物性研究　61－4（1994－1）

2次元写像のカオスの理解に向けて

帝京技術科学大学　山口喜博
国立天文台　谷川清隆

（1993年12月24日受理）

カオスの理解はコンピュータの発展によって非常に進んできた。カオスの理解を更に深めるために、今後我々は何を研究したらよいのであろうか。その答えとして、2次元写像におけるカオスを理解することを提唱したい。2次元写像においては解析的手法、数値計算による研究に加え、トポロジー的なアプローチがカオスを理解するにおいて有効であることを明らかにする。2次元写像において得られた結果をもとにカオスを議論する。

目次

はじめに
1　なぜ2次元写像のカオスを研究するのか
2　2次元写像と用語の導入
3　安定多様体と不安定多様体が接触または交差したときの構造変化
4　周期倍分岐における安定多様体と不安定多様体の構造変化
5　島融合過程における安定多様体と不安定多様体の構造変化
6　境界クライシスによるストレンジアトラクタの消滅
おわりに

はじめに

カオスの研究は、１８９９年のポアンカレの研究[1]にその端緒を見ることができる。コンピュータの発展によってここ２０年位の間にその研究は飛躍的な進歩をみた。カオスに関する多くの成果[2]は数値計算主導の研究方法で得られたと言っても良いであろう。

ここでカオスの研究を一つの山（カオス山）に譬えて見よう。カオス山の中腹から頂上付近にかけては厚い雲に覆われピークは良く見えない。最近では１つか２つのピークは見え隠れするようになってきたが、山の頂上を目指そうと中腹を登っている者にとっては非常に苦しい登りであろう。一方裾野は大きく拡がり見渡すこともできない。カオス山の山麓には多くの人達が寄り集まっているのが見える。筆者を含めたカオスの研究者にとってカオス山全体を見ることはもはやできなくなっている。こうした時には何をしたら良いのであろうか。筆者の答えは簡単である。”苦しくとも頂上を目指すこと”である。

カオスとは何か、どのようにすればカオスを理解できるのか、カオスについて何が分かったのか、そしてカオスの何が分からないのかといったカオス山の頂上に向かうための道標を示すのが本論文の目的である。この目的のために筆者は２次元写像を用いたい。１次元写像の研究でカオスの研究は大きく進んだ。我々が本論文で２次元写像を用いるのは、自然界のカオスの理解へ一歩前進するための大きなステップが２次元写像のカオスの理解であると信じているからである。

カオスの研究と対をなす研究としてアトラクタの吸引領域（ベイスン）の研究がある。両者は車の両輪のような関係にあり切り離せないが、ここではカオスの研究を前面に出すことにした。ベイスンについては近いうちに論じたい。

以下で本論文の内容を簡単に紹介しよう。先ず第１章ではカオス理解に２次元写像を用いる理由を示す。第２章では我々が扱う２次元写像の性質をまとめる。さらにここで用いる記号等について説明する。第３章から第６章までが本論文の中心部分である。ここにおける内容の多くは筆者が得た新しい結果である。第３章では安定多様体と不安定多様体が接触したとき、また交差したときの構造変化を議論する。以下の章で必要となる定理も紹介する。第４章では、カオスを理解するうえで最も基本的な周期倍分岐についての考察を行う。第５章では周期倍分岐が集積した後に現われるカオス、つまりストレンジアトラクタの島融合による

構造変化について論議する。第6章ではアトラクタが消滅する原因である境界クライシスについて得られた結果を紹介する。そして得られた結果は分岐図に現われる窓の消滅の原因である内部クライシスにも適用できる。

本論文における基本的な方法はトポロジー的である。しかしこれだけではなく解析的な手法による結果、数値計算による結果を併用しながらカオスの理解を深めていきたいと考えている。本論文がカオス山の頂上を目指す研究者の一助になれば幸いである。

本論文は過去数年間にわたって筆者が研究してきた成果に新しく得られた結果を追加し内容を再構成したものである。この間に多くの方々に議論をして戴きお世話になった。ここに氏名を記し感謝の意を表わしたい。

森肇教授（九州共立大学）、長島弘幸教授、馬場良和教授（静岡大学）、相沢洋二教授（早稲田大学）、市川文男講師、土屋玲子講師（帝京技術科学大学）。

1　なぜ2次元写像のカオスを研究するのか

″カオスとは何か″という質問にたいして、今日では次のスタンダードな答えが用意されている。

（0）カオスとは初期条件にたいして敏感な依存性をもった有界な運動。

カオスを示す例をコンピュータシミュレーション(3)で示すことができ、さらに簡単な道具によって実演をすることもできる。カオスを示す実例を見て、なるほどと納得できるかもしれない。しかし良く考えているうちに、最初の問いと、答えの間には大きなギャップがあることが分かってくる。ある程度力学の知識がある人には次のように答えることができる。

（1）カオスの軌道では、ひとつまたはそれ以上の個数のリアプノフ数が正である。

（2）カオスの運動のパワースペクトラムは広帯域の雑音成分を持つ。またその自己相関関数は急速に減衰する。

（3）カオス軌道は相空間の中で自己相似的な構造をもったストレンジアトラクタを形成する。ストレンジアトラクタは部分系に分割できない。

（4）カオスは分岐を経て出現する。

残念ながらこれらはカオスの示す現象を述べたに過ぎない。例えば（2）はカ

オスが非周期的な性質とランダムな性質を有することを表わしている。（3）はカオスが我々の常識をはるかに超えた対象であることを我々に教えてくれている。そして（4）はカオスが突然現われるのではないことを意味している。

初期値を少しずらしたとき、カオス軌道ではそのずれが指数関数的に拡大されていく。その拡大率を表わしているのがリアプノフ数である。よって（0）と（1）は本質的に同じである。カオス軌道がアトラクタ上にあるならば、それはある有限の領域の中に存在している。カオス軌道のずれが拡大されアトラクタの大きさ程度まで拡がると、それ以後の軌道を正しく予測することができなくなる。こういった意味でカオスの軌道は未来を予測できないのである。

それではなぜリアプノフ数が正の状態が分岐を経て現われるのであろうか。数値計算では確かにそうなっているが、これにたいする明確な答えを筆者は知らない。”カオス”と”リアプノフ数が正”との間に何か”かけ橋”が必要であると思うのは筆者だけではないであろう。

カオスとは何かにたいしてその本質をついた研究が最近減ってきたことを厳粛に受け止める必要がある。最近ではカオスの存在を積極的に受け入れ、それを何かに役に立てようという動きがある。これも一つの方向であると思う。カオス山の裾野を開拓することは大事ではあるが、今求められているのは雲に隠れ良く見えないカオス山頂上に向かっていく努力をすることであろうと思う。

それではカオス山頂に向かうためにはどのようなルートを辿れば良いのであろうか。我々は”2次元写像系のカオス”を理解することが最も良いルートであろうと信じている。その理由をいくつかあげてみよう。

（1）1次元写像のカオス[(4)]は非常に研究が進んでいて、残っている問題は非常に扱いにくいテーマである。また常微分方程式系で現われるカオスを理解する際に1次元写像モデル（例としてロジスティック写像）は重要な役割を果たしたがあまりにも簡単すぎる。ロジスティック写像等は逆に解けないし、相空間の中に出現するフラクタル構造を持ったアトラクタは1次元写像モデルではとうてい理解できない。

（2）3次元の相空間の中で常微分方程式によって記述される運動を理解するより、2次元平面内の写像による運動を理解するほうが格段にやさしい。3次元相空間内での運動をポアンカレ横断面法によって2次元写像を構成できる。すなわち2次元写像で分かったことは高次元の常微分方程式系の運動の理解の出発点に

なりうるのである。

（3）2次元写像は平面内での点の運動を記述しているのでトポロジー的な方法、解析的な方法で理解がしやすいという利点がある。

（4）数値計算が比較的簡単であり、パーソナルコピュータによる現象の視覚化を通しての理解がしやすい。理論的なアプローチが先行したり、数値計算によるアプローチが先行したりして研究が進められる利点がある。

（5）2次元写像には多くの未解決の問題がある。

我々は、2次元写像に現われるカオスを理解せずにカオスを分かったとは言えない時期がきていると思っている。山高ければ裾野は広く自然と裾野の開拓は進んでいくものである。我々はカオス山の頂上に向かう研究を期待している。

2　2次元写像と用語の導入

2.1　2次元写像の紹介

2次元曲面MをR^2（平面）、S^2（球面）、T^2（トーラス面）、A^2（円筒面）のいずれかとし、面M上の点の写像（微分同相写像）T_aによる運動を考えよう。ここでaはパラメタである。M上に適当に座標系(X,Y)をとって、T_aを次のように表わす。

$$T_a : X_{n+1}=F(X_n,Y_n;a), Y_{n+1}=G(X_n,Y_n;a). \qquad (2.1.1)$$

関数F,Gは座標およびパラメタに関してC^r級（$r\geq 1$）であるとする。このときよく知られているように、周期点の安定多様体、不安定多様体もC^r級である。以下では簡単のために、添字aや関数F,Gのパラメタa依存性をあからさまに書かないことにする。微分方程式の解からポアンカレ横断面法より得られる2次元写像では、(X_n,Y_n)と(X_{n+1},Y_{n+1})が1対1であり、得られた写像のヤコビ行列式の値は正である。これらのことをふまえて本論文では次のような制限をTにつける。

（A1）Tのヤコビ行列式値Jは$J=\mathrm{Det}DT>0$を満たす。すなわちTは方向保存性を有し、かつ逆写像も存在する。

（A2）パラメタについての単調性を仮定する。すなわちパラメタの増加につれて周期倍分岐、島融合過程が進行していくとする。そして最後に境界クライシスによってストレンジアトラクタが消滅する。

（A3）周期倍分岐で生じた2^n-周期点は、パラメタの増加とともにサドルになり、その後さらにパラメタを増加しても決して消滅せずにサドルとしての性質を持ち続ける。

（A4）周期倍分岐で生じた周期点の安定多様体と不安定多様体の接触（直接接触、漸近接触）から交差への変化は、パラメタに関しゼロでない速度で起こるものとする。また直接接触の場合、接触は2次関数的であるとする。

仮定(A2)-(A4)は、いずれも”単調性”に関するものである。仮定(A2)は巨視的に観測可能な現象に関する単調性を述べており、仮定(A3)と(A4)は微視的現象に関する単調性を述べている。これらは全て独立でないように思える。特に(A4)の方がより基礎的であるように思える。ただ今のところこれに関して我々は明確な答えを得ていないので、このようにしておく。次の章から具体的な問題を考えるときに、これらの条件がすべて必要であるとは限らない。よって個別の問題でどの条件が必要であるのかを明記していくことにする。

Jが場所によらず一定の写像と、場所によって変化する写像がある。本論文ではことわらない限りJに空間の依存性があっても良いとする。特にJの値によって3つのケースに分けられる。

（1）保存系　$J=1$,

（2）散逸系　$0<J<1$,

（3）拡大系　$J>1$.

（注）2次元写像にはJが負である写像も、また逆写像が存在しない写像もある。これらの研究も重要であるがここでは扱わないことにする。

2.2　用語の定義

（1）n-周期点：面M上の点uが$T^n u=u$を満たすとき、これを周期点と呼び、この式を満たす最小の正の数nをuの周期という。uをn-周期点と呼び、uも含めてuの像全体をn-サイクルと呼ぶことにする。n-サイクルの個々の点を順に$u_1, u_2, \ldots, u_n$と記す。

（2）n-シンク：安定なn-周期点。2つの固有値の実部の絶対値が1未満。保存系、拡大系では存在しない。

（3）n-サドル：n-周期点の2つの固有値λ_u、λ_sのうち一つの固有値の絶対値が1より大きく、他の固有値の絶対値が1より小さい不安定な周期点をn-サドルと呼ぶ。n-サドルは更に2つのケースに分けられる。

(a)OP1:$\lambda_u > 1 > \lambda_s > 0$.　(b)OP2:$\lambda_u < -1 < \lambda_s < 0$.

（4）$W_{s,u}{}^{n}(u_i)$:n-サドルの一つの点u_iの安定多様体(s)と不安定多様体(u)。記法を簡単にするために本論文の以下では安定多様体と不安定多様体からサドルu_iを除いた集合を$W_{s,u}{}^{n}(u_i)$として記す。$W_{s,u}{}^{n}(u_i)$はMにはめ込まれた2つの多様体である。その各々を成分と呼ぶことにする。

（5）[A]:集合Aの閉包。

（6）Γ,γ：ジョルダン曲線[5]。ジョルダン曲線Γ上の開弧は$(a,b)_\Gamma$、閉弧は$[a,b]_\Gamma$と記す。ジョルダン曲線Γで囲まれた開領域を$D(\Gamma)$と表わす。また$[D(\Gamma)]$の面積は$A(\Gamma)$で表わす。

（7）SA(m)、m-サイクルの窓：m-周期のシンクとサドルがサドル-ノード分岐で出現したとする。このときm-シンクが周期倍分岐（mx2^n）をおこした後にストレンジアトラクタSA(m)が現れる。サドル-ノード分岐から、SA(m)が内部クライシスをおこして消滅するまでのパラメタ区間をm-サイクルの窓と定義する。特に1周期が周期倍分岐をして現われるストレンジアトラクタをSA(1)と記す。

2.3　臨界値の定義

（1）$a^n(n \geq 1)$:周期倍分岐によって2^n-サイクルが現われる値。2^n-サイクルは$a^n < a < a^{n+1}$の区間で安定である。周期倍分岐の母不動点が出現する臨界値をa^0（$< a^n$）と記す。$a^* = \lim_{n\to\infty} a^n$.

（2）$a_{hom}{}^{n}(n \geq 1)$：周期倍分岐で現われ不安定化した2^n-サドルの$W_u{}^{2^n}$と$W_s{}^{2^n}$が第一ホモクリニック接触をする値。$a_{hom}{}^{0}$は周期倍分岐の母不動点の$W_u{}^{1}$と$W_s{}^{1}$が第一ホモクリニック接触をする値。

（3）$a_{ahet}{}^{m,n}(n > m \geq 0)$：$2^m$-サドルの$W_s{}^{2^m}$と$2^n$-サドルの$W_u{}^{2^n}$が第一ヘテロクリニック接触をする値。$n > m$であることを特に注意しておく。

（4）$a_{im}{}^{n+1,n}(n \geq 0)$：$2^{n+1}$個の島のストレンジアトラクタが$2^n$個の島のストレンジアトラクタへと島融合を起こす値。

（5）a_{bc}：境界クライシスが起きる値。

3　安定多様体と不安定多様体が接触または交差したときの構造変化

この章では安定多様体と不安定多様体が接触、または交差している状況を扱うので必要な条件は（A1）のみである。

3.1　安定多様体と不安定多様体の定義並びに両者の交差の定義

最初に安定多様体と不安定多様体の定義を与える。n-周期点$p\in M$における安定多様体と不安定多様体は次のように定義される。

$$W_s(p)=\{q\in M: k\to\infty \text{ のとき } T^{kn}q\to p\},$$

$$W_u(p)=\{q\in M: k\to\infty \text{ のとき } T^{-kn}q\to p\}.$$

この分かりやすい例がサドルの場合である。これについては以下の議論で利用される図に描かれているので見ていただきたい。サドルの場合、安定多様体と不安定多様体はMにはめ込まれた1次元の多様体である。次にシンクを考えてみよう。シンクの周りの近傍の点に写像を作用させると、その点列は全てシンクに漸近する。よってこの近傍を過去に写像することでシンクの安定多様体が得られる。よってシンクの安定多様体はMにはめ込まれた2次元の多様体であることが分かる。シンクに関しては不安定多様体は存在しない。一方ソースの不安定多様体はMにはめ込まれた2次元の多様体であり、安定多様体は存在しない。

次に安定多様体と不安定多様体の交差について述べよう。通常、安定多様体と不安定多様体の交差を議論するとき、両者の横断的な交差を考えている。横断的な交差とは安定多様体と不安定多様体の交差点において両者が有限の角度で交差していることを意味している。以下で必要がない場合、簡単にホモクリニック交差（点）、ヘテロクリニック交差（点）と言うことにする。

安定多様体と不安定多様体の横断的なホモクリニック交差しているとき、ホモクリニック交差点に関してポアンカレによって次の定理が証明されている。

定理3.1（Poincaré [1]）

横断的なホモクリニック交差点は、横断的なホモクリニック交差点の極限である。◆

この定理より、ホモクリニック交差が存在しているとき、安定多様体と不安定多様体の交点が想像を絶したフラクタル構造をしていることがうかがわれる。更に安定多様体と不安定多様体自身もフラクタル構造をしていることが分かる。

3.2　第一直接接触と第一漸近接触

安定多様体と不安定多様体の接触について述べよう。接触にはホモクリニック接触と、ヘテロクリニック接触の2種類がある。

まずホモクリニック接触について説明をする。ホモクリニックとは2重に漸近という意味である。n-サドル（$n\geq 2$)においては、ホモクリニック接触には2つのタイプがある。

（タイプ1）$W_u(u_i)$と$W_s(u_i)$が接触する場合。

（タイプ2）$W_u(u_i)$と$W_s(u_j)(i\neq j)$が接触をする場合。

タイプ2においては未来において漸近するサドルと、過去に向かって漸近するサドルが異なるがいずれも同じサイクルに属するのでホモクリニック接触の範疇にいれる。1-サドルについてはタイプ1しかないのは明らかである。一般の周期においていずれが起きるのか、また両方が起きるのかは写像等に依存する。

次にヘテロクリニック接触とは、$W_u(u_i)$と$W_s(v_j)(u_i\neq v_j)$間の接触である。u_iとv_jは同じサイクルに属さないサドルである。つまりすべての整数nにたいして$T^n u_i\neq v_j$であるサドルである。$W_u(u_i)$と$W_s(v_j)$のヘテロクリニック接触点または交差点を未来へ写像すると写像点はv_jに漸近し、逆に過去に写像するとu_iに漸近する。これがヘテロクリニックの名前の由来である。

ここで安定多様体と不安定多様体間の第一直接接触の定義を与える。

定義3.2　第一直接接触

安定多様体の成分と不安定多様体の成分がある点で接していて、両者の交差点は存在しない。この接触を第一直接接触という。◆

第一直接接触が生じているとき、安定多様体と不安定多様体の構造を示しているのが次の補題である。

補題3.3（Yamaguchi and Tanikawa[6,7]）

第一直接接触において、安定多様体と不安定多様体は図1aのように接している。◆

（証明）図1bのように点Pで接していれば安定多様体と不安定多様体が必ず交差していることを示せばよい。最も簡単な2つの場合を図2a,bに示してあるが、いずれにおいても不安定多様体が安定多様体と交差するのは自明である。ここで全てのケースの証明を紹介することはできない。これらについては文献（6）を見

ていただきたい。（証明終了）

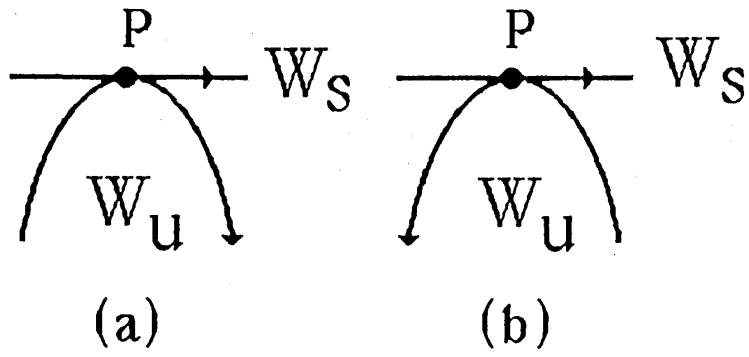

図１　安定多様体と不安定多様体の接触。第一直接接触では
(a)のように接し、(b)のようには接しない。

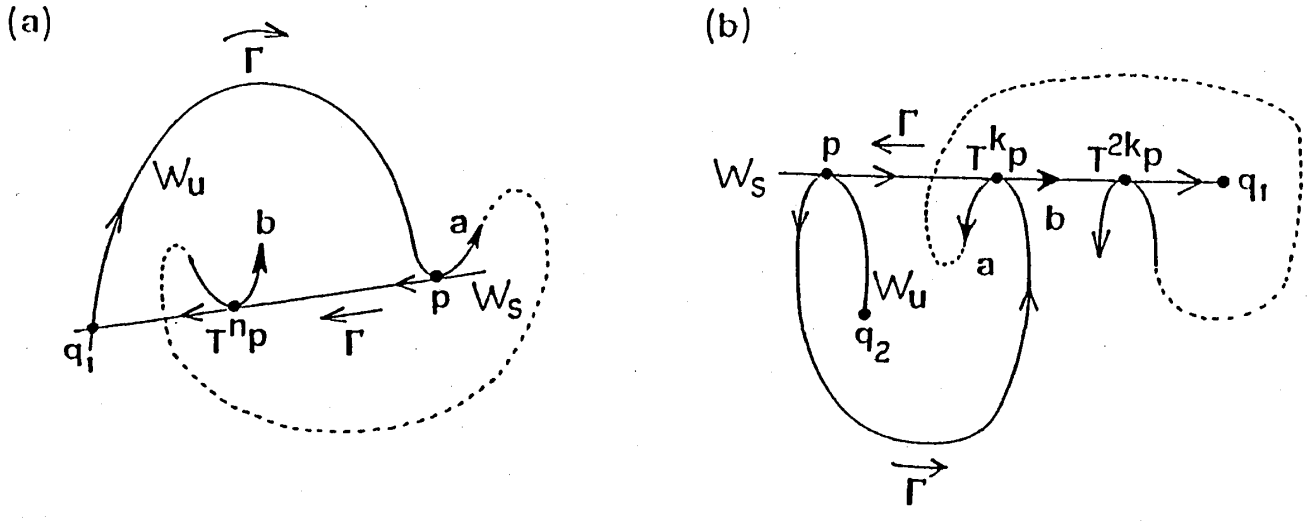

図２　(a) ホモクリニック接触,(b) ヘテロクリニック接触。q_1はn-サドル、q_2はm-サドル、kはnとmの最小公倍数。(a),(b)において、ブランチaとブランチbを結ぶジョルダン弧（点線）は必ずジョルダン曲線Γと交差する。

次に漸近接触 [6,8] の概念を紹介しよう。

定義３．４　第一漸近接触

次の３つの状況を安定多様体と不安定多様体の第一漸近接触という。

(タイプ１) $[W_u]\cap W_s\neq\emptyset$, 但し$W_u\cap W_s=W_u\cap[W_s]=\emptyset$.

(タイプ２) $W_u\cap[W_s]\neq\emptyset$, 但し$W_u\cap W_s=[W_u]\cap W_s=\emptyset$.

(タイプ３) $[W_u]\cap[W_s]\neq\emptyset$, 但し$W_u\cap W_s=W_u\cap[W_s]=[W_u]\cap W_s=\emptyset$.♦

（注）ここで重要な事は関係する安定多様体と不安定多様体が交差していないという点にある。交差している時、漸近接触は頻繁に起きる。漸近接触にもホモク

リニック漸近接触とヘテロクリニック漸近接触がある。タイプ3の漸近接触が我我によって導入された新しい概念である。

3.3 安定多様体と不安定多様体が接触または交差をしているときの性質

安定多様体と不安定多様体が交差をしているとき、それらがどのような構造をしているのかという問いに答えているのがPalisのラムダ補題[9]（λlemma）である。これは一般の次元にたいして成立する主張であるが、ここでは2次元写像にたいする定理として掲げておく。

定理3.5［ラムダ補題］（Palis[9]）

R^2のC^1微分同相写像Tのサドルuの安定多様体を$W_s(u)$、不安定多様体を$W_u(u)$とし、Dはuを含む$W_u(u)$内の任意の弧であるとする。ある不安定多様体Nが$W_s(u)$と横断的に交差しているとする。このとき任意の$\varepsilon>0$にたいして、NはDにεC^1近接な弧を含む。♦

例えば$W_u(u_i)$と$W_s(u_i)$が交差している場合、$W_u(u_i)$の任意の弧をとる。この弧に$W_u(u_i)$の別の弧列が傾きも滑らかに集積しているのである。安定多様体に関しても同じことが言える。ラムダ補題は、ホモクリニック交差をしている安定多様体と不安定多様体がフラクタル構造を持っている事を我々に教えてくれているのである。次に安定多様体と不安定多様体が第一直接ホモクリニックまたはヘテロクリニック接触をしているときにはラムダ補題に述べられている性質は成立するのだろうか。これにたいする答えは、我々によって平面R^2上の写像にたいして次のような形で与えられた。

定理3.6（Yamaguchi and Tanikawa[10]）

TをR^2のC^2微分同相写像とする。uをサドルとし、その局所安定多様体および局所不安定多様体の成分の一つをそれぞれB_s,B_uとする。$V=B_s x B_u$とする。ある不安定多様体NがB_sにV内で2次接触をしたする。このとき任意の$\varepsilon>0$にたいして、NはB_uにεC^1近接な弧を含む。♦

この定理とラムダ補題との違いを述べよう。

（1）我々の定理は、写像がC^2微分同相写像であること。

我々の定理では写像がC^2級であることを仮定した。これは不安定多様体が安定多様体に2次関数的に接するとしたためである。コンピュータで計算するときに用いる2次元写像は解析写像であるから、数値計算上ではC^1級であるかC^2級

であるかということは問題にならない。

（2）サドルを含む弧にたいしては定理3.6は適用できない。

安定多様体と不安定多様体の接点を未来に写像した時の極限はサドルである。不安定多様体はサドルに集積してはいるがC^1級の近接でない。

3.4　ヘテロクリニック接触の存在定理

第一直接ヘテロクリニック接触がどのような場合に生じるのだろうか。我々の知る範囲では、この問題は今まで議論されていなかったようである。第一直接ヘテロクリニック接触は、どのようなサドルの安定多様体と不安定多様体間でも生じると考えられていたようである。我々は、これが誤りであることを次の定理で証明した。つまり第一直接ヘテロクリニック接触は限られたサドルの安定多様体と不安定多様体間でしか起きないのである。

定理3.7（Yamaguchi and Tanikawa [7]）

TをM上でヤコビ行列式$J=\mathrm{Det}DT$が$0<J<\infty$なるC^1微分同相写像とする。uとu'（$u\neq u'$）がTの周期m,nのサドルであるとする。このとき$W_s^m(u)$と$W_u^n(u')$の間の第一直接ヘテロクリニック接触は下記の3つのケース以外では生じない。

（ケース1）uとu'の周期が等しく（$m=n$）、かつ両方がOP1またはOP2であるケース。

（ケース2）周期が$m=2n$で、uがOP1のサドルで、u'がOP2のサドルであるケース。

（ケース3）周期が$2m=n$で、uがOP2のサドルで、u'がOP1のサドルであるケース。◆

（証明）この定理の証明はジョルダンの曲線定理[4]のみを用いて証明される。場合分けが多岐にわたるので典型的な場合の証明を紹介するにとどめておく。完全な証明は参考文献（6）を見ていただきたい。

図3に示してあるように、n-サドルの$W_u^n(u_1)$とm-サドルの$W_s^m(s_1)$がPで第一直接接触しているが交差点はないとしよう。$n(m)$-サドルの軌道点の順番のつけ方は自由であるので、ここでは両者を1としてある。n、mは自然数として$m>n$であるとする。nとmの最小公倍数をkとする。T^kPで$W_u^n(u_1)$と$W_s^m(s_1)$は再度接している。これよりジョルダン曲線Γが次のように構成される。

$$\Gamma=[P,T^kP]_{W_u^n(u_1)}\cup[T^kP,P]_{W_s^m(s_1)}$$

またT^nPにおいては$W_u^n(u_1)$と$W_s^m(s_{n+1})$が接しているはずである。方向保存性（$J>0$）より図3のようにT^nPで接しているはずである。もしs_{n+1}がジョルダン曲線Γの外にあれば、すぐに$W_s^m(s_{n+1})$とΓとの交差が示せる。よってs_{n+1}がジョルダン曲線Γの中になければならないことが分かる。また$T^{k+n}P$においては$W_u^n(u_1)$と$W_s^m(s_{n+1})$が再度接することより、$W_u^n(u_1)$とΓが交差することを示せる（図の点線を見よ）。不安定多様体どうしは交差はできないことより、$W_u^n(u_1)$と$W_s^m(s_1)$が交差することが分かる。これは仮定に矛盾する。よって$W_u^n(u_1)$と$W_s^m(s_1)$（$m>n$）は第一直接ヘテロクリニック接触をしない。（証明終了）

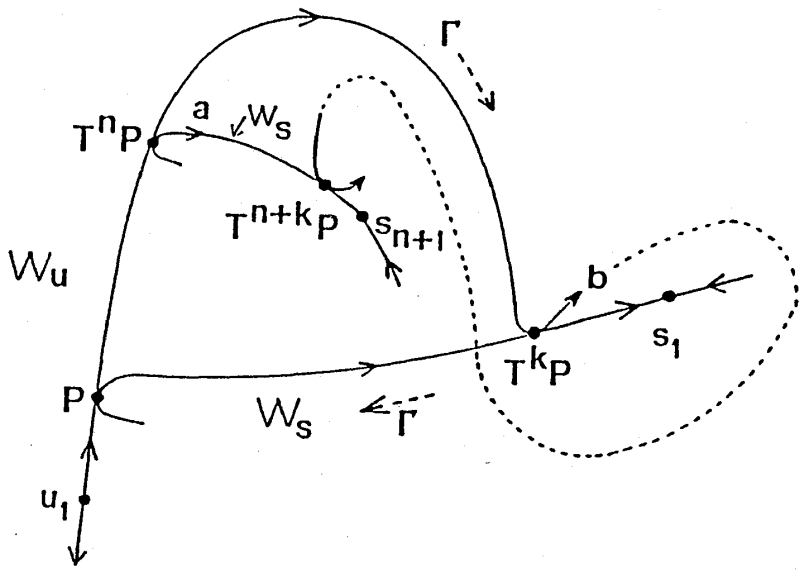

図3　T^kP　と$T^{n+k}P$　を結ぶジョルダン弧（点線）は必ずジョルダン曲線Γと交差する。

この定理において曲面を平面R^2に限り、ヤコビ行列式の値を制限すれば、更に強い次の定理が得られる。

定理3.8（Yamaguchi and Tanikawa [6,7]）

TをR^2上でヤコビ行列式$J=\mathrm{Det}DT$ ($J\geq 1$, または$1\geq J>0$)であるC^1微分同相写像とする。uとu'（$u\neq u'$）がTの周期m,nのサドルであるとする。このとき$W_s^m(u)$と$W_u^n(u')$の間の第一直接ヘテロクリニック接触は下記の3つケース以外では生じない。

（ケース1）uとu'の周期が等しく（$m=n$）、かつ両方がOP1であるケース。

（ケース2）周期が$m=2n$で、uがOP1のサドルで、u'がOP2のサドルである

ケース。

（ケース３）周期が$2m=n$で、uがOP2のサドルで、u'がOP1のサドルであるケース。◆

（証明）定理３．６のケース１のOP2の場合で安定多様体と不安定多様体の交差が生じることを示せばよい。図４にこの状況が示されている。

ジョルダン曲線Γを次のように定義し、領域$D(\Gamma)$を定義する。

$$\Gamma=[u_1,P]_{W_u(u_1)}\cup[P,s_1]_{W_s(s_1)}\cup[s_1,T^nP]_{W_s(s_1)}\cup[T^nP,u_1]_{W_u(u_1)}.$$

拡大写像（$J>1$）の場合、点をうった領域を写像T^nで繰り返し写していくと、その面積は$A(\Gamma)$を越すようになる。逆に散逸写像（$J<1$）の場合は、斜線の部分を写像T^nで繰り返し写していくと、その面積は必ず$A(\Gamma)$を越すようになる。保存系（$J=1$）の場合は写した面積を加えていくことで総和が$A(\Gamma)$を越すようになる。よっていずれの写像でも必ず不安定多様体がΓを越えて外に出ることが分かる。すなわち安定多様体と不安定多様体の交差が示され矛盾が導かれた。（証明終了）

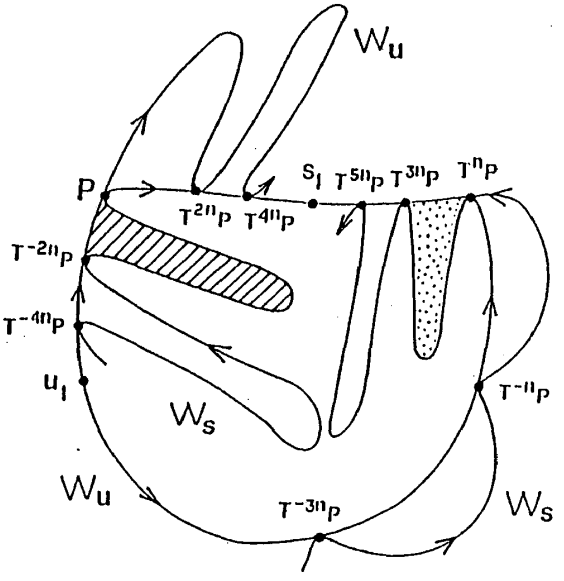

図４　面積変化を利用した証明法。

定理３．７、３．８を、周期倍分岐で現われるOP2タイプのサドル（2^n-サドル:$n\geq0$）の安定多様体$W_s^{2^n}$と不安定多様体$W_u^{2^n}$に適用して次の定理が得られる。

定理３．９（Yamaguchi and Tanikawa [11]）

$W_u^{2^m}$と$W_s^{2^n}$の間、$W_s^{2^m}$と$W_u^{2^n}$の間（$n>m\geq0$）の第一直接ヘテロクリニック接触は生じない。◆

この定理は第4章において利用される。

最後にコンパクトな曲面でヤコビ行列式の値が1の場合には最も強い定理が得られることを示そう。

定理3.10（Yamaguchi and Tanikawa [7]）

Mをコンパクトで向きづけ可能な面とする。TをM上で、ヤコビ行列値J=DetDTが1であるC^1微分同相写像とする。任意のサドルの安定多様体、不安定多様体の間の第一直接ホモクリニック接触は生じない。また任意の2つのサドルの安定多様体、不安定多様体の間の第一直接ヘテロクリニック接触も生じない。

◆

（証明）写像の面積保存性を用いて証明できる。詳細は文献（7）にある。（証明終了）

この定理が適用できる写像としては有名な標準写像がある。標準写像では第一直接ホモクリニック接触も第一直接ヘテロクリニック接触も起こりえないのである。このような状況でどのような現象が起きているのであろうか。これについては現在研究を進めているが議論は別の機会にしたい。

3.5　安定多様体と不安定多様体に関する補足

サドルが存在しているときそれに属する安定多様体、不安定多様体はパラメタの値によって特別な構造をとることが分かった。最後に素朴な次の疑問を考えてみたい。

（1）安定多様体はどこから来るのであろうか。

（2）不安定多様体はどこへ向かっていくのだろうか。

これらの疑問について考えるためにR^2のひとつのシンクuを考えてみよう。シンクの周りに小さな近傍をとる。この近傍に順次逆写像を作用させ、それらの像をすべて加えるとシンクの安定多様体、つまりベイスンが得られる。それをBをしよう。散逸系の場合、Bの広がりは有界ではありえない。なぜなら有界であるとすると、それに境界を付け加えたもの[B]も有界である。[B]は不変集合である。ところが散逸系の場合は有界な集合の面積は減少する。つまりT[B]の面積は[B]の面積より小さくなければならない。これは[B]が不変集合であることに矛盾する。したがってBは無限遠に達していなければならない。これはシンクの安定多様体が無限遠に達していることを意味する。

R^2の散逸系の場合、無限遠点はソースともみなせるから、シンクuの安定多様

体と無限遠のソースの不安定多様体が横断的に交差をしていることをがわかる。パラメタに関して連続な写像であるので、シンクが不安定化しサドルになっても無限遠の不安定多様体とシンクの安定多様体の交差という性質は残る。すなわち安定多様体の一部は無限遠に漸近しているのである。

次に不安定多様体を考えよう。シンクがあるとき、シンク側の不安定多様体の成分はシンクに向かって漸近している。一方の成分は無限遠に漸近しているとしよう。パラメタを変化して、安定多様体とシンクへ向かっていた不安定多様体が接触し交差へと進んだとしよう。この場合、不安定多様体のある点を写像した点列はシンクへと向かうが、ある点を写像した点列は無限遠に向かう。安定多様体と不安定多様体の交点を写像すると点列はサドルへと漸近する。このように不安定多様体の一つの成分内でも未来に漸近する先が異なることが分かる。上記の問題は素朴ではあるが重要な内容を含んでいるのである。

4　周期倍分岐における安定多様体と不安定多様体の構造変化

この章では周期倍分岐の過程を調べる。つまりパラメタを変化させるので条件としては(A1)-(A4)のすべてが必要である。

4.1　分岐とストレンジアトラクタの出現

現在においてカオスに到る道として次の３つがよく知られている。詳しい説明は文献（１２）を見てもらいたい。

（１）周期倍分岐を経る道

１周期点が不安定化し２周期点を生む。この分岐が次々と熊手のように進み最終的に分岐が集積し、その後でストレンジアトラクタが現われる。

（２）間欠性道

周期点が接線分岐で現われる前に周期的運動の中に間欠的なバースト運動が入りまじってくる。これが間欠性カオスである。ランダムでかつ間欠的にバースト運動が出現するのがこのカオスの特徴である。

（３）ルエール・ターケンズ・ニューハウス道

独立な準周期的振動が３つ現われると系は不安定になりストレンジアトラクタが現われる。無限個の独立な準周期的振動が現われた後にカオス的な運動が現われるというランダウによって提唱された道の修正版である。

最後の道については現在までに多くの問題点が指摘されており、最近ではこの道にたいして疑問をいだいている研究者が多くなっている。ここではルエール·ターケンズ·ニューハウス道は議論の対象としない。

次に間欠性道について考えよう。安定周期点の出現のためにストレンジアトラクタが表に出られない状況（latent chaos）がある。安定周期点が現われる近傍で周期的運動と裏で隠れていたカオス的な運動が混在しはじめたのが間欠性カオスであると言える。それでは裏に隠れていたカオス的な運動はいつ現われたのであろうか。これについては分岐図を見れば、カオス的な運動は周期倍分岐の集積後に現われていたことが分かる。これよりストレンジアトラクタの出現に関して周期倍分岐の重要性が更に増してきたと言えよう。我々は周期倍分岐がストレンジアトラクタを生じさせている母体であると考えている。ストレンジアトラクタの奇妙な構造は周期倍分岐の途中で形成されてきたと考えるのが自然であろう。次の節ではこの考えに従って周期倍分岐とストレンジアトラクタを考察する。

4.2　周期倍分岐と安定·不安定多様体の構造 (11)

まず2次元写像における周期倍分岐を説明しよう。簡単のためにヤコビ行列式値Jは$0<J<1$とし、しかも一定としよう。ここでは1-周期点から2-周期点への分岐を例として紹介するが、一般の2^n- 周期点から2^{n+1}- 周期点への分岐も同様であることを注意しておく。$a=a^0$で安定な1-周期点（母不動点）が生じたとし、$a=a^1$で1-周期点が不安定化し周期倍分岐によって安定な2-周期点が現われるとする。aがa^0からa^1を過ぎるまでに固有値は図5に表示してあるように変化する。但し　$a^0<a_{in}{}^0<a_{out}{}^0<a^1$である。ここで$a_{in}{}^0<a<a_{out}{}^0$の区間では固有値は複素数であり、互いに複素共役である。このとき写像された点は、周期点のまわりを回転しながら周期点に近づくのである。$a_{out}{}^0<a$では回転角がπであると考えられる。

次に1-周期点が不安定化した後、安定な2-周期点が現われ不安定化していく過程での1-周期の不安定多様体$W_u{}^1(Q)$の構造変化を見よう。$a^1<a<a_{in}{}^1$では$W_u{}^1(Q)$は回転せずに2-周期点へ向かう。一方2-周期点の安定多様体$W_s{}^2$は2次元の面であり、これが安定な2-周期点のベイスンである。すなわち$W_u{}^1(Q)$と$W_s{}^2$は横断的に交差しているといえる。また定理3.9からも両者が第一直接接触を経て交差することは禁止されている。つまり$W_s{}^2$が出現した瞬間から両者は横断的に交差

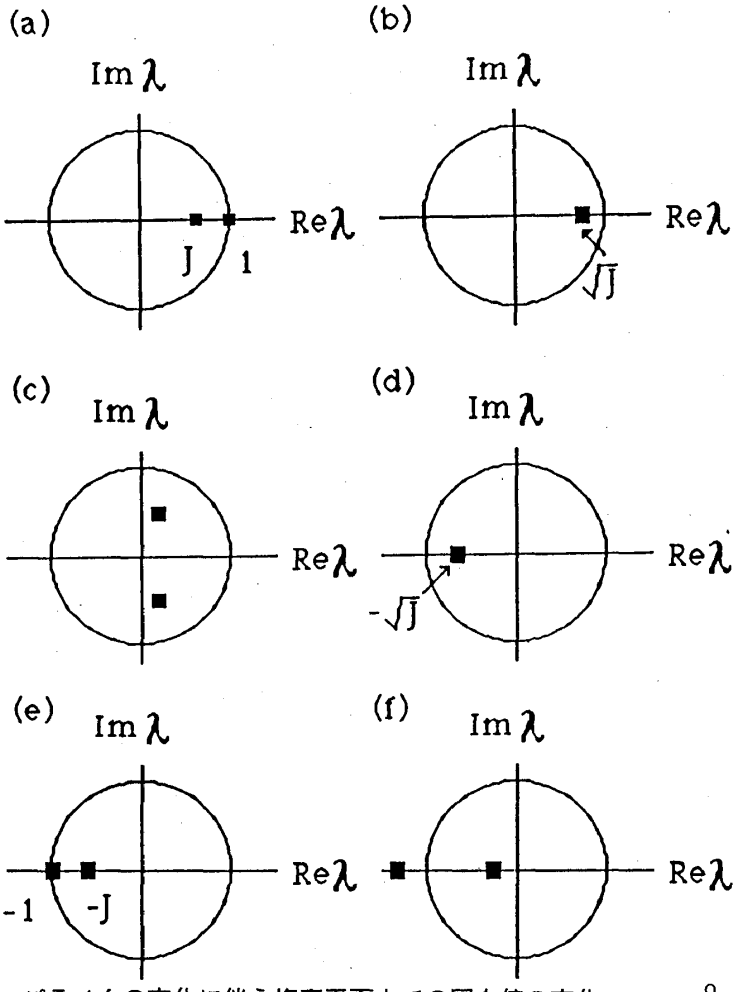

図5　パラメタの変化に伴う複素平面上での固有値の変化。(a) $a = a^{o}$, (b) $a = a_{in}^{o}$, (c) $a_{in}^{o} < a < a_{out}^{o}$, (d) $a = a_{out}^{o}$, (e) $a = a^{1}$, (f) $a > a^{1}$.

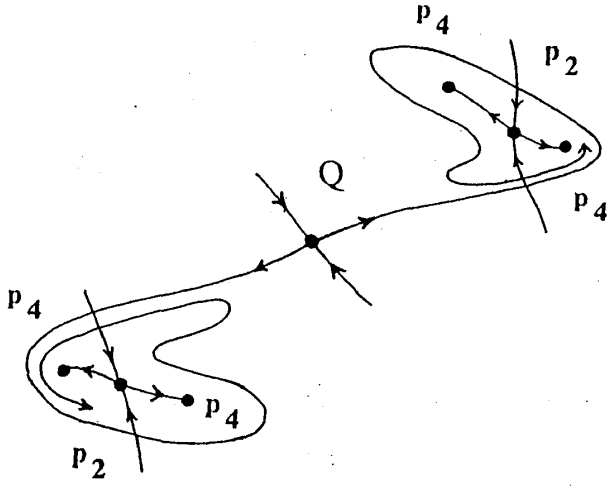

図6　周期倍分岐で現われた4周期が安定な場合の、不安定多様体$W_u^1(Q)$の構造。P_2は2周期点を、P_4は4周期点を表わす。

しているのである。 $a_{in}^{1}<a<a^{2}$ では$W_u^1(Q)$は2-周期点を回る構造を持つようになる。$a^2<a<a_{in}^{2}$では2-周期点はOP2のサドルとなっていて、$W_u^1(Q)$は2-周期点と4-周期点のまわりを回るようになる（図6を見よ）。つまり$W_u^1(Q)$とW_s^2は存在しているかぎり互いに交差していて離れることはないのである。よって以上の考察を一般の2^n-周期点の場合に拡張することができて次の定理を得ることができる。

定理4.1 （Yamaguchi-Tanikawa [11]）

$n>m\geq 0$を満たす任意の整数をm,nとする。不安定多様体$W_u^{2^m}$と安定多様体$W_s^{2^n}$は、それらが存在する限り横断的に交差している。◆

ここで不安定多様体$W_u^{2^m}$と安定多様体$W_s^{2^n}$の構造に関してコメントを記しておこう。$W_u^1(Q)$とW_s^2は交差している。よってサドルがタイプOP2であることおよびラムダ補題より、$W_u^1(Q)$はW_u^2に両側から漸近していることが分かる。また安定多様体の場合もW_s^2は$W_s^1(Q)$に両側から漸近することがいえる。安定･不安定多様体の漸近関係は集合の包含関係として次のように書くことができる。

$$[W_u^1(Q)]\supset[W_u^2],\quad [W_s^1(Q)]\subset[W_s^2]. \tag{4.2.1}$$

この包含関係を用いて周期倍分岐の途中、集積点、並びに集積点を越えたパラメタ値における安定･不安定多様体間の関係が次のように得られる。

（1）$a^{n+1}<a<a^{n+2}$

$$[W_u^1(Q)]\supset[W_u^2]\supset\cdots\supset[W_u^{2^n}]\supset 2^n\text{-シンク}. \tag{4.2.2a}$$

$$[W_s^1(Q)]\subset[W_s^2]\subset\cdots\subset[W_s^{2^n}]\subset[2^n\text{-シンクの安定多様体}]. \tag{4.2.2b}$$

（2）$a=a^*$

$$[W_u^1(Q)]\supset[W_u^2]\supset\cdots\supset[W_u^{2^n}]\supset 2^\infty\text{の準周期点}. \tag{4.2.2c}$$

$$[W_s^1(Q)]\subset[W_s^2]\subset\cdots\subset[W_s^{2^n}]\subset\cdots. \tag{4.2.2d}$$

（3）$a>a^*$

$$[W_u^1(Q)]\supset[W_u^2]\supset\cdots\supset[W_u^{2^n}]\supset\cdots. \tag{4.2.2e}$$

$$[W_s^1(Q)]\subset[W_s^2]\subset\cdots\subset[W_s^{2^n}]\subset\cdots. \tag{4.2.2f}$$

上記の関係式（例えば式(4.2.2e)）を具体例で見てみよう。2^n-サドルの不安定多様体の任意の点の近傍を見よう。2^n-サドルの不安定多様体と、それより周期の小さい全ての2^m-サドル（$0\leq m<n$）の不安定多様体がその近傍に存在している

のである。ラムダ補題より、それらすべてが$W_u^{2^n}$にC^1近接する弧を有するのである。

次に連結性についてコメントをしておこう。$a^{n+1} < a \leq a^{n+2}$において、2^n-サドル、2^{n+1}-シンク、および2^n-サドルの不安定多様体$W_u^{2^n}$は弧状連結である。ところが$a > a^{n+2}$では2^{n+1}-周期点は2^{n+1}-サドルとなり、2^n-サドル、2^{n+1}-サドル、および2^n-サドルの不安定多様体$W_u^{2^n}$は連結であるが弧状連結でなくなる。なぜなら$W_u^{2^n}(u)$の有限個の弧をつないで2^n-サドルに達することができないからである。

以上で周期倍分岐の途中及びその後における安定·不安定多様体の基本的包含関係が得られた。この包含関係自体はラムダ補題からの簡単な帰結であるが、筆者の貢献はこの関係が永続的である事を示した事にある。

5　島融合過程における安定多様体と不安定多様体の構造変化

この章では条件(A1)-(A4)のもとで議論を行う。

5.1　安定·不安定多様体のホモクリニック接触とヘテロクリニック接触

周期倍分岐が集積した後に島構造を有したストレンジアトラクタが現われる。パラメタの増加によって島融合が生じる。この島融合過程を議論するために必要な性質を次に述べよう。

補題5.1（Yamaguchi-Tanikawa [11]）

パラメタaが区間(a^{n+1}, a^{n+2})にあるとき、安定多様体$W_s^{2^m}$と不安定多様体$W_u^{2^n}$（$n > m \geq 0$）は共通点を持たない。これらが$a' > a^{n+2}$において横断的な交差点を持つとすると、あるパラメタ値$a \in [a^{n+2}, a')$において$W_u^{2^m}$と$W_s^{2^n}$は第一漸近接触を起こす。◆

（証明）区間(a^{n+1}, a^{n+2})内の任意のaの値をとる。このとき2^{n+1}-シンクが存在している。$W_s^{2^m}(q) \cap W_u^{2^n} \neq \emptyset$であるとしよう。$q$は$2^m$-周期点のひとつである。$p \in W_s^{2^m}(q) \cap W_u^{2^n}$をとる。$p \in W_s^{2^m}(q)$であるので、$p$の未来への写像点は$q$へと向かう。また$p \in W_u^{2^n}$である事と、$W_u^{2^n}$と$2^{n+1}$-シンクは弧状連結である事より、$p$の未来への写像点は$2^{n+1}$-シンクへと向かう。これらの矛盾した結果を得たこと

より、$a\in(a^{n+1},a^{n+2})$では$W_s^{2^m}(q)\cap W_u^{2^n}=\varnothing$であることが分かる。

次に$W_s^{2^m}(q)$と$W_u^{2^n}$の第一漸近接触も生じないことを示す。$a''\in(a^{n+1},a^{n+2})$で第一漸近接触が生じるならば、$a''<a<a^{n+2}$で$W_s^{2^m}(q)\cap W_u^{2^n}\neq\varnothing$である。これは仮定(A4)より矛盾である。区間$(a^{n+1},a^{n+2})$では第一直接ヘテロクリニック接触も、第一漸近接触も禁止されている。よって$W_s^{2^m}$と$W_u^{2^n}$とが、$a>a^{n+2}$において横断的な交差点を持つとするば、それらは$a\geq a^{n+2}$で第一漸近接触を経て交差点を生じさせたのである。（証明終了）

これは周期倍分岐が進んだところで存在する2^n-サドルの不安定多様体と、その前から存在する2^m-サドルの安定多様体とは交差するならば漸近接触状態を経ることを意味している。この補題では、３つの漸近接触のうちどのタイプが生じるのか明らかにしていない。これを明らかにし、ホモクリニック接触との関係を明らかにしたのが次の定理５．２である。

定理５．２（Yamaguchi-Tanikawa [11]）

m,nは$n>m\geq 0$を満たす任意の整数であるとする。$m\leq k\leq n$を満たす全てのkにたいして、安定多様体$W_s^{2^k}$と不安定多様体$W_u^{2^k}$の第一直接ホモクリニック接触は、安定多様体$W_s^{2^m}$と不安定多様体$W_u^{2^n}$の間でタイプ３の第一漸近ヘテロクリニック接触が起きる前に生じる。◆

（証明）定理５．２を式で書くと次のようになる。

$$a_{ahet}^{m,n}>\mathrm{Max}(a_{hom}^{k})(m\leq k\leq n). \tag{5.1.1}$$

以下ではこの関係を示そう。式（４．２．２a,b）より

$$[W_u^{2^m}]\supset[W_u^{2^{m+1}}]\supset\ldots\supset[W_u^{2^n}]. \tag{5.1.2a}$$

$$[W_s^{2^m}]\subset[W_s^{2^{m+1}}]\subset\ldots\subset[W_s^{2^n}]. \tag{5.1.2b}$$

である。すなわち$[W_s^{2^k}]\cap[W_u^{2^{k+1}}]\neq\varnothing$は、$[W_s^{2^k}]\cap[W_u^{2^k}]\neq\varnothing$と$[W_s^{2^{k+1}}]\cap[W_u^{2^{k+1}}]\neq\varnothing$を意味する。これより次の２つの関係式を得る。

$$a_{ahet}^{m,n}\geq\mathrm{Max}(a_{hom}^{k}、a_{hom}^{k+1})(m\leq k<n) \tag{5.1.3}$$

$$a_{ahet}^{m,n}\geq\mathrm{Max}(a_{ahet}^{k,k+1})(m\leq k<n). \tag{5.1.4}$$

最終的に以下のように３つの場合に分けて式(5.1.3)の等号を除くと、目的の式(5.1.1)を得ることができる。

(1)$a_{ahet}^{k,k+1}=a_{hom}^{k}=a_{hom}^{k+1}(m\leq k<n)$はありえない事。

まず$W_u^{2^k}(u)$と$W_s^{2^k}(u)$の第一直接ホモクリニック接触点pと、$W_u^{2^{k+1}}(u')$と$W_s^{2^{k+1}}(u')$の接触点qをとる。ここで次のように2つのジョルダン曲線を構成する。

$$\Gamma=(u,p]_{W_u^{2^k}(u)}\cup(u,p]_{W_s^{2^k}(u)},$$

$$\gamma=(u,q]_{W_u^{2^{k+1}}(u')}\cup(u,q]_{W_s^{2^{k+1}}(u')}.$$

開領域$D(\Gamma)$が$D(\gamma)$を含んでいないとすると、$W_u^{2^k}(u)$と$W_s^{2^{k+1}}(u')$が交差する事が分り、$W_u^{2^k}(u)$と$W_s^{2^k}(u)$が横断的に交差するという矛盾が導かれる。よって$D(\Gamma)\supset D(\gamma)$である。$D(\Gamma)$が$W_s^{2^k}(u)$を含んでいない事と、$D(\Gamma)\backslash D(\gamma)$が$W_u^{2^{k+1}}(u')$を含んでいない事より、$W_s^{2^{k+1}}(u')$の弧$(u',q]$と$W_s^{2^k}(u)$の弧$(u,p]$は$a=a_{ahet}^{m,n}$で第一漸近接触をする事が分かる。これと式(5.1.2b)より$W_u^{2^k}(u)$と$W_s^{2^k}(u)$が、$W_u^{2^{k+1}}(u')$と$W_s^{2^{k+1}}(u')$が横断的に交差する事が分かり矛盾が導かれた。

(2) $a_{ahet}^{k,k+1}=a_{hom}^{k}>a_{hom}^{k+1}(m\leq k<n)$はありえない事。

(1)と同じように$W_u^{2^k}(u)$と$W_s^{2^k}(u)$でジョルダン曲線Γを構成する。$D(\Gamma)$は$W_u^{2^{k+1}}(u')$を含み$W_s^{2^k}(u)$をその内部に含まない。式(5.1.2a)より$W_u^{2^k}(u)$と$W_s^{2^k}(u)$の交差が導ける。よって矛盾が示された。

(3) $a_{ahet}^{k,k+1}=a_{hom}^{k+1}>a_{hom}^{k}(m\leq k<n)$はありえない事。

(1)と同じように$W_u^{2^{k+1}}(u')$と$W_s^{2^{k+1}}(u')$でジョルダン曲線γを構成する。このとき$[D(\gamma)]$の外に$W_u^{2^{k+1}}(u')$は存在しない。よってγの中の$W_u^{2^{k+1}}(u')$と$[W_s^{2^k}(u)]$とは第一漸近接触を起こすはずである。よって式(5.1.2b)より$W_u^{2^{k+1}}(u')$と$W_s^{2^{k+1}}(u')$が交差をしていることが導ける。よって矛盾が示された。

式（5.1.1）は、第一直接ホモクリニック接触から交差へが、ヘテロクリニック接触より先に起きるために、ホモクリニック交差をしている安定多様体と不安定多様体がフラクタル構造を持つようになることを示している。そしてフラクタル構造を持った安定多様体と不安定多様体がタイプ3の第一漸近ヘテロクリニック接触をするのである。以上で定理で述べられていることが証明された。

（証明終了）

式（5.1.1）の関係を次の具体的な2次元写像を用いて確かめよう。

$$X_{n+1}=Y_n, Y_{n+1}=-aY_n+Y_n^2-JX_n. \tag{5.1.5}$$

結果は表1に載せてある。Jの値が小さいときはそれぞれの値の差が非常に小さく、式（5.1.2）の関係を確認できないが、Jの値がある程度大きくなると式（5.1.2）の関係が正しいことが読み取れる。

表1

J	a_{hom}^{0}	a_{hom}^{1}	a_{hom}^{2}	$a_{\mathrm{ahet}}^{1,0}$	$a_{\mathrm{ahet}}^{1,2}$
0.1	1.72609	1.65155	1.63507	1.72609	1.65155
0.2	1.77503	1.72062	1.70570	1.77504	1.72063
0.3	1.82483	1.79820	1.78533	1.82486	1.79821
0.4	1.87505	1.88298	1.87295	1.89795	1.88300
0.5	1.92532	1.97389	1.96778	1.98561	1.97391
0.6	1.97515	2.06999	2.06916	2.07799	2.07152
0.7	2.02394	2.17047	2.17648	2.17480	2.17821
0.8	2.07041	2.27456	2.28913	2.27704	2.28996
0.9	2.11070	2.38127	2.40648	2.38237	2.40705

次に既に導入してあるいくつかの臨界値に対する関係をまとめておこう。

主張5.3（Yamaguchi and Tanikawa [13]）

$$a_{\mathrm{ahet}}^{k,m}\le a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}、a_{\mathrm{ahet}}^{m,n}\le a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}(0\le k<m<n).\blacklozenge \tag{5.1.6}$$

（証明）$W_u^{2^m}$が$W_u^{2^n}$に両側から漸近していることから、$[W_s^{2^k}]\cap[W_u^{2^n}]\neq\varnothing$は$[W_s^{2^k}]\cap[W_u^{2^m}]\neq\varnothing$を意味し、最初の関係式が得られる。同じようにして第2式も得られる。（証明終了）

ここで$a_{\mathrm{ahet}}^{n,\infty}$を次のように定義しよう。

$$a_{\mathrm{ahet}}^{n,\infty}=\lim_{m\to\infty} a_{\mathrm{ahet}}^{n,m}. \tag{5.1.7}$$

主張5.3より、

$$a_{\mathrm{ahet}}^{n,\infty}\ge a_{\mathrm{ahet}}^{n,n+k}\quad (n\ge 0, k\ge 1), \tag{5.1.8}$$

$$a_{\mathrm{ahet}}^{m,\infty}\ge a_{\mathrm{ahet}}^{n,\infty}\ge a^*\ (n>m\ge 0) \tag{5.1.9}$$

の関係式を得ることができる。最後の関係式はa^*の定義より明らかである。$a_{\mathrm{ahet}}^{n,n+k}$（$n\ge 0, k\ge 1$）と$a^*$の大小関係は決定できない事を注意しておきたい。

単調性を仮定しているので（2.1節(A4)）、$a_{\mathrm{ahet}}^{n,n+k}$より大きな$a$の値では$W_s^{2^n}$と$W_u^{2^{n+m}}$($n\geq 0, m\geq 1$)は必ず横断的に交差をしている。このような$a$にたいして次の関係を得る。

$$[W_u^{2^n}]\subset[W_u^{2^{n+m}}]. \tag{5.1.10}$$

これと既に得られている式(4.2.2e)を一緒にする事で次の式を得る。

$$[W_u^{2^n}]=[W_u^{2^{n+1}}]=\ldots=[W_u^{2^{n+m}}]. \tag{5.1.11}$$

更に$W_s^{2^k}$と$W_u^{2^j}$($n+m\geq j>k\geq n$) は横断的に交差している事も明らかである。

ここで新しい用語を導入したい。式（5.1.11）を見ると周期が2^nのサドルの不安定多様体の閉包から周期が2^{n+m}までのサドルの不安定多様体の閉包までが等しくなっている。この状態を$(2^n,2^{n+m})$-サイクルと呼ぶことにしよう。$m\to\infty$とした場合は$(2^n,\infty)$-サイクルと呼ぶ。

式（5.1.11）において$m\to\infty$とする事で次の定理が得られる。

定理5.4（Yamaguchi and Tanikawa [13]）

$a>a_{\mathrm{ahet}}^{n,\infty}$($n\geq 0$)のパラメタ領域では次の関係が成立する。

$$[W_u^1(Q)]\supset[W_u^2]\supset\ldots\supset[W_u^{2^n}]=[W_u^{2^{n+1}}]=[W_u^{2^{n+2}}]=\ldots,$$

$$[W_s^1(Q)]\subset[W_s^2]\subset\ldots\subset[W_s^{2^n}]=[W_s^{2^{n+1}}]=[W_s^{2^{n+2}}]=\ldots.\blacklozenge$$

また次の主張も得られる。

主張5.5（Yamaguchi and Tanikawa [13]）

$a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}>a_{\mathrm{ahet}}^{k,m}$ならば、$a_{\mathrm{ahet}}^{m,n}=a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}$($0\leq k<m<n$)が成立する。

$a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}>a_{\mathrm{ahet}}^{m,n}$ならば、$a_{\mathrm{ahet}}^{k,m}=a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}$ ($0\leq k<m<n$)が成立する。◆

（証明）$a=a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}$で、仮定と$[W_s^{2^m}]\subset[W_s^{2^k}]$より、$W_u^{2^m}\cap W_s^{2^k}\neq\emptyset$が得られる。これより$[W_u^{2^k}]\supset[W_u^{2^m}]$であることが分かり、$[W_s^{2^m}]=[W_s^{2^k}]$が得られる。よって最初の関係が示された。同様にして第2の関係も得られる。(証明終了)

最後に注意を二つしておきたい。

（1）不等式$a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}>a_{\mathrm{ahet}}^{k,m}$は、$a_{\mathrm{ahet}}^{k,n}>a>a_{\mathrm{ahet}}^{k,m}$を満たす$a$において$(2^k,2^m)$-サイクルが存在していることを意味している。それゆえに$a_{\mathrm{ahet}}^{j+1,\infty}<a<a_{\mathrm{ahet}}^{j,\infty}$($j>m$)を満たす$a$においては、$(2^k,2^m)$-サイクルと$(2^{j+1},\infty)$-サイクルが共存していることになる。

（2）主張5.5の逆が正しいかどうか分かっていない。

5.2 島融合過程における不安定多様体の構造変化 (13)

周期倍分岐が集積した後にストレンジアトラクタが現われる。そしてパラメタの増加につれて島融合過程が進んでいく。このプロセスでストレンジアトラクタがどのように変化していくのだろうか。ここでは仮定等を置き、そのもとでストレンジアトラクタの構造変化について議論していく。

仮定5.6 境界クライシスが生じる前（$a<a_{bc}$）では、$U\supset TU$を満たす、ある開集合Uがとれる。そしてUは周期倍分岐の母不動点Qとその不安定多様体を含む。◆

この仮定が散逸系ではUをうまくとることによって成立することは良く知られている。(14) ここで次の集合Ωを定義しよう。

$$\Omega=\bigcap_{n\geq 0}T^{n}U \tag{5.2.1}$$

Ωは吸引集合であり、Uの中で最も大きい不変集合である。

次に不安定多様体で構成される最小集合ωを導入しよう。

$$\omega=\bigcap_{n\geq 0}[W_u^{2^n}] \tag{5.2.2}$$

これは次のような明らかな性質を持つ。

（1）ωはコンパクトで不変。

（2）$\Omega\supset\omega$。

（3）もし$\omega=[W_u^{2^n}]$ならば、ωは2^n個の成分を持つ。

もしストレンジアトラクタ（SA(1)）が存在するならば、ストレンジアトラクタは当然Ωに含まれる。ここで我々は次の予想を置く。

予想5.7 SA(1)$=\omega$.◆

この予想が正しいことを示す最初の証拠は、島融合それ自身である。aが$(a_{ahet}^{n,\infty},a_{ahet}^{n-1,\infty}]$の区間にあるとき$(2^n,\infty)$-サイクルが存在する。その結果、各$n$にたいしてパラメタ$a$が$a_{ahet}^{n-1,\infty}$を越す毎に$\omega$の成分の数が半分に減少していく。つまり島融合が生じることより、予想5.7は

$$a_{ahet}^{n,\infty}=a_{im}^{n+1,n} \tag{5.2.3}$$

を意味している。式（5.1.1）と式（5.1.8）を用いて式（5.2.3）から次の関係を得る。

$$a_{ahet}^{n,n+1}>\mathrm{Max}(a_{hom}^{n},a_{hom}^{n+1})(n\geq 0) \tag{5.2.4}$$

すなわち、2^n-サドルと2^{n+1}-サドルの各安定･不安定多様体間のホモクリニック接

触から交差へは、ωの2^{n+1}個島から2^n個島への島融合が生じる前に生じることが分かる。それゆえに、ωと$W_s^{2^n}$は$a = a_{ahet}^{n,\infty}$においてタイプ3の第一漸近接触をする。この結果ストレンジアトラクタの島融合は図7bのように突然生じ、図7aのように連続的には生じないことが分かる。これが1次元写像との違いである（1次元写像では図7aのように生じる）。式(5.1.5)を用いた数値計算の結果（図8）は、我々の予想を支持している。

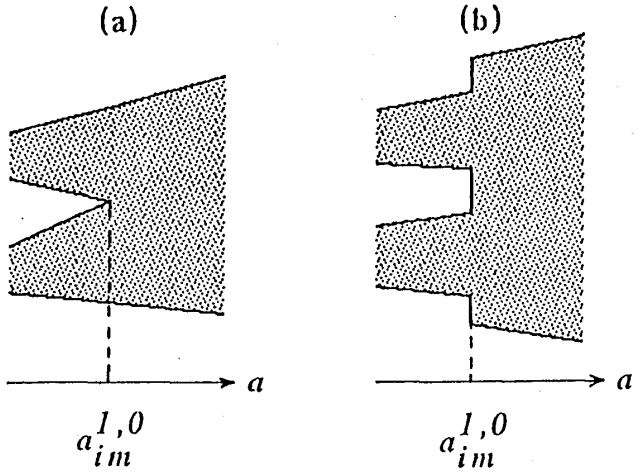

図7　(a) 1次元写像に見られる典型的な島融合の概念図。

(b) 2次元写像に見られる典型的な島融合の概念図。

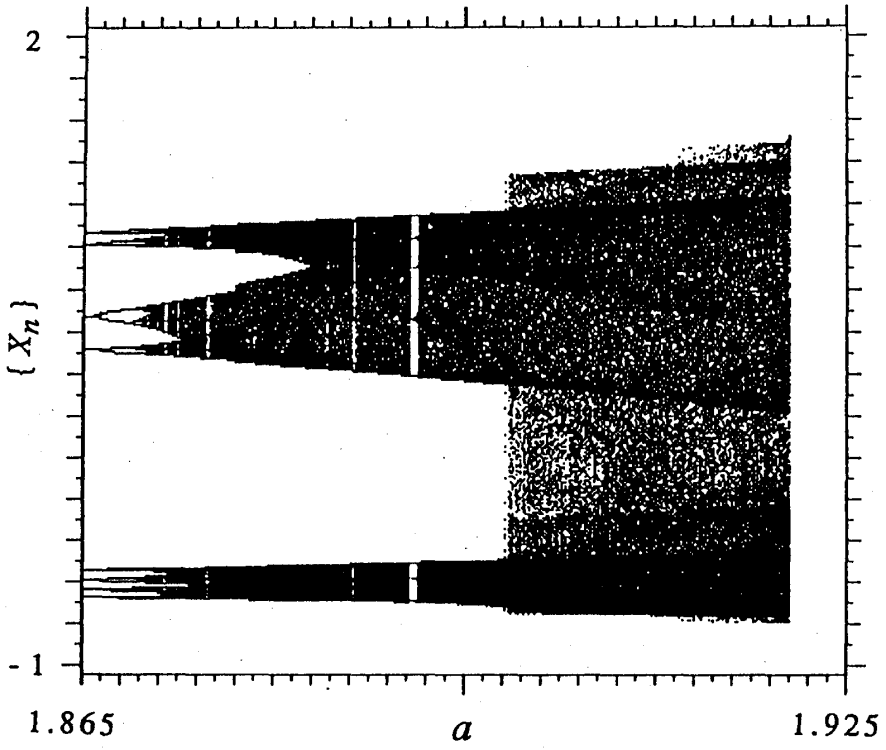

図8　式(5.1.5)の分岐図。J=0.4.

島融合過程について一つコメントをしておきたい。2^{n+1}個の島で構成されているストレンジアトラクタが、2^n個の島のストレンジアトラクタへと島融合を起こしたとしよう。次の島融合がおきるまで、ストレンジアトラクタに対して$SA(1)=[W_u^{2^n}]$の関係が成立している。島融合が起きて間もない時はもとの島に多くの写像点が集まり、島間をつなぐ領域には写像点の数が非常に少ない。次の島融合が起きる直前には全体的にほぼ一様な写像点の分布になるように見える。

島間をつなぐ領域にある$SA(1)=[W_u^{2^n}]$の一点Pを任意にとり、その周りにε-近傍$U_\varepsilon(P)$をとる。aが$a_{im}^{n+1,n}$に非常に近いときは$U_\varepsilon(P)$の中に写像点がはいるまでに非常に長い時間がかかる。しかし$SA(1)=[W_u^{2^n}]$が意味することは、この関係が成立している限り、待てば必ず写像点がはいってくるのである。$SA(1)=[W_u^{2^n}]$が成立していることと、統計的な性質とは別であることを注意しておきたい。

１９９１年に、BenedicksとCarleson [15] は、非常に小さいヤコビ行列式をもつヘノン（Hénon）写像においてストレンジアトラクタが存在するパラメタがたくさんあることを証明した。そのようなパラメタにおいて、$[W_u^1]$がストレンジアトラクタであることが証明されたのである。これは２次元写像において現われる自明でないカオスにたいして、初めて理論的にそれがストレンジアトラクタであること示した最初の例である。よってここで定理を紹介して５章を終える。

定理５．８（Benedicks and Carleson [15]）

Hénon写像（$X_{n+1}=1-Y_n-aX_n^2, Y_{n+1}=bX_n$）で、$a$を正の数、$b$は十分小さい正の数とする。$P$を$X,Y>0$にある双曲型不動点、$P$の大域的不安定多様体$W_u(P)$を

$W_u(P)=\{ X\in R^2 \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(X),P)\}=0 \}$（$d(p,q)$は$p$と$q$の間の距離を示す）

のように定義する。$0<c<\log 2$にたいして次のような$b_0=b_0(c)$が存在する。任意の$0<b<b_0$にたいしてRでのルベーグ測度が正であるパラメタaの集合$E(b)$あって$a\in E(b)$にたいして、上で定義した不安定多様体の閉包$[W_u(P)]$はアトラクタとなる。すなわち、

（１）開集合$U=U(a,b)$があって$X\in U$ならば$\lim_{n\to\infty} d(f^n(X),[W_u(P)])=0$となる。

（２）$X_0=X_0(a,b)\in W_u(P)$が存在してX_0の軌道は$W_u(P)$で稠密である。

（３）X_0のリアプノフ数の一つは正である。◆

6　境界クライシスによるストレンジアトラクタの消滅

ここでは条件（A１）、（A２）が必要である。境界クライシスを議論するために更に必要な条件を次に示しておく。

（A５）２つの不動点QとOが存在する。パラメタaを増加すると母不動点Qが不安定化してOP2のサドルとなり周期倍分岐が始まる。そして周期倍分岐は集積する。一方の不動点Oは存在している限りOP1のサドルであり続ける。

（A６）母不動点Qと不動点Oの安定多様体、不安定多様体の配置が図９のようになっていること。

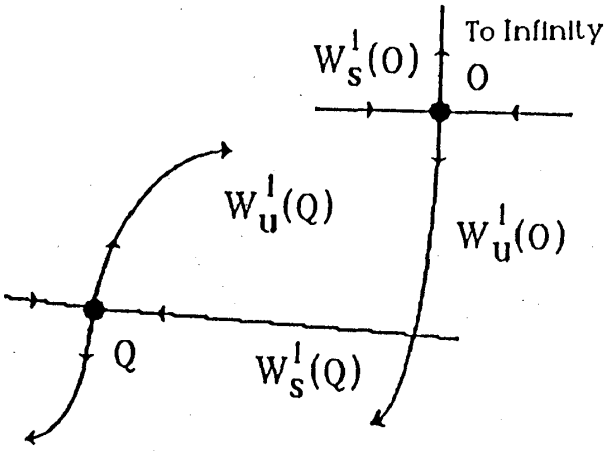

図９

QとOの安定多様体と不安定多様体の配置。

６．１ 境界クライシス

まず２つのパラメタを持っている次の２次元写像の示す境界クライシスを調べることにしよう（式（５．１５）と同じ）。

$$X_{n+1}=Y_n, Y_{n+1}=-aY_n+Y_n^2-JX_n. \tag{6.1.1}$$

この写像には次のようなQ,Oがあることが分かる。

$$Q(0,0),\ O(a+J+1, a+J+1). \tag{6.1.2}$$

また(A６)も満たされていることは、安定多様体、不安定多様体の図を実際に書いて見ることによって確認できる。（A６）を条件としてあるが、具体的な写像では、Oの一つの不安定多様体のブランチがQの安定多様体のブランチと交差していることは明らかなことである。これは示すことができる。しかしOの残りの不安定多様体が無限遠にいっていることは数値計算の結果より明らかであるが、理論的には証明できないのである。

この写像が境界クライシスを示すことは分岐図を作成すれば明らかである。次

に境界クライシスについての理論的な考察を先に行い、それが正しいことを上記の写像を用いて数値的に示そう。

6.2 境界クライシスの原因

まず定理2.1または2.2より、$W_u^1(Q)$と$W_s^1(O)$の間の第一直接ヘテロクリニック接触は禁止されている。$a \in (a^1, a^2)$のパラメタ区間では$W_u^1(Q)$は2-シンクへと向かい、$W_u^1(Q)$と$W_s^1(O)$は交差していない。定理5.2を証明した同じ方法で次の関係を導くことができる。

$$a_{ahet}(Q\text{-}O) > \mathrm{Max}\{a_{hom}^1, a_{hom}^1(O)\} \tag{6.1.3}$$

ここで$a_{hom}^1(O)$は$W_u^1(O)$と$W_s^1(O)$が第一直接ホモクリニック接触をする臨界値であり、$a_{ahet}(Q\text{-}O)$は$W_u^1(Q)$と$W_s^1(O)$が第一漸近ヘテロクリニック接触をする臨界値である。この関係は$W_u^1(Q)$と$W_s^1(O)$がタイプ3の第一漸近接触をする事を保証している。これは次のように拡張できる。

主張6.1 (Yamaguchi and Tanikawa[13])

$W_u^{2^n}$と$W_s^1(O)$の横断的な交差は、両者の間のタイプ3の第一漸近接触を経て出現する。◆

ストレンジアトラクタ$[W_u^{2^n}]$の消滅は、$W_u^{2^n}$と$W_s^1(O)$が横断的な交差をしたときに起きる。なぜならば$W_u^{2^n}$のある点から出発した軌道は無限遠に発散するか、他のアトラクタへと向かうからである。これより次の定理6.2を得る。

定理6.2 (Yamaguchi and Tanikawa[13])

境界クライシスはストレンジアトラクタ($[W_u^{2^n}]$)と$W_s^1(O)$のタイプ3の第一漸近接触によって生じる。◆

この定理は次のように式で書くことができる。

(1) 1つの島のストレンジアトラクタが境界クライシスを起こすときは

$$a_{bc} = a_{ahet}(Q\text{-}O) > a_{ahet}^{n-1,n} \quad (n \geq 1) \tag{6.1.4}$$

が成立する。

(2) 2^n個島のストレンジアトラクタが境界クライシスを起こすときは

$$a_{bc} = a_{ahet}^{n-1,n}(n \geq 1) > a_{ahet}(Q\text{-}O) \tag{6.1.5}$$

が成立する。

これらの結果はGrebogi-Ott-Yorke[16]によって述べられていたクライシスにたいする解釈を補い更に正確に述べたものである。

6.3　数値計算の結果

最初に境界クライシスが生じる臨界値を、ヤコビ行列式を変えて求めた結果を紹介しよう。図１０は式（6.1.1）を用いて計算した結果である。Jの値が小さいときは１つの島まで島融合が進んでから境界クライシスが起きる。例えばJ=0.5とした場合は１つの島まで島融合が進まず２つ島の状態で境界クライシスが起きる。数値計算では、$a_{ahet}(Q\text{-}O)$=1.95676、$a_{ahet}^{0,1}$=1.98561と得られ、関係式（6.1.5）が正しいことが分かる。

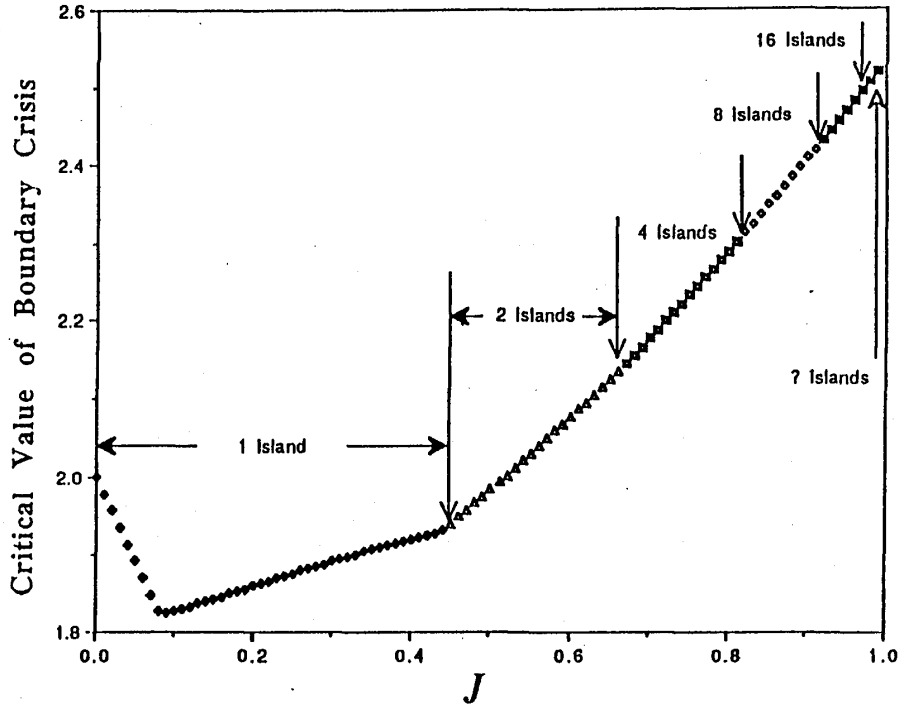

図１０　式(6.1.1)を用いて得られた境界クライシスの生じる臨界値。2 islandsは、２つの島まで島融合が進んだ後に境界クライシスが生じることを意味する。

ここで図１０の特徴的な性質をまとめてみよう。

（１）臨界値a_{bc}はJの増加につれて減少するが、Jが0.08を越したあたりからは増加し始める。最初の減少は関係している安定･不安定多様体が、図１１に示されいるように膨らんだフラクタル構造を持つためであると考えられる。この図で注意しておきたいのは漸近の仕方である。$W_s^1(O)$と$W_u^1(O)$については、自分自身の

ブランチに片側から漸近しているが、$W_s^1(Q)$と$W_u^1(Q)$は自分自身のブランチに両側から漸近している。

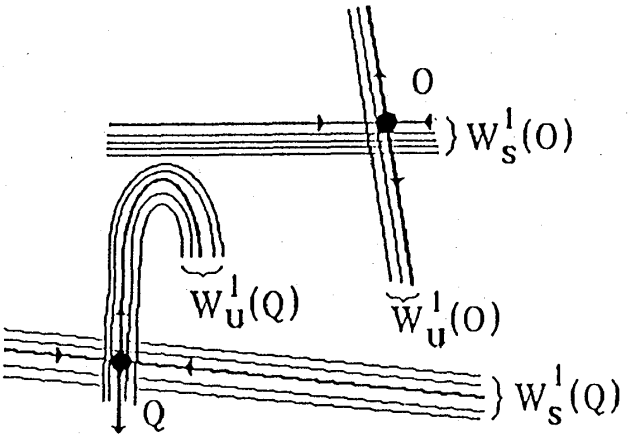

図１１　安定多様体と不安定多様体のフラクタル構造を示す概念図。

（２）$J=0.3, a\in(1.7,2)$付近の詳細な分岐構造を図１２に示してある。周期倍分岐はa^*の線の下方で観測される。a_{hom}^{0}と$a_{ahet}^{0,1}$はJが小さいときはその差は非常に小さい。a_{bc}の線より上ではアトラクタは存在しない。この図ではa_{bc}は２つのブランチで構成されている。これは境界クライシスを起こす役割が入れ替わっていることを示している（式（６.１.４）、（６.１.５）を見よ）。

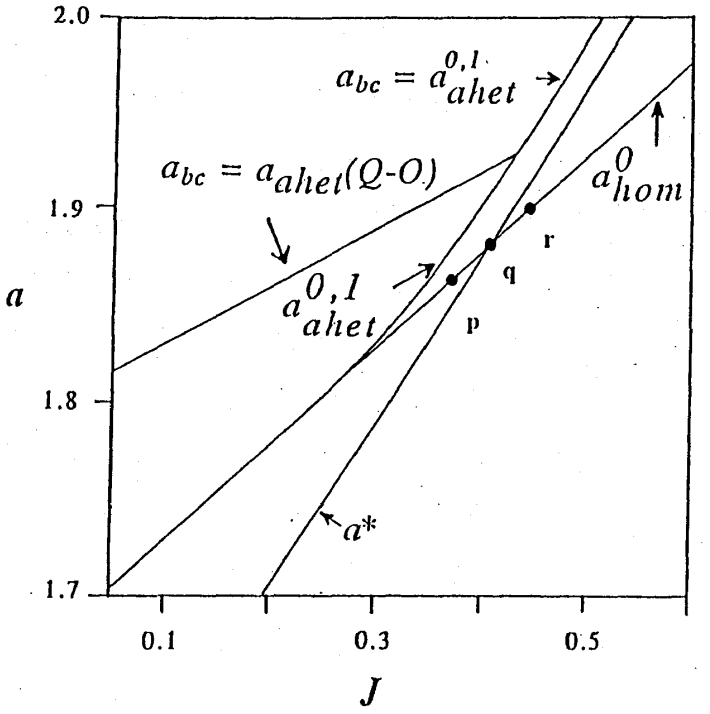

図１２　図１０の拡大図。いくつかの臨界値の関係をも示す。

（3）$a_{hom}{}^{0}$の線に沿ったそれぞれのパラメタにおいて、2つのジョルダン曲線

$$\Gamma_1=[Q,P]_{W_u{}^1}\cup[Q,P]_{W_s{}^1},\quad \Gamma_2=[Q,TP]_{W_u{}^1}\cup[Q,TP]_{W_s{}^1}$$

で囲まれた領域Uを定義しよう。これらはQで接続されている。ここでPは$W_s{}^1(Q)$と$W_u{}^1(Q)$の間の第一直接ホモクリニック接触点の一つである。図12のpでは、SA（1）はUの中に存在する。qでは準周期点が、rでは2^n-サイクルがUの中に存在する。これはコンパクトな集合Uの存在が、第一直接ホモクリニック接触の状況では明らかであることを意味している。

（4）Jの値が0.08あたりで折れ曲がっているように見えるが、更に詳細な計算をすると滑らかにつながっていることが分かる。Jが1に近いときは島の数を判別することは困難である。

最後に境界クライシスにたいして得られた定理を、内部クライシスの場合に適用すると次の定理が得られる。

定理6.3（Yamaguchi and Tanikawa[13]）

内部クライシスは、n-サイクルの窓に現われたストレンジアトラクタと、サドル-ノード分岐で現われたサドルO_i)($i=1,..n$)の安定多様体$W_s{}^n(O_i)$とのタイプ3の第一漸近接触によって生じる。♦

以上でクライシスに関する議論を終える。

おわりに

最後に安定多様体、不安定多様体に関しての疑問、並びに2次元写像一般に関する疑問に対してコメントをしておきたい。

（問1） 2次元の面内で安定多様体、不安定多様体のメジャーはゼロである。よって2次元写像の性質にこれらが影響を与えるのだろうか。

（回答1） 先ず最初に1次元写像の場合を考えてみよう。この場合、写像関数は与えられている。よって、どのような性質をもった周期点がどこにあるのかが系の性質の大半を決めているのである。例えば、サドルの性質を持った周期点の位置がストレンジアトラクタの大きさを決定している。これは1次元の対象物は点で区切ることができるという基本的な性質による結果である。1次元写像の場

合、次元の一つ小さい周期点の存在が重要であることが分かった。このことより2次元写像の場合では、次元の一つ小さい対象である1次元の安定多様体、不安定多様体で重要であることが分かる。すなわち2次元面を安定多様体、不安定多様体で区切ることができるのである。よって系の大域的な構造を知るためにはどうしても周期点の存在と、その安定多様体と不安定多様体の構造を知ることが不可欠なのである。

（問2）安定多様体、不安定多様体はどのような物理的対象と関係しているのか。

（回答2）有界な不安定多様体はアトラクタと関係している。一方、安定多様体はベイスン境界である。アトラクタが存在しているとき不安定多様体はアトラクタに漸近している。そのアトラクタに漸近していく軌道を与える初期点の集合をベイスンという。複数個のアトラクタ（無限遠もひとつのアトラクタとして扱う）が存在しているとき、それらのベイスンを分けているのが安定多様体である。よって安定多様体、不安定多様体の構造を知ることによって、これらの性質が明らかになるのである。

（問3）安定多様体、不安定多様体を解析的に得ることはできるのだろうか。またこれらの構造をコンピュータで計算し図として描くことはできるのだろうか。

（回答3）周期の小さいサドルの近傍においては摂動計算で非常に正確にその関数形を得ることができる。文献（17）に詳しい議論があるので参照していただきたい。摂動法では大域的な表示を得ることは不可能であることを注意しておきたい。

数値計算では簡単に安定多様体、不安定多様体を描くことができる。不安定多様体を描くためには、サドル近傍における不安定多様体の関数形を写像Tで未来へ写していけばよい。安定多様体については逆にT^{1}で過去に写してやればよい。基本的にはこれでよいのであるが精度の高い図を得るためには工夫が必要である。これについては文献（18）を参考にしていただきたい。

（問4）現在非常に良く研究されている1/fノイズ、ストレンジアトラクタの相似構造と不安定多様体の構造はどのような関係があるのだろうか。

（回答4）1/fノイズの原因は、2次元写像による点の運動が非常に長時間の相関を有していることにある。ある点の近傍またはある領域に写像点が停留してなかなかその領域から出られない現象が長時間の相関を引き起こしているのであ

る。写像の点の運動は不安定多様体の近傍に沿って起きていると考えられる。つまり不安定多様体の構造や、ある領域における不安定多様体のつまりかたが点の運動に影響を与えていると考えてよい。しかし1/*f*ノイズが不安定多様体のどのような構造と関係しているのかは現在のところ不明である。これについては今後の研究を待たなければならない。

ストレンジアトラクタの相似構造等は不安定多様体の相似構造に由来することは明らかである。ストレンジアトラクタが濃淡を有するのは固有値の違った様々なサドルの存在にその原因を見い出すことができる。つまり固有値の絶対値が1に近いサドルの近傍に点が来たときは、この領域に長い時間留まる。すなわち濃い領域と薄い領域が相平面内に現われるのである。ストレンジアトラクタがマルチフラクタル次元をもつ原因はこの濃淡にある。これを扱うためには周期点の分布、そして不安定多様体の構造を解明していく必要がある。

（問５） １次元写像におけるシャルコフスキーの定理に相当する定理が２次元写像においてあるのだろうか。

（回答５） 現在筆者が知っている限り、散逸系ではシャルコフスキーの定理に相当する定理はありません。現在、周期点の現われ方、共存については多くの問題があります。

（問６） 漸近接触を具体的な写像で確認することができますか。

（回答６） 回答（３）で示した計算方法で安定多様体、不安定多様体を描くことができ、これによって漸近接触を見ることが可能です。

参考文献

1 H.Poincaré, Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste t.3. Gauthier-Villars, Paris,1899、ポアンカレ(福原満州雄、浦太郎訳)：常微分方程式-天体力学の新しい方法、共立出版、1970.

2 レビューとして代表的な次の２つを見ていただきたい。

J.-P.Eckmann and D.Ruelle, Ergodic theory of chaos and strange attractor, *Reviews of Modern Physics* Vol.57,pp.617-656(1985).

斎藤信彦、カオスの物理、物理学の最前線３０、共立出版、1993.

3 下條隆嗣、カオス力学入門、近代科学社、1992.

4 長島弘幸、馬場良和、カオス入門、倍風館、1992.

P.Collet and J.-P.Eckmann, *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems,* Birkhauser, Basel, 1980.

L.S.Block and W.A.Coppel, *Dynamics in One Dimension,*

Lecture Notes in Mathematics 1513, Springer-Verlag, 1992.

5 K.Kodaira, *Introduction to Complex Analysis,* Cambridge University Press,1984.

6 Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, A theorem on the first heteroclinic tangency in two-dimensional maps:orientation-preserving cases, *Journal of Statistical Physics* Vol.59,pp.1297-1310(1990). New type of heteroclinic tangency in two-dimensional maps, *Journal of Statistical Physics* Vol.64,pp.741-754(1991).

7 Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, The first direct heteroclinic tangency theorem in two-dimensional maps, *Chaos, Solitons & Fractals* Vol.3, pp.395-404(1993).

8 Mañé, On the creation of homoclinic points, *Publ. Math. IHES* Vol.66,pp.139-159(1987).

9 J.Palis,On Morse-Smale dynamical systems, Topology Vol.8,385-405(1969). J.Palis and W.de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Springer, New Yorke(1982).

10 Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, On the first tangency of stable and unstable manifolds in C^r planar diffeomorphisms, *Journal of Mathematical Physics.* Vol.33, pp.560-569(1992).

11 Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, Structure change of stable and unstable manifolds in two-dimensional maps:period-doubling bifurcation, *Chaos, Solitons & Fractals* Vol.2,No.2,pp.139-146 (1992).

12 H.G.Schuster, *Deterministic Chaos,* VCH Verlagsgessellschaft mbH,1989.

13 Y.Yamaguchi and K.Tanikawa, Structure change of stable and unstable manifolds in two-dimensional maps II:island-merging and boundary crisis, *Chaos, Solitons & Fractals* Vol.3,No.2,pp.193-202 (1993).

14 M.Hénon, A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Communication of Mathematical Physics,* Vol.50,pp.69-77(1976).

15 M.Benedicks and L.Carleson, The dynamics of the Hénon map, *Annals of*

Mathematics, Vol.133,pp.73-169 (1991).

16 C.Grebogi, E.Ott and J.A.Yorke, Crises,sudden changes in chaotic attractor, and transient chaos, *Physica* Vol.7D ,pp.181-200(1983). Basin boundary metamorphoses:changes in accessible boundary orbits, *Physica* Vol.24D,pp.243-262(1987).

17 宇敷重広、Analytic expressions of unstable manifold、力学系理論と関係諸分野の総合的研究（昭和５４年度記録集　文部省科学研究費補助金　総合研究B 課題番号430602）pp.145-166. １９８０年２月.

18 Z.You,E.J.Kostelich and J.A.Yorke, Calculating stable and unstable manifolds, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol.1,pp.605-623(1991).

山口喜博
市原市潤井戸字大谷２２８９－２３
帝京技術科学大学情報システム学科

谷川清隆
三鷹市大沢２－２１－１
国立天文台理論系