

## 式部マップ II: Information Flow の再検討

梅野 健 東大理

今から約十年程前、一昔のようにカオス研究が盛んになる少し前に、“カオスは(生きている脳などの)情報処理過程と見なした時、何か積極的な役割を果たしているか?” というテーマ[5]を掲げた研究がすい星の如く登場し[1,2], すい星の如く消えていったことがあった。そこでの論の展開は次の2つのポイントからなっている。

(i) 決定論的なカオスの持つ不確定性が情報理論での情報源 (information source) [4] の役割を持ち、そのダイナミクスの時間発展の様子は、元の力学変数の時間発展(通常我々はこれを見てダイナミクスの様子を調べている)とは別の、ダイナミクスを情報源と見なした時のその情報源から出る情報量の流れ(これを Information Flow と呼ぶ)によってシステムを特徴づけることができる。

(ii) 力学系がカオスの時には、Information Flow はミクロ ( $t=0$ での初期値についてのもの) からマクロ (相空間上に生成される  $t = \infty$ での 極限集合もしくは不変集合のパターンについてのもの) へと流れる。(例えば文献 [1] では対流と乱流の違いを Information Flow の向きの違い(対流では macro から micro, 乱流では micro から macro)によって説明している。又文献 [2] では、脳内の分子レベルのミクロな構造 ( $10^{-10}m$ ) から、マクロなネットワークに現れる 構造 ( $10^0m$ ) への脳力学の Information Flow を論じている。) この階層的構造を持つという意味で、力学系カオスの持つ不確定さは熱的揺らぎによるもの違う。脳は非線形素子が多数カップルした系で本質的にカオスである。脳を一つの力学系とみた場合、その知的振る舞いはその脳力学の生成する Information Flow によって捉えられるのではないか?

(i) は本質的には決定論的カオスを情報理論の言葉で言い替えたものに過ぎない。が、この時点でカオスはその起源が何であるかによらない(つまり力学変数からの解放と言ってよい)ものとなっていることに注意。

(ii) には明らかに論理の飛躍があるが、捨て難い魅力がある。ここでの(筆者の)立場は、(ii)をもう一度考え直してみるというもので、つまりその飛躍があるのを認めた上で(ii)をもう少し数学的議論にのりやすいパターン認識の情報処理過程という枠組みの中で、Information Flow の果たす役割を見ていくというもの

であり [6], 本研究会報告では Information Flow 最大化 原理という仮説を提案し, それがある理想的なパターン認識系で成り立っていることを示す.

尚, (ii) を調べるには, 例えば 生体内での情報処理過程でカオスがおきているということを検証する(この点に関しては Freeman のグループが, 兎の覚で匂いの記憶の想起過程で EEG(電気信号) がカオスになるという, もはや古典になりつつある有名な実験がある[3]) ことも重要であるが, ここでは問題としない

### ”Information Flow 最大化原理”(1993)[7]

与えられたパターン  $S$  をパターン認識する (有限の数からなるカテゴリー (ターゲットパターン  $S_T$  の候補と考えて良い) から 1 つのカテゴリーを選択する) マシン  $M$  を考える. この時  $M$  のパターン認識する過程を力学系と考え, (もちろんこの場合 iteration の数は有限でもよい) その時生じる Information Flow,  $IF(S, M)$  を測る. その時次のことが成り立つ.

Information Flow  $IF(S, M)$  を最大にするマシン  $M$  が  $S$  をパターン認識する ( $S$  を  $S_T$  ( $S_T$  は  $M$  を決めた時自動的に決まる) にカテゴライズする) 最良のマシンである.

モデルとして定義域  $I = [0, 1]$  上で定義されたコントロール集合を認識するマシンを考える. 図 1 は, 極限集合であるコントロール集合  $\Lambda_\infty$  がその階層性から  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots$  の様なレベル付けが自然とでき, その  $\Lambda_\infty$  を不変集合とするテントマップ  $T$  を考えると次の様な同値関係

$$x \in \Lambda_N \iff T^N(x) \in I \quad (1)$$

が成り立つので, パターン認識するマシンをテントマップ  $T$  と考えることができる. そして与えるパターンを両端を  $I$  の両端  $0, 1$  に固定した全部のコントロール集合を考えることにする. その各々のコントロール集合は, テントマップの頂点を  $u, v$  とするとき, それを  $[0, 1] \times [1, \infty]$  上に動かすことによってその不変集合で実現できる 図 2 は与えられたパターンをコントロールがいちばん最初に考えた古典コントロール集合に設定し,  $M = T$  を不変集合が対称なコントロール集合になるように変化 ( $u = 1/2, v$  を  $1$  から  $\infty$  まで変える) させた時の Information Flow  $IF(S, T)$  を, 各レベルごとにプロットしたものである. 尚ここで対称なコントロール集合に, Information Flow は次式の様に表示される.

$$IF(S, T) = \frac{1}{\sum_i 1} \sum_{x_i \in S} n(x_i) * (\log r - \log 2) \quad (2)$$

括弧の中の第一項はマップ自身から発生するリアプノフ指数に相当する Information Flow, 第二項はそのマップのトポロジカルエントロピーが  $\log 2$  であることを知っていることに相当する情報量を差し引いたものに相当する. ここで  $n(x_i)$  は, 与

えられたパターン  $S$  内の点  $x_i$  を初期値として考えて、それをマップ  $T$  で iteration したときの、条件

$$T^n(x_i) \notin I \quad (3)$$

が成立するまでの iteration  $n$  を示す (それは確かに初期値  $x_i$  に依存する). 図 2 を見ると確かに,  $[0, 1/3]$ ,  $[2/3, 1]$  をプレイメージに持つテントマップ  $T_{true}$  で Information Flow が最大値を持つことがわかる. レベル 6, 7, 8 とピークの大きさが変わらないのは, 計算機の精度 (ここでは倍精度) からくる限界を示しているものである. 数学的理想上のコントロール集合を扱う上では, 次の関係式

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} IF(\Lambda_N, T) = \log(r(T_{true})/2) \cdot \delta_{T, T_{true}} \quad (4)$$

が Information Flow の極大値がただ一つであることから導かれる. ここで,

$$\delta_{T, T_{true}} = 1 \quad (T = T_{true}), \quad \delta_{T, T_{true}} = 0 \quad (T \neq T_{true}) \quad (5)$$

図 3 はこの証明のエッセンスを示したものである. 詳しい証明は文献[7]を参照して下さい

ここで題の式部マップの由来について説明する. ここでのパターン認識の問題を力学系の言葉で焼き直すと, 有る点集合  $S$  が与えられた時,  $S$  を不変集合とするマップ  $T$  を探す, という逆問題になる. この時  $I$  に自然なマルコフパーティションを考えることによって,  $S$  の 1 点 1 点は, 無限精度の極限で有限文字からなる無限文字列と見なされる. そして逆にマルコフパーティションの構成の仕方から, 世界中のどのような文章も,  $I$  上の 1 点 (もし, 文章が有限の長さなら, それは有限の幅になる) で表せられることになる. そこで,  $S$  を文章の集合, すなわちここではある作家の書いた作品群であると思われ, 1 つのマップ  $T$  を 1 人の作家とすると, 上のパターン認識の問題は, ある作品群からその作者を捜せという比較的分かりよい問題になる. そしてこの時, 不変的な難しさ Complexity を持つという意味を込めて, 日本を代表する古典「源氏物語」の作者である紫式部にちなんで, このマップを式部マップと名付けたのであるが, 如何であろうか?

終わりに:

ここではカオス力学系の Information Flow の果たす役割をパターン認識という問題設定で考察した. その時提案した Information Flow 最大化原理を特別な場合 (コントロール集合の認識) で確かめた. 観測の理論, 計算量理論の Complexity の問題などと Information Flow が深く関わってくると予想されるので本研究会のテーマである複雑系の定義の問題 (モデルの持つ複雑さとは何か?) を考える上で今後欠かせないものとなってくると思われる (chaitin がゲーデル不完全性定理の上位概念を彼の algorithmic information theory で構成したように). 本研究に対する率直な御批判, 御意見を承ります. <sup>1</sup>

<sup>1</sup>e-mail chaosken@tkyvx.phys.s.u-tokyo.ac.jp

## 参考文献

蛇足:

既に誰かが発言したことかも知れませんが、このような超学際的テーマ(複雑系)の場合、研究者が自由にアクセスできる共通の電子ネットワークがあったら格段に進むと思われます。ここでアクセスとは単に相互の情報交換に留まらず、研究者各々が、“これが複雑系だ!”とと思っているプログラムを並べておいて、自由にそれを動かせることを意味します。その時、このネットワークが自然淘汰、突然変異を繰り返して“究極の複雑系”へと進化するか、もしくは崩壊への道をたどるかはアクセスしている研究者の持つ Complexity によるでしょう。この時、電子ネットワークによってカップルされたこのメタ複雑系の Complexity に特異性  $Complexity = \infty$  があるとすると、このメタ複雑系は、明らかにコルモゴロフの Complexity(model の program を記述する際の手間で定義) を越えたものとなっています。が、果たして本当でしょうか?

謝辞:

日頃、暖かく見守って下さっている大石進一先生、鈴木増雄先生に感謝します。又この研究会報告を書く上で山口明宏さん、Brant Hinrichs さんとの議論がためになりました。

## 参考文献

- [1] R.Shaw, "Strange attractors, chaotic behavior, and information flow," Z.Naturforsh, 36a
- [2] E.Harth, "Order and Chaos in Neural Systems: An Approach to the Dynamics of Higher Brain Functions", IEEE Transactions on systems, man, and cybernetics, smc-13, No.5, 782 (1983)
- [3] C.A.Skarda and W.J.Freeman, Behavioral and Brain Sciences, 10 161(1987)
- [4] C.E.Shannon, "A Mathematical Theory of Communication", Bell Systems Tech.J, 27623(1948)
- [5] 津田一郎, "カオスの脳観", (1990), サイエンス社
- [6] 梅野 健, "カオス力学系とパターン認識" (1990.3) 早稲田大学理工学部電子通信学科卒業論文 (未出版) 及び "Information Flow for Fractal Pattern Recognition" 最終「カオスとその周辺」研究会 (1990.12 基研)
- [7] K.Umeno, preprint (to be submitted)

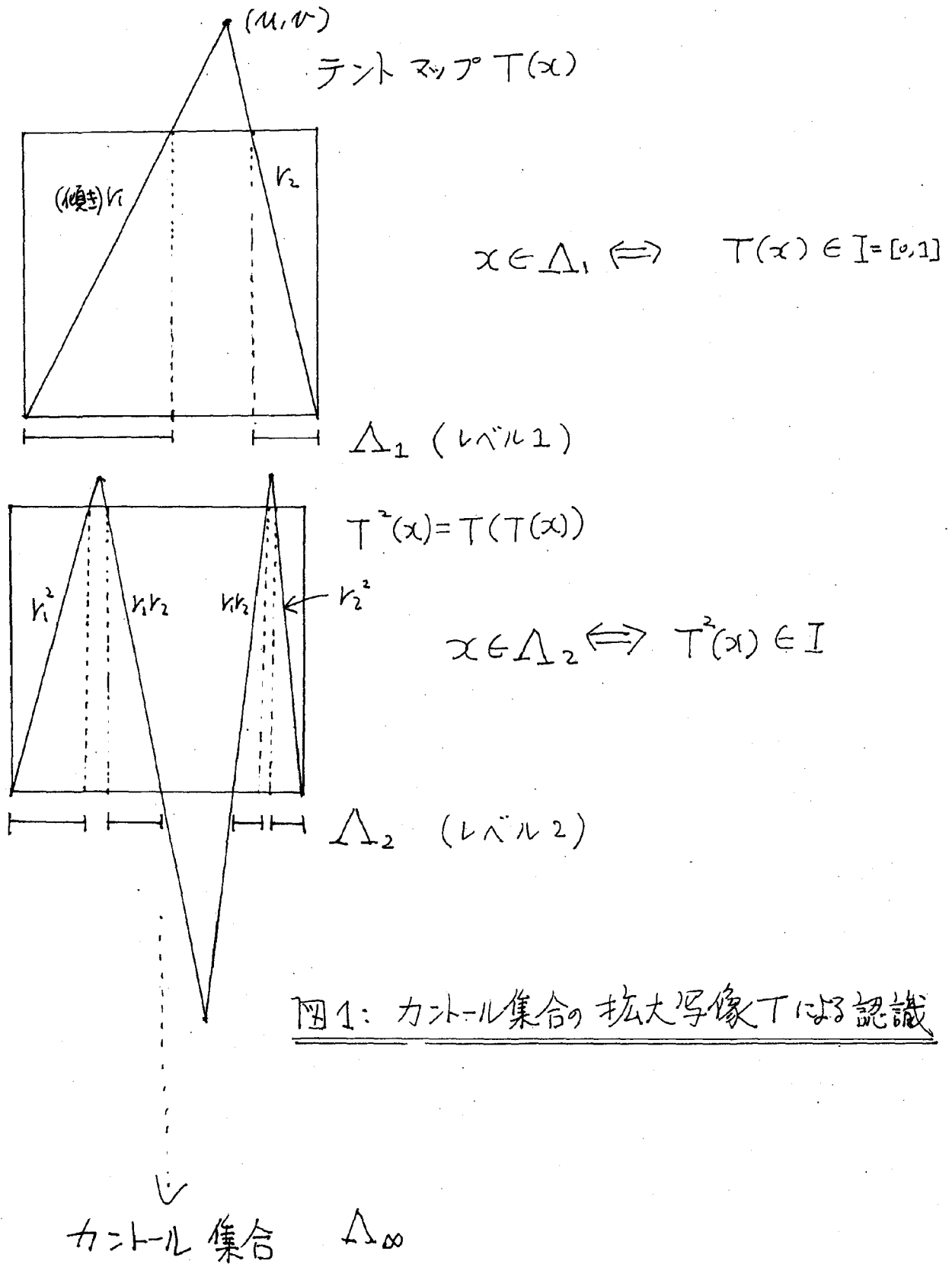


図1: カントール集合の拡大写像Tによる認識

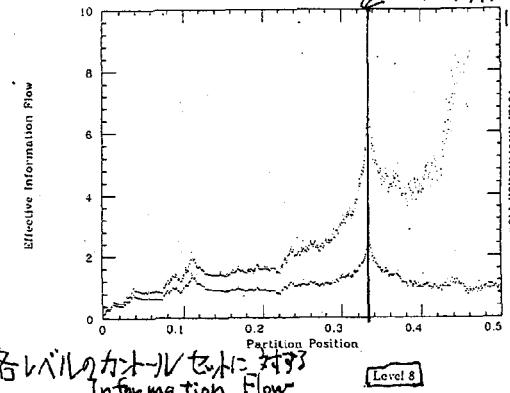
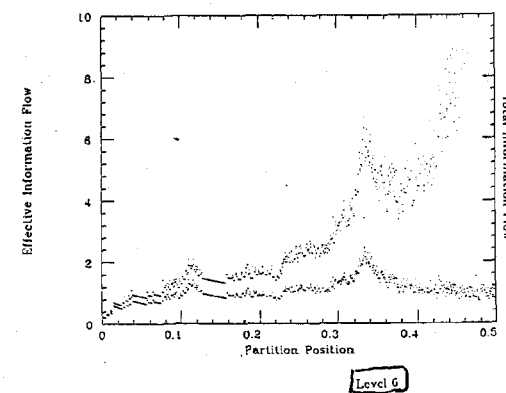
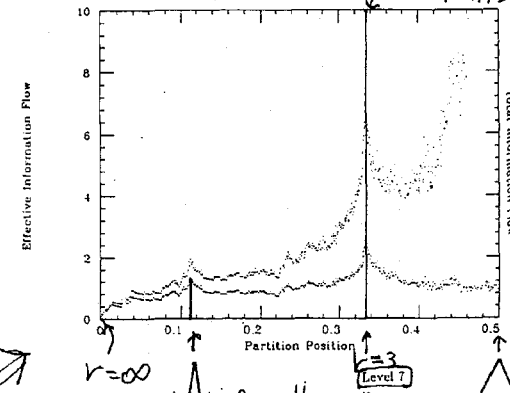
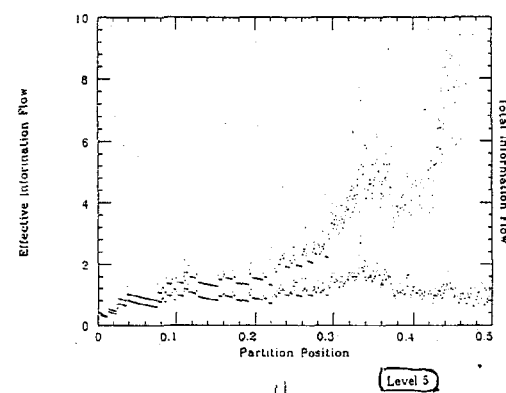
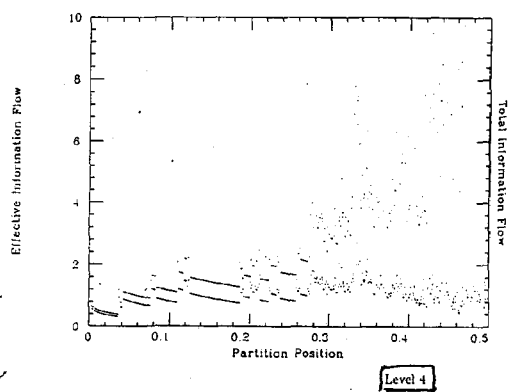
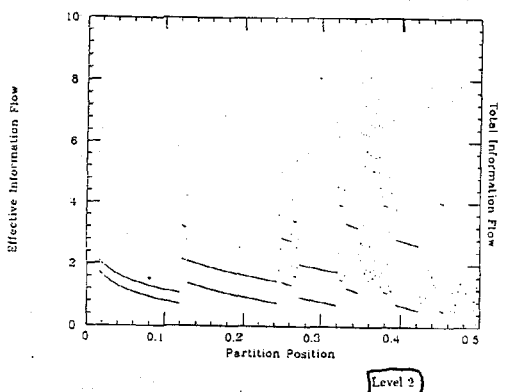
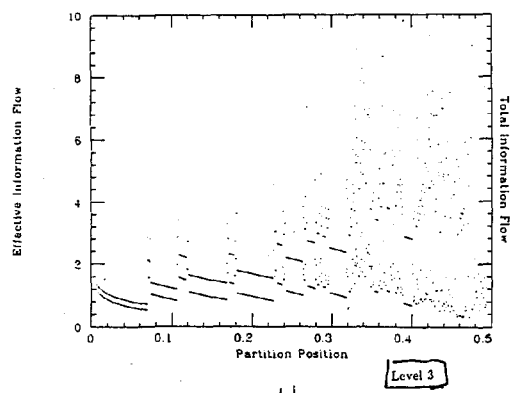
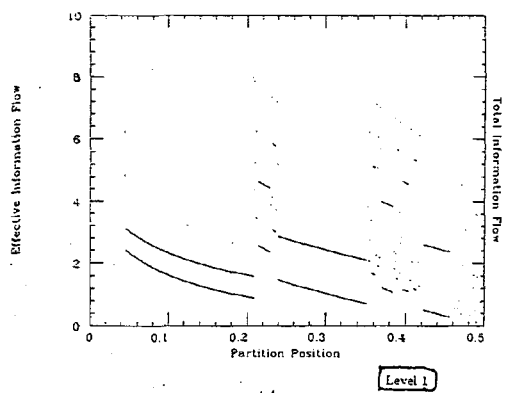
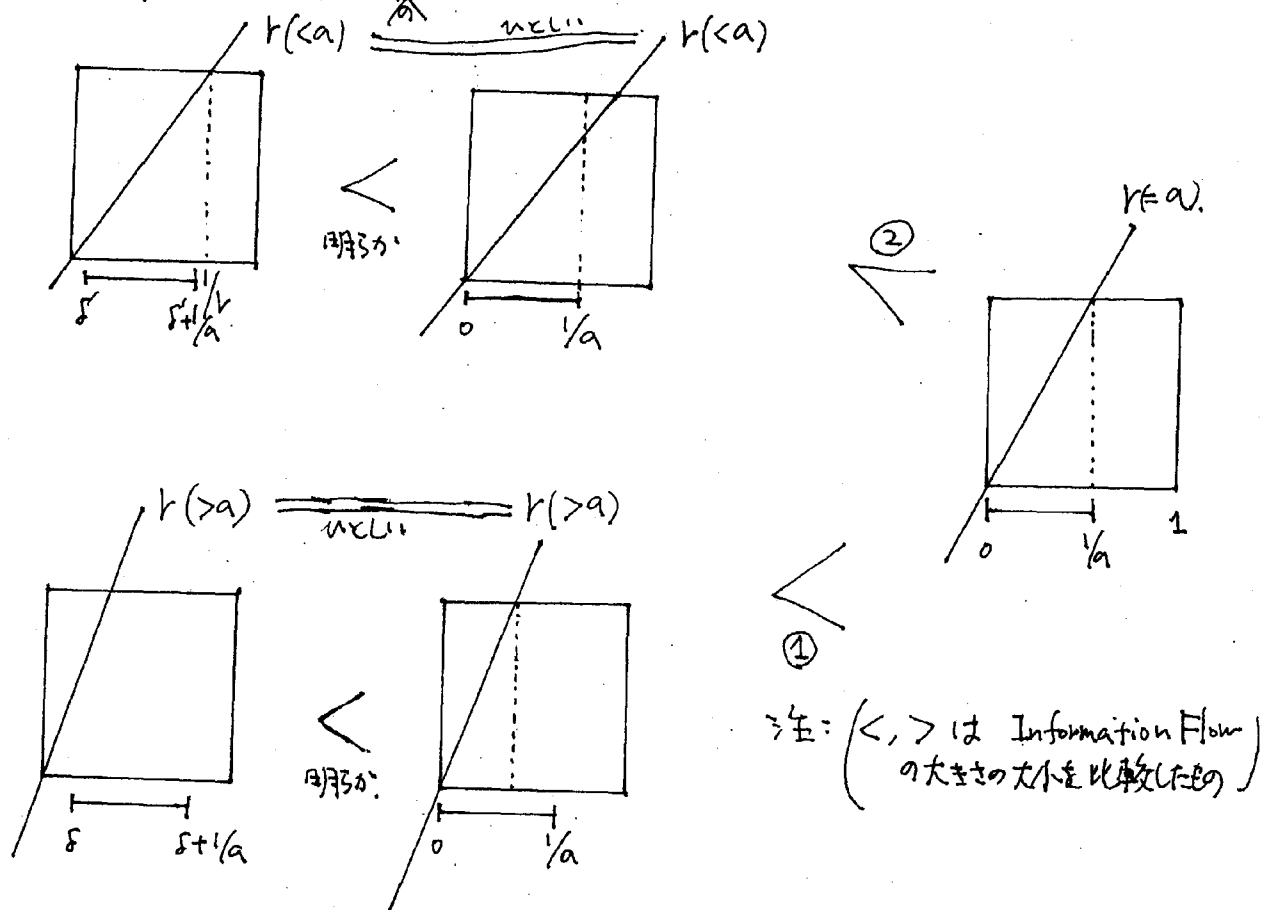


図 2: 各レベルのコントロールセルに対する Information Flow

マップTのトポロジカルエントロピーを  $\log 2$  に Fix するので次の場合  
 (1つの partition の section) についてのみ考えれば良い。

(おのおのの section が一致するマップは、仮定には) 常に存在するので)

注: ( $\delta = \Delta_N$  の場合,  $2^N$  コの破片があるが, その1つの破片をマップ  $\underline{I}^N$  で認識する時 Information Flow を考えることになる)



①の理由:  

$$IF(t) = \log t \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) + (\log t)^2 \left( \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t^3} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{t-1} \log t, \quad IF'(t) = \frac{-1}{(t-1)^2} (\log t - 1 + \frac{1}{t})$$

$$g(t) \equiv \log t - 1 + \frac{1}{t}$$

$$g(1) = 0, \quad g'(t) = \frac{t-1}{t^2} > 0 \quad (t > 1)$$

$$\therefore g(t) > 0 \quad (t > 1)$$

$$\therefore IF'(t) < 0 \quad (t > 1)$$
 他変数に与える減少関数.

②の理由:  

$$IF(t) = \log t \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{at} \right) + \log^2 t \left( \frac{1}{at} - \frac{1}{at^2} \right) + \log^3 t \left( \frac{1}{at^2} - \frac{1}{at^3} \right) + \dots$$

$$= \frac{1}{(1-\frac{1}{t})} (\log t) \cdot \frac{1}{a}, \quad f(t) \equiv \frac{1}{(1-\frac{1}{t})} (\log t), \quad f'(t) = \frac{t-1-\log t}{(t-1)^2} \equiv \frac{g(t)}{(t-1)^2}$$

$$g(t) \equiv t-1-\log t, \quad g(1) = 0, \quad g'(t) = 1 - \frac{1}{t} > 0 \quad (t > 1) \therefore f'(t) > 0$$

$$\therefore IF'(t) > 0 \quad (t > 1)$$
 他変数に与える増加関数.

図3: Information Flow の大小関係