無衝突ボルツマン方程式の数値解法

藤原隆男 (京都市立芸大)

N 個の質点からなる自己重力系は, $N \to \infty$ の極限では無衝突 Boltzmann 方程式に従う. このような無衝突系の進化を追う方法には N 体法と位相空間法 (無衝突 Boltzmann 法) がある. この小文では, 後者を中心に無衝突系の数値計算法の発展について述べたい.

N 体法は融通が利くので広く使われている. しかし, 離散粒子で系を表現するため, 密度などのマクロな量には統計的ゆらぎが現れる. ゆらぎに起因する衝突の効果を軽減するために, N を十分大きくとる, 重力計算にメッシュ法や softening を用いるなどの対策がとられているが, 長時間の進化を追う計算では衝突の影響は避けられない. また, 小振幅の現象を扱う安定性の解析なども, 統計的ゆらぎのため困難である (ただし, Sellwood 1983 の quiet start というテクニックを用いれば, 線型段階でのゆらぎをかなり抑えることができる).

これに対して, 位相空間法では無衝突系をなめらかな流体 (無衝突ガス) の系として扱う. 位相空間法は, ゆらぎのない高精度の結果を与えるので, 安定性の解析にその威力を発揮する. また, 位相空間を直接扱うので, violent relaxation など位相空間の構造が問題になる現象を調べるのにも適している. 位相空間法の最大の問題は, 配位空間のほかに速度空間も扱うので, 1 次元系 (mass sheet)・球対称系・薄い円盤系などの簡単な系にしか使えないことである.

位相空間法としては water bag model 以来いくつかの方法が試みられたが, 精度よく無衝突 Boltzmann 方程式を解くのに成功したのは Cheng & Knorr (1976) の splitting scheme である. この方法では, Liouville の定理を活用して, 位相空間のグリッド (x_2, v_2) での分布函数を得るのに, その粒子が Δt 前 にいた位置 (x_1, v_1) での分布函数の値を用いる. すなわち, $f(x_2, v_2) = f(x_1, v_1)$. このとき, (x_1, v_1) は一般にグリッド上にはないので, $f(x_1, v_1)$ を得るためには数値補間が必要である. splitting scheme では, 以上の手続きを x 方向の補間と v 方向の補間の 2 段階で行う (そのため splitting scheme とよばれる). splitting scheme は, もともと電子プラズマの計算に使われたが, 重力系でも, 1 次元系 (Fujiwara 1981), 球対称系 (Fujiwara 1983), 薄い円盤系 (Inagaki et al. 1984) などに応用された。プラズマでは, 次元の関係で複雑な系には応用できないこともあって, 最近はほとんど使われないようである.

splitting scheme には, 補間を繰り返して使うため分布函数の細かい構造が均されてしまう, 系によっては数値不安定を引き起こす, などの問題があった. これを解決したのが Rasio et al. (1989) の orbit tracing である (名前は筆者が勝手につけた). 彼らは, 時刻 t における点 (x, v) での分布函数を得るのに, 位相粒子の Δt 前の位置ではなく, $t = 0$ の位置を使った. すなわち $f(x(t), v(t)) = f(x(0), v(0))$. orbit tracing では, 時間ステップごとに粒子の位置を $t = 0$ まで遡らなければならないので, 計算は系が進化するに従って遅くなる. しかし, $t = 0$ までの軌道

が正しく追跡できている限り，分布函数は任意の精度で求めることができる ($t = 0$ の分布函数はふつう式で与えられている). また，エントロピー (Boltzmann の H 関数) も他の方法のように増加せず，一定に保たれる. orbit tracing は，真に無衝突な系を記述できる，いわば究極の位相空間法である.

この方法の問題点は，計算量が多くて現在の計算機の能力では長時間の進化の追跡がむずかしいことである. 筆者と Hozumi は，最近 splitting scheme と orbit tracing を組み合わせた現実的な方法を開発した. splitting scheme で進化を追いながら，ときどき orbit tracing で分布函数をリフレッシュするという方法である. 一例を図 1 に示す. 周期境界条件の下で 1 次元 mass sheet 系の Jeans 不安定を追うという，パソコンでもできる簡単な計算である. 分布函数は位相空間では非圧縮性流体として振る舞うので，時間とともにフィラメント状の構造が発達する. 図にはフィラメントが見えているが，その幅がグリッドのスケール程度に細くなり，いわゆる aliasing (digital sampling に伴うエラー) が起こり始めている. これ以上計算を進めるためには，さらに細かいグリッドを用意しなければならない.

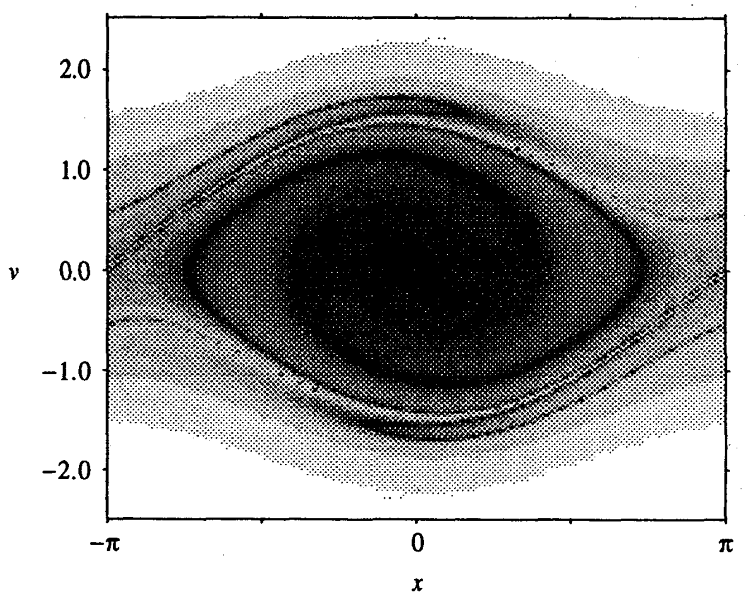

図 1. 1 次元 Jeans 不安定によって発達した，分布関数のフィラメント構造.

N 体法の中にも，限りなく無衝突に近い方法が現れた. これは，SCF (self-consistent filed) 法と呼ばれる方法で，重力の計算に函数展開を用いて統計的ゆらぎを減らすことに成功している (Hernquist & Ostriker 1992). 図 2 は，球対称の下で SCF と位相空間法の結果を比較したものである (Hozumi & Hernquist 1993, 私信). 全く異なるアプローチによる結果がほぼ完全に一致していることから，どちらも無衝突系を正しく記述していると結論できる.

位相空間法を中心に, 無衝突系の無衝突な計算へのアプローチについて述べた. 位相空間法では, グリッドよりも細かい構造は当然のことながら記述できない. フィラメントの幅が位相空間の解像度に近づくと aliasing が起こり, これはノイズとして衝突の効果を引き起こす. 限られた解像度の中でこの問題を避けるためには, CG で使われるような antialiasing (oversampling による aliasing の軽減) が必要かもしれない. 将来, 計算機の能力が伸び大量のメモリが使えるようになれば, 軸対称や3次元の問題も位相空間法で解けるようになるだろう. その前に, 球対称の範囲でも, 位相空間を直接見ることができるという利点を生かせば violent relaxation の理解に役立つこと思われる. 位相空間法の発展に期待されたい.

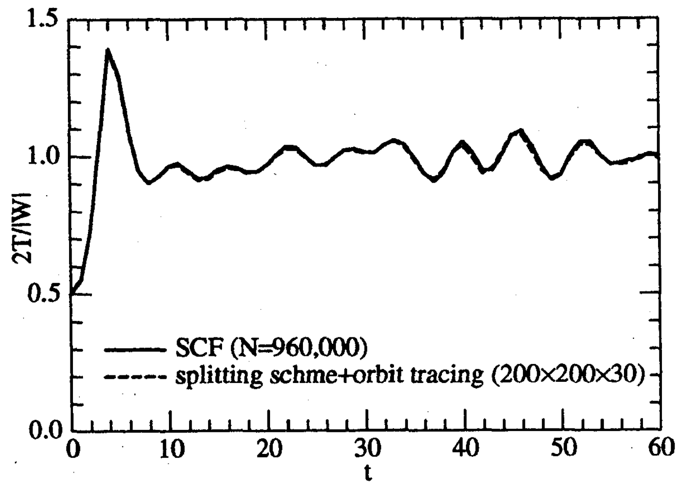

図2. 2つの異なる方法による, 一様密度球 (初期のビリアル比 0.5) の collapse でのビリアル比の時間変化.

文献

Cheng C-Z. and Knorr G. 1976, *J. Comp. Phys.*, **22**, 330.

Fujiwara T. 1981, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **33**, 531.

Fujiwara T. 1983, *Publ. Astron. Soc. Japan*, **35**, 547.

Hernquist, L. and Ostriker, J. P. 1992, *Ap. J.*, **386**, 375.

Inagaki, S., Nishida, M. T., and Sellwood, J. A. 1984, *M.N.R.A.S.*, **210**, 589.

Rasio, F. A., Shapiro, S. L., and Teukolsky, S. A. 1989, *Ap. J.*, **344**, 146.

Sellwood, J. A 1983, *J. Comp. Phys.*, **50**, 337.