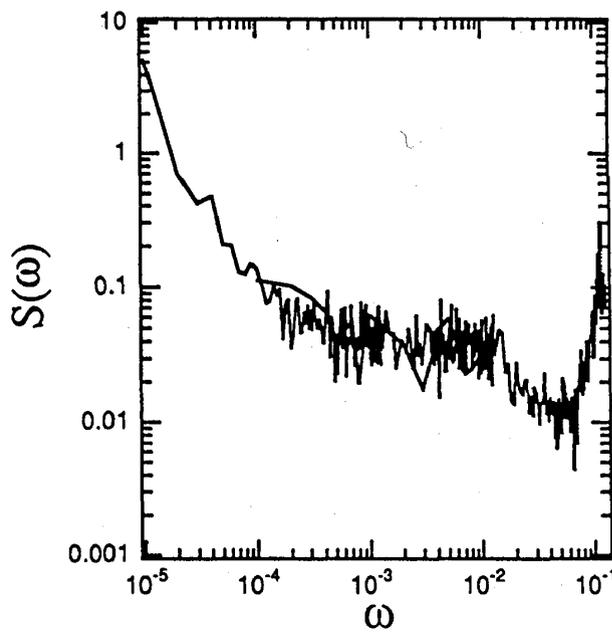


Fig.5