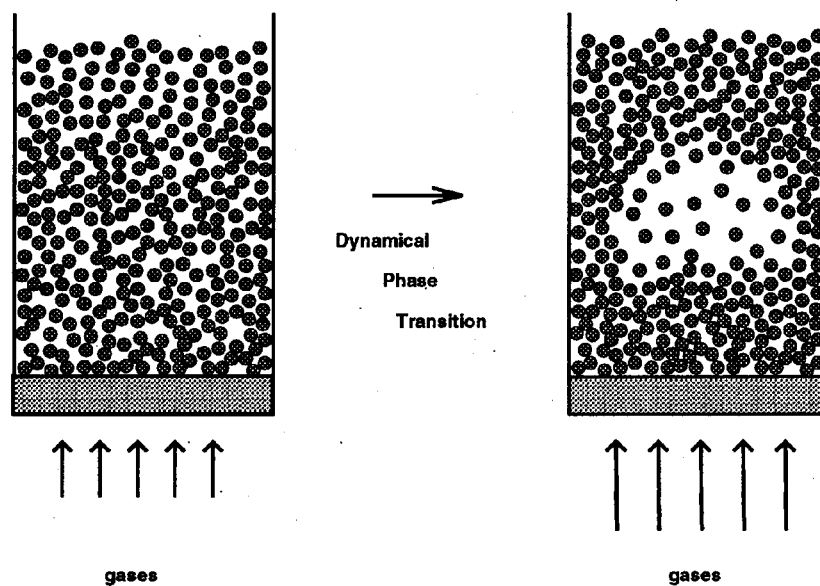


## 粉体流動場の非線形波動

東北大理 小松 輝久<sup>1</sup>、早川 尚男

粉体流動場は、適当な容器に粉体粒子を詰めた状態で容器の下から流体を流し込んで、粉体を流動化させることによって作られる。この時、下からの流速が小さいと粉体は一様に膨潤した状態（一様流動層；左）になっているが、流速を増すと密度の揺らぎは緩和せずバブルを形成し（右、但し模式的に大きく書いてある）、出来たバブルは浮き上がっていく。この現象は非平衡相転移現象と考えられる。



われわれの目的はこの相転移の起こるメカニズムを知り、本質的にどのような方程式によってダイナミクスが支配されるのかを知ることにある。この非平衡相転移を起こす系を記述するのに、我々の解析では粉体粒子の一つ一つを追いかける記述法をとらずに、粉体を粗視化して流体と見なせると仮定し、粉体流体と気体流体（空気）との二流体からなる系として記述する方法をとった。導出の詳細は省略して、以下にモデルを書き下すことにする。[1]

<sup>1</sup>東北大学理学部物理学教室物性理論講座、〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉  
E-mail: komatsu@cmp01.phys.tohoku.ac.jp

二流体モデル

$$\begin{array}{l}
 \text{質量保存則} \\
 \text{運動量保存則}
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \partial_t \phi = -\text{div}(\phi \mathbf{v}) \\
 \partial_t \bar{\phi} = -\text{div}(\bar{\phi} \mathbf{u}) \\
 \rho_p \phi [\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\phi \nabla \left( p + \frac{\delta A}{\delta \phi} \right) + \rho_p \phi \mathbf{g} \\
 \quad - \zeta(\phi) (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\
 \quad + \text{Div} \left[ \phi \mu(\phi) \left( \frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t}{2} \right) \right] \\
 \rho_g \bar{\phi} [\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla] \mathbf{u} = -\bar{\phi} \nabla p + \rho_g \bar{\phi} \mathbf{g} \\
 \quad - \zeta(\phi) (\mathbf{u} - \mathbf{v})
 \end{array} \right.$$

$\phi$ は粉体の体積占有率で $\bar{\phi}$ は $1 - \phi$ と定義される気体の体積占有率である。また、粉体の速度を $\mathbf{v}$ 、気体の速度を $\mathbf{u}$ とした。 $A[\phi]$ 、 $\zeta(\phi)$ 、 $\mu(\phi)$ はそれぞれ粉体が微視的な運動により均一になろうとする効果、気体の粘性によって粉体が曳きずられる効果、粉体同士の衝突による（ズリに対する）粘性の効果である。これらの関数の $\phi$ 依存性の特殊さが粉体の特性を表している。解析に用いた具体形は以下の通りである。

$$A[\phi] = \int d\mathbf{r} \left[ \frac{\kappa}{2} (\nabla \phi)^2 + f(\phi) \right], \quad f(\phi) \propto (\phi - \phi_0)^2 / (\phi_{cp} - \phi), \quad \zeta \propto \bar{\phi}^{-5}, \quad \mu \propto (\phi_{cp} - \phi)^{-1}$$

$\phi_{cp}$ は最密状態での粉体の体積占有率であり、この値で特異な振舞いをする。 $\phi_0$ は平均の $\phi$ であり、気体の流入速度に負の相関があるのでコントロールパラメータと見れば良い。

上の二流体モデルの特殊なケースとして気体の比重（対粉体）をゼロとし、さらに体積流束（ $\equiv \phi \mathbf{v} + \bar{\phi} \mathbf{u}$ ）が水平成分を持たない場合を考えると、モデルは次の形になる。

$$\begin{array}{l}
 \partial_t \phi = -\text{div}(\phi \mathbf{v}) \\
 (\partial_t + \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \zeta(\phi) (V \mathbf{e}_z - \mathbf{v}) - \nabla \frac{\delta A}{\delta \phi} - \frac{\mathbf{e}_z}{Fr} \\
 + \frac{1}{\phi} \text{Div} \left[ \phi \mu(\phi) \left( \frac{\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^t}{2} \right) \right]
 \end{array} \tag{1}$$

$V$ は体積流束で、非圧縮条件より定数になる。但し、体積流束を一次元的であるとすることは二次元以上では正しくない。しかし、このモデルを粉体の挙動を解析する上での出発点として使った。

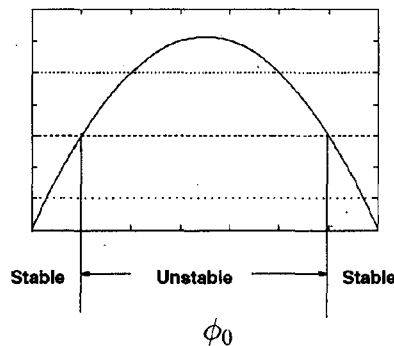
このモデルには次の一様定常解がある。

$$(\phi, \mathbf{v}, \mathbf{u}, p) = \left( \phi_0, \mathbf{0}, \mathbf{e}_z, p_0 - \frac{\phi_0 + \theta \bar{\phi}_0}{Fr} z \right)$$

この定常解の線形安定性を調べると

$$\bar{\phi}_0^2 \phi_0 \left[ \frac{\zeta'_0}{\zeta_0} \right]^2 - f''(\phi_0)$$

の正負によって安定性が決まることが判る。(正の時、不安定化するモードがある。) 第一項は粉体気体間のドラッグによって系が不安定化する効果であり、第二項は内部エネルギー(エントロピックな効果)が系の安定化に寄与する効果である。この二つの効果の競合が系の安定性を決めている。



上の図は $\phi_0$ (すなわちコントロールパラメタ)の値に対して、どの領域で不安定化するのかを模式的に示した図である。

線形のモードを  $\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \sigma_{\pm}t)$  と書く時、 $\sigma_{\pm}$ を長波長展開すると

$$\begin{cases} \text{Re}[\sigma_+] \simeq \frac{\phi_0}{\zeta_0} \left[ \left( \frac{\tilde{\zeta}'_0}{\tilde{\zeta}_0} \right)^2 \bar{\phi}_0^2 \phi_0 - f''_0 \right] k_z^2 - \frac{\phi_0}{\zeta_0} f''_0 k_{\perp}^2 \\ \text{Re}[\sigma_-] \simeq -\tilde{\zeta}_0 \\ \text{Im}[\sigma_{\pm}] \simeq \mp \left( \frac{\tilde{\zeta}'_0}{\tilde{\zeta}_0} \right) \bar{\phi}_0 \phi_0 k_z \end{cases}$$

となる。 $k_{\perp}$ は横方向の波数である。虚部を見ると不安定化した波( $\sigma_+$ に相当)は速度  $c_0 \equiv (\tilde{\zeta}'_0/\tilde{\zeta}_0)\bar{\phi}_0\phi_0 > 0$  で上昇することが判る。もしも、 $\tilde{\zeta}$ が $\phi$ の減少関数であった場合には不安定化した波は下降することになる。

逆に短波長で展開すると $\kappa$ の存在のために実部が $-k^2$ に比例し、安定なことが判る。短波長不安定(物理的に考えにくいこと)を避けるには自由エネルギーの拡散項が必須である。

今、コントロールパラメタが線形不安定の閾値直上にある場合を考えれば、系を特徴付ける小さなパラメタとして、縦方向に現れる負の拡散係数が考えられる。これを $\epsilon^2$ と置いて、逓減摂動に手法に沿って長波長弱非線形モードを取り出すことを考える。上の線形分散関係より  $k_z \sim \epsilon$ 、 $k_{\perp} \sim \epsilon^2$  というスケールが考えられる。時間についてのスケールは $\epsilon$ の一次の効果が一番大きい、垂直方向に等速度で動く座標系を考えて消去すれば、三次の効果が一番大きく残るはずなので $\epsilon^3$ のスケールを仮定した。

したがって、次のGM変換を行なう。

$$\begin{cases} \tau \equiv \epsilon^3 t \\ \xi \equiv \epsilon(z - c_0 t) \\ \eta \equiv \epsilon^2 x \end{cases} \quad (2)$$

物理量の展開は任意性があるが一意には定まらないが、展開の初項が一番弱い非線形効果が時間発展を決めるとして決め、その後の展開は $\epsilon$ で行なえると仮定すると

$$\begin{cases} \phi - \phi_0 = \epsilon^2 \phi_2 + \epsilon^3 \phi_3 + \epsilon^4 \phi_4 + \epsilon^5 \phi_5 + \dots \\ v_z = \epsilon^2 v_{z2} + \epsilon^3 v_{z3} + \epsilon^4 v_{z4} + \epsilon^5 v_{z5} + \dots \\ v_{\perp} = \epsilon^4 v_{\perp 4} + \epsilon^5 v_{\perp 5} + \dots \end{cases}$$

となる。これらの展開と変数のスケールを元の二流体モデルに代入して、同じ $\epsilon$ の中で揃えることを行なえば、effectiveな方程式を得る。

$O(\epsilon^5)$ の式からは

$$\partial_{\tau} \phi_2 + \lambda \partial_{\xi} \phi_2^2 + \gamma \partial_{\xi}^3 \phi_2 = 0$$

$$\begin{cases} \lambda \equiv \left( \frac{\tilde{\zeta}'_0}{\tilde{\zeta}_0} \right) \bar{\phi}_0 \left[ 1 + \frac{\phi_0}{2} \left( \frac{\tilde{\zeta}''_0}{\tilde{\zeta}'_0} \right) - \phi_0 \left( \frac{\tilde{\zeta}'_0}{\tilde{\zeta}_0} \right) \right] \\ \gamma \equiv \frac{c_0 \mu_0}{\tilde{\zeta}_0} \end{cases}$$

という、 $\phi_2$ で閉じた式を得る。

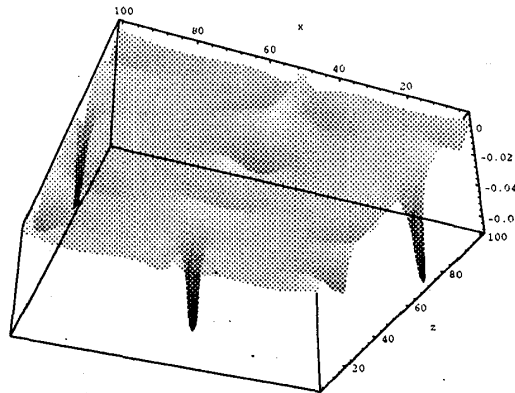
また、 $O(\epsilon^6)$ の式を使うと

$$\begin{aligned} & \partial_{\tau} \psi + \lambda \partial_{\xi} \psi^2 + \gamma \partial_{\xi}^3 \psi \\ & = -\epsilon \left[ \partial_{\xi}^2 \psi + \lambda' \partial_{\xi}^2 \psi^2 + \gamma' \partial_{\xi}^4 \psi - \frac{c_0^2}{\tilde{\zeta}_0} \partial_{\eta}^2 \psi \right] + O(\epsilon^2) \end{aligned} \tag{3}$$

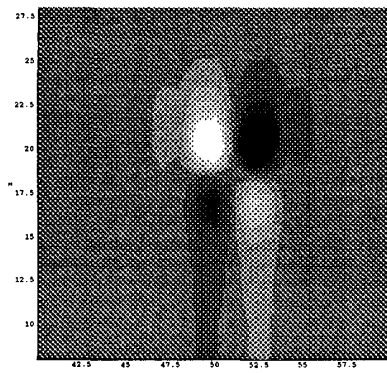
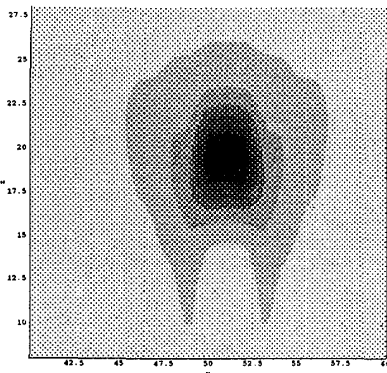
$$\begin{cases} \psi \equiv \phi_2 + \epsilon \phi_3 \\ \lambda' \equiv \frac{2c_0}{\tilde{\zeta}_0} \lambda - \frac{3\phi_0}{2\tilde{\zeta}_0} \left( \frac{c_0}{\phi_0} \right)^2 - \frac{\phi_0 f_0'''}{2\tilde{\zeta}_0} \\ \gamma' \equiv \frac{2c_0}{\tilde{\zeta}_0} \gamma + \frac{\phi_0 \kappa}{\tilde{\zeta}_0} \end{cases}$$

この通減された方程式の正しさは一次元では計算機実験の結果によって確認されていた。今回は、二次元について行なわれた若干の数値計算の結果より、この方程式の正しさについて考える。計算は空間微分に Taylor 展開法による単純差分近似を使い、時間積分には Runge-Kutta の4次公式を用いた。(この手法はあまり安定な解法とは言えないので、計算の発散を抑えるには非常に小さな時間刻みを必要とした。したがって、今回の報告はごく少ない計算結果のみにたよっている。)

次ページの最初の図は(1)を一様状態の $\phi$ に1%の長波長の揺らぎが入った状態を初期条件として解いたもので、ある時刻に於けるスナップショットである。パラメタの値としては一様状態が不安定化する閾値の直上付近である。図中に黒で示した部分ほど $\phi$ の値が小さく(空気が多い)、白くなるほど大きい。図の座標軸は $x, z, \phi$ であり、 $\phi$ は平均からのずれの値で示してある。

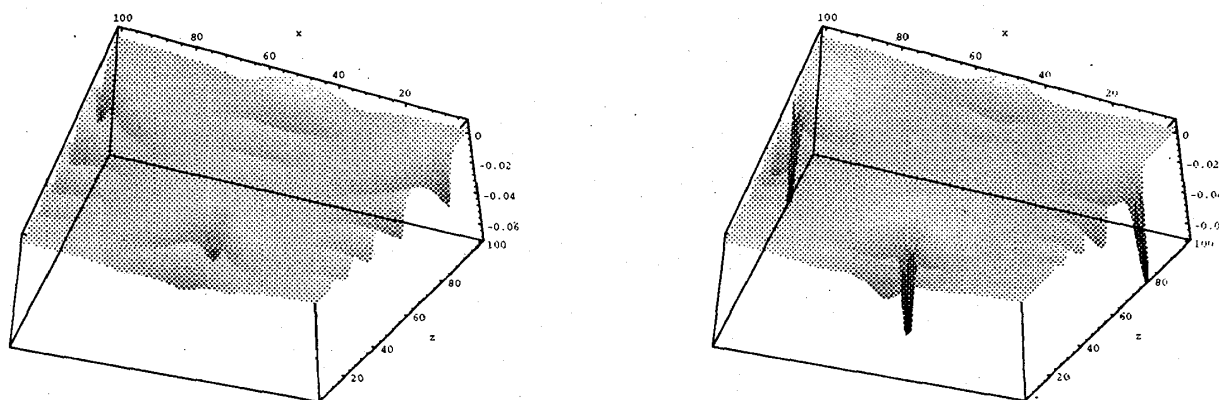


長波長の揺らぎから非線形効果によって高調波が生み出されて、粉体密度が小さいところが成長している。この後、このポイド（ここでは粉体密度の薄い部分という意味で用いている）がバブルにまで成長する様子は見る事が出来なかった。下図は上図のポイドの  $\phi$ （左下図）と同じ場所での  $v_x$ （右下図）のスナップショットを等高線で表示したものである。



$\phi$  のプロファイルは実験で見られるバブルの形状に似た形をしているが、実際の数値は  $-0.07$  程度なので、まだバブルと言えるほどには成長していない。横方向の速度  $v_x$  の図ではほとんどの領域でゼロ（背景の中間色）であるが、このポイド付近のみで値を持っている。（白は正、黒は負の速度を示す。）このプロファイルは四重極的で、非常に興味深いが、絶対値は非常に小さい（ $0.005$  程度）ので気体の合成速度はほとんど上向きである。このようにポイドの上下で横方向の流れが逆転する傾向を持つことは固気流動層の実験で観察されている。[2] その実験ではトレーサーによってバブル下側方の気体の流れはバブル側に迂回し、上側方では逆にバブルから遠ざかる向きに流れることが観察されている。このことを上の計算結果と比較してみた場合、まだ実際にバブル領域に達していないことや、横方向の速度が小さ過ぎることなどから直接には対応していないものの似たような傾向を持つことは面白い。

次に同じパラメタで(3)を解いた場合の結果(左下図)を示す。



(3)ではボイドはあまり成長していない。これは横方向の効果が拡散でしか入っていないためである。また、前ページの $v_x$ の図の様な流れが生じるのは拡散としては理解しづらいので、横方向の効果としてさらに高次の項として出てくる $\partial_z \partial_x^2 \phi$ を含めて解いてみたものが右上図である。今度はボイドの成長が見られたが、必ずしも対応しているとは言えない。もしも、この縦横のカップルした分散効果が重要であるとすれば、(2)の変換はむしろ

$$\begin{cases} \tau \equiv \epsilon^3 t \\ \xi \equiv \epsilon(z - c_0 t) \\ \eta \equiv \epsilon^{3/2} x \end{cases} \quad (4)$$

と取るべきであるかもしれない。この場合、 $\epsilon \rightarrow 0$ で縮約される方程式はKdV方程式+横方向の拡散となり、次の次数で縦方向に負の拡散係数と4次の安定化の効果+縦横のカップルした分散効果が効いてくることになる。但し、(4)のスケールの出処は今のところ不明である。

最後に(1)の導出に於いては $\phi \mathbf{v} + \bar{\phi} \mathbf{u} = V \mathbf{e}_z$ の拘束を課した為、圧力による非局所効果は排除されモデルは単純化されたが、そのことによってモデルは一次元的になっていることに注意しておく。このことが定性的に違いをもたらす可能性もあるので圧力も含めたモデルの解析もこれから必要となる。

## 参考文献

- [1] Batchelor, G.K. *J. Fluid. Mech.* **193** (1988) 75  
 Sasa, S. and Hayakawa, H. *Europhys. Lett.* **17** (1992) 685  
 Komatsu, T.S. and Hayakawa, H. *Phys. Lett. A* (to be published)  
 Hayakawa, H. and Komatsu, T.S. *Physica A* (to be published)  
 小松 輝久 物性研究 **60** (1993/5) 103 および上記に含まれる参考文献。
- [2] Wace, P.F. and Burnett, S.J. *Trans. Inst. Chem. Eng.* **39** (1961) 168