Stability of Modified Konishi-Kaneko System

稲垣省五 (京大理)

Abstract

Konishi-Kaneko system は離散時間の map であるが，それの連続時間版を考える．とりあえず，力学的及び熱力学的安定性を調べた．力学的安定性は collisionless Boltzmann 方程式を用いて調べた．それによって予言される不安定の成長率は，N 体シミュレーションによるものと非常によく一致する．

熱力学的議論によると，$1/T > 4\pi/kn$ でクラスター化した平衡状態が存在する．ここで，k は結合定数，T は温度，n は粒子の数密度である．クラスター化した平衡状態は，熱力学的に安定で，一様状態は $1/T > 4\pi/kn$ で不安定である．この安定条件は力学的安定性の条件と一致する．

1. はじめに

自己重力系の取扱はいくつかの点で困難である．
1) ポテンシャルと力は粒子間距離がゼロで発散する． 従って相空間はコンパクトでない．
2) 力の到達距離は無限大である． 即ち，力は無限遠まで非常に緩やかに減少する．
これらの性質は，重力系の基本的性質かも知れないが，重力系のカオス的性質を調べるには，様々な困難をもたらす． ここでは自己重力系と共通の性質を持つが，より単純な系を提案する．

Konishi and Kaneko (1992) は1次元の円 (その周の長さは1) 上に分布する N 粒子系を提案した．粒子の運動は，シンプレクティック・マップ，$(x_i, p_i) \mapsto (x_i', p_i')$:

$$p_i' = p_i + k\sum_{j\neq i}^{N} \sin[2\pi(x_j - x_i)], \qquad k > 0 \tag{1}$$

$$x_i' = x_i + p_i' \qquad (\mathrm{mod}\ 1) \tag{2}$$

で定義される．

彼等はクラスターの形成と消滅を発見した．(1), (2) 式にしたがって進化する系は，引力に支配されるので，自己重力系と共通の性質を持つかもしれない．例えば，両系とも，保存系であるにも関わらず，クラスター的秩序を持つ．ここでは，マップ (1), (2) 式で与えられる系の替わりに，通常の Hamilton の正準方程式

$$\frac{dp_i}{dt} = k\sum_{j\neq i}^{N} \sin[2\pi(x_j - x_i)] \tag{3}$$

$$\frac{dx_i}{dt} = p_i \qquad (x:\ \mathrm{mod}\ 1) \tag{4}$$

で支配される系を考えよう．(3), (4) 式は Hamitonian

$$H = \sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{1}{2}p_i^2 - \frac{k}{4\pi}\sum_{j\neq i}^{N}\cos[2\pi(x_j - x_i)]\right\}$$

より導かれる．(3), (4) 式で定義される系は，$x_i = x_j$ で特異点を持たず，システム・サイズは有限 (長さ 1) である．しかも 1 次元系である．このように (3), (4) 式で定義される系は通常の自己重力系よりもはるかに単純である．

Konishi-Kaneko 系におけるクラスターの形成は自己重力系の Jeans 不安定性に似ている．そこで，(3), (4) 式で定義される系の力学的不安定性を無衝突ボルツマン方程式で考える．

つぎに，Konishi と Kaneko (1992) によって見い出されたクラスターの消滅が熱力学的不安定性と関連しているかどうかを調べる．　熱力学的不安定性は，無衝突ボルツマン方程式では記述できない緩和過程により起こる．しかしながら，熱力学第二法則を仮定するとボルツマン方程式の衝突項を具体的に知らなくても，熱力学的安定性を論じることは可能である．

第 2 節で無衝突ボルツマン方程式が導かれ，分散関係を求める．第 3 節で熱力学的不安定性の成長率が N 体シミュレーションと比較する．第 4 節で熱力学的平衡状態を考察し，第 5 節でその安定性を論じる．

2. 無衝突ボルツマン方程式から導かれる分散関係

(3), (4) 式より直ちに無衝突ボルツマン方程式

$$\frac{\partial f(x,p,t)}{\partial t} + p\frac{\partial f(x,p,t)}{\partial x} + k\int\!\!\int \sin[2\pi(x'-x)]f(x',p',t)dx'dp'\frac{\partial f(x,p,t)}{\partial p} = 0 \qquad (5)$$

を書き下すことが出来る．空間密度が一様な状態 $f = f_0(p)$ は定常状態であることは明かである．　これに微小摂動 $f = f_0(p) + \delta f(x,p,t)$ を加える．δf に関する線形化した方程式より，分散関係

$$\epsilon(m,\omega) \equiv 1 - \frac{k}{2}(\delta_{m,1} - \delta_{m,-1})\int \frac{\frac{\partial f_0(p)}{\partial p}}{\omega - 2\pi mp}dp = 0. \qquad (6)$$

を得る．(6) 式より，$m \neq \pm 1$ に対しては collective mode がないことが分かる．分散関係 (6) 式は重力系 (例えば Lynden-Bell 1967 参照) と同じ形式をしているが，許される波数は $m = \pm 1$ のみである．これより，(1), (2) 式で定義される系で形成されるクラスターの数が 1 に限られるという事実を説明する．

定常状態の分布関数として，マックスウェル分布 $f_0(p) = n(1/2\pi T)^{1/2}\exp(-p^2/2T)$ を採る．ここで，n は粒子の数密度，T はエネルギー単位の温度である．Nyquist の安定判定条件より，不安定のための条件は，

$$\frac{n}{T} > \frac{4\pi}{k} \qquad (7)$$

であることが分かる．この条件は重力系の Jeans 安定性の条件と類似している．不安定性の成長率がいちばん大きいのは，$T = 0$ のときで，$\omega_{i,max} = \sqrt{\pi kn}$ で与えられる．

3. N 体シミュレーションとの比較

無衝突ボルツマン方程式を用いた解析が正しいかどうか調べるために (3), (4) 式の数値積分を 2 次のシンプレクティック積分法 (Kinoshita et al. 1991) を用いて行なった．初期

摂動の振幅を減らすために，quiet start (Sellwood 1983) を用いた．e^{30} もの振幅の範囲で，線形成長がみられたので，成長率は非常に精度良く決定される．N 体シミュレーションで得られた不安定生成の成長率は，無衝突ボルツマン方程式から得られたものと，3 桁以上の精度で一致した (Inagaki and Konishi 1993)．

このように modified Konishi-Kaneko system で見られるクラスターの形成は無衝突ボルツマン方程式でよく記述される．このことは，近距離で，粒子間力が小さくなり，粒子は平均場の中を動くことを意味する．

4. 熱力学的平衡状態

系は 1 粒子分布関数 $f(x,p)$ で記述され，ボルツマン・エントロピーを

$$S = -\int\int f(x,p)\ln f(x,p)dpdx \tag{8}$$

で定義する．全質量 M，全エネルギー E 一定の条件の下で，エントロピーの最大を考えよう．

与えられた拘束条件の下でのエントロピー最大のための必要条件$\delta S - \alpha\delta M - \beta\delta E = 0$ から，

$$f = A\exp\left[-\beta\left(\frac{1}{2}p^2 + \psi\right)\right] \tag{9}$$

を得る．ここで，$A = \exp(-1-\alpha)$ である．このように，熱力学的平衡状態では，マックスウェル・ボルツマン分布になることが分かる．

ポテンシャル ψ は

$$\psi(x) = B\cos(2\pi x) \tag{10}$$

と書ける (Inagaki 1993). $B = 0$ が一様状態で，$B \neq 0$ がクラスター化した平衡状態を表わす．零でない B は

$$\frac{kM}{4\pi T} > 1 \tag{11}$$

の時に可能である (Inagaki 1993)．ここで，$T = 1/\beta$ である．(11) 式は充分低温の時に，非一様な平衡状態があることを示す．条件 (11) は上述の力学的安定性の条件と一致する．

5. 安定解析

(9), (10) 式を用いると，全エネルギー E を温度 T の関数として計算することが出来る．$1/T$ の関数としての全エネルギー E は linear series と呼ばれ，熱力学的安定性を議論するのに有用である (Inagaki and Hachisu 1978). エネルギー E は $T > kM/4\pi$ で一価関数で $T \leq kM/4\pi$ で二価になる．Linear series の理論より，$T < kM/4\pi$ の一方の branch は安定で，他方は不安定である．

ここで，エントロピーを用いて，一様状態の安定性を調べよう．即ち，エントロピーが最大かどうか調べる．そのためには，できるだけエントロピーの大きい状態を調べればよい．そのような状態の速度分布は，マックスウェル分布であることがよく知られている (例えば，Antonov 1962 参照)．よって

$$f(p,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{1}{2}p^2/T\right)\rho(x) \tag{12}$$

を仮定する．即ち，密度 ρ, 圧力 $P=\rho T$ のガスを考えればよい．

条件 $\delta S-\alpha\delta M-\beta\delta E=0$ より

$$\frac{1}{T}-\beta=0 \tag{13}$$

と

$$\frac{dP}{dx}+\rho\frac{d\psi}{dx}=0 \tag{14}$$

を得る．(13) 式は平衡状態では T が一定で，(14) 式は静水圧平衡であることを示す．4 節と同様の議論により，$\rho\propto\exp(-B\cos x)$ となり，$B\neq 0$ である解は，$T>Mk/4\pi$ のとき存在する．

次に 2 次変分を考察しよう．δT と δx を変分をとる際の独立変数と考える．エネルギー一定, $\delta E=0$, の条件の下で，$\delta^2 S-\beta\delta^2 E$ の最大のための条件を考えよう．そのため，条件

$$\delta^2\Phi\equiv\int_0^1(\delta x)^2\rho dx=M \tag{15}$$

を課する．即ち，$\mathcal{F}\equiv\delta^2 S-\beta\delta^2-\mu\delta E-\lambda\delta^2\Phi$ の最大のための条件を求めよう．ここで，μ と λ はラグランジュの未定係数である．

$\mathcal{F}$ に関するオイラー・ラグランジュの方程式より，$4\pi<\beta kM$ 即ち

$$\frac{kM}{4\pi T}>1 \tag{16}$$

のとき $\lambda>0$ となり，不安定なことが分かる (Inagaki 1993)．この条件も力学的不安定のための条件, (7) 式, と一致する．

このように，力学的不安定性，クラスター状態の存在，熱力学的不安定性のための条件はすべて一致する．

参考文献

Antonov, V.A. 1962, *Vestnik Leningrad Univ.*, **7**, 135.
Inagaki, S. 1993, Prog. Theor. Phys., Kyoto., in press.
Inagaki, S. and Hachisu, I. 1978, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **30**, 39.
Inagaki, S. and Konishi, T., *Publ. Astron. Soc. Japan*, in press.
Kinoshita, H., Yoshida, H. and Nakai, H. 1991, *Celest. Mech.*, **50** 59.
Konishi, T. and Kaneko, K. 1992, *J. Phys.* , **A25**, 6283.
Lynden-Bell, D. 1967, in *Relativity and Astrophysics*, vol. 2, ed. J. Ehler, vol. 9 of *Lectures in Applied Mathematics*, (Province, Rhode Island: American Mathematical Society), p. 131.
Sellwood, J. A. 1983, *J. Comput. Phys.*, **50**, 337.