熱対流におけるカオス的遍歴運動

東京工業大学　理学部　柳田達雄

1　はじめに

熱対流はRayleigh数、Plandtl数、アスペクト数によりカオス、時間空間間欠運動、ソフト・ハード乱流遷移と多様な振舞いを示す。我々はこの多様な熱対流の振舞いを再現する簡単なモデルを構築した[1]。ここでは、大自由度力学系の特徴的振舞いであるカオス的遍歴運動について報告する。カオス的遍歴運動はいくつかの大自由度力学系で観察されている[2][3][4][5]。熱対流におけるカオス的遍歴運動とはロールの回転方向や数が時間的に変動する現象であるが、変動する時に空間自由度の大きい乱流状態が現れる。このような運動は実験においても見い出されているが[6]、系統的な研究は行なわれていない。それは、熱対流系を少数自由度力学系で見い出された多くのカオスへの分岐と対応させることを主眼としたからと思われる。また、カオス的遍歴運動をどのようにとらえれば良いのかが明らかになっていないためでもある。このカオス的遍歴運動を簡単なモデルで再現し解析する。

2　熱対流モデル

離散化された格子上(x,y)に状態を記述するための粗視化した場の量として温度E、速度場$\vec{v}$を選ぶ。次に、これらの場の量が本質的にどのような変換を受けて時間発展するかを考え、それを$E,\vec{v}$に対する写像として表現する。ここでは、対流のダイナミクスとして重要と思われる、浮力、熱拡散、粘性、$\nabla\cdot\vec{v}=0$を保つための圧力の効果を考慮し、以下のような写像で表す。

1. 浮力

   温度が高いサイトは上昇する力を受ける。

$$v_y^*(x,y) = v_y^t(x,y)+\frac{c}{2}\{2E^t(x,y)-E^t(x+1,y)-E^t(x-1,y)\} \quad (1)$$

$$v_x^*(x,y) = v_x^t(x,y) \quad (2)$$

2. 熱拡散

熱拡散は離散化した Laplacian で表現する。

$$E'(x,y) = E^t(x,y) + \lambda \Delta E^t(x,y) \tag{3}$$

ここでΔは離散化した Laplace 演算子

$$\Delta A(x,y) = \{A(x+1,y) + A(x-1,y) + A(x,y+1) + A(x,y-1) - 4A(x,y)\}/4$$

である。

3. 粘性、圧力効果

粘性は離散化された Laplace 演算子で表す。また、非圧縮性 $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ を表現するため $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ を離散化したダイナミクスを導入した。この写像は各格子上の発散 $\nabla \cdot \vec{v}$ を 0 にするように作用する。Navier-Stokes 方程式では非圧縮性の条件は圧力場を計算し満足させるが、ここではこれを行わず簡単な写像によって表した。

$$v'_x(x,y) = v^*_x(x,y) + \nu \Delta v^*_x(x,y) + \eta\{(v^*_x(x+1,y) + v^*_x(x-1,y))/2 - v^*_x(x,y) +$$

$$(v^*_y(x+1,y+1) + v^*_y(x-1,y-1) - v^*_y(x-1,y+1) - v^*_y(x1,y-1))/4\} \tag{4}$$

yに関しても同様 $[x \leftrightarrow y]$

以上の手続きを逐次実行した後、移流項 $((\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$、$(\vec{v}\cdot\nabla)E)$ を表現するための Lagrange 写像を導入する。各格子点上 (x,y) に準粒子を考え、この準粒子はその格子点での速度 $\vec{v}(x,y)$ にしたがい位置 $(x,y) + \vec{v}$に移動し、場の量 (ここではエネルギー Eと速度$\vec{v}$) 運搬する。一般的に移動先は格子点上ではないため、場の量は移動した点の 4 つの近接格子点に準粒子と近接格子点との距離に反比例（てこの法則）させて分配する。

以上の写像を合成したダイナミクス

$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^t(x,y) \\ E^t(x,y) \end{array} \right\} \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}*(x,y) \\ E^t(x,y) \end{array} \right\} \longmapsto \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}'(x,y) \\ E'(x,y) \end{array} \right\} \overset{\text{Lagrangean}}{\longmapsto} \left\{ \begin{array}{c} \vec{v}^{t+1}(x,y) \\ E^{t+1}(x,y) \end{array} \right\}$$

によって、熱対流の時間発展を表す。

このモデルの基礎パラメーターは Rayleigh 数に対応する上面と下面の温度差（$\Delta E = E(x,0) - E(x,N_y)$)、Prandtl 数に対応する温度拡散と粘性率の比（ν/κ)、アスペクト数 (N_x/N_y) である。このモデルは非常に幅広い現象を再現するが [1]、今回は主に熱対流系に見られるカオス的遍歴運動を中心に報告する。

3 カオス的遍歴運動

3.1 カオスからカオス的遍歴運動へ

カオスへの分岐現象はアスペクト比を小さくし空間自由度を制限したときに観測され、Prandtl 数などによって異なったカオスへの道筋が選択される [7]。例えば、周期倍化からカオス状態となる分岐は Prandtl 数が小さい場合に観測され [8]、Prandtl 数の大きい場合にはロールの準周期振動 (トーラス運動) からトーラスの崩壊によってカオス状態となる [9]。また、ロール数を制限することによって、同じ Prandtl 数でも間欠運動からカオス化する場合もある [6][10]。

モデルにおいても Rayleigh 数に対応するΔEの増加とともに熱伝導状態から対流状態へ転移する。また、複雑かつ多様なカオスへの分岐現象を再現し、分岐の Prandtl 数依存性も実験結果と定性的に一致する。

ロールの回転方向は初期条件によって決定される。すなわち、2つのアトラクターが存在する。Rayleigh 数を増加していくと、これらの2つのアトラクターが結合し、回転方向が間欠的に反転する運動を繰り返すようになる（図 1)。この反転運動が起こる始める臨界点では、多くの時間を空間自由度の小さい層流状態（小数自由度アトラクター）として過ごす。しかし、このような小数自由度運動は安定ではなく時間発展とともにフラストレーションがたまる。これは2つのロールでは熱を十分に輸送できないためである。このため、急激にロール構造が崩壊し空間自由度の大きい乱流的状態（大自由度カオス）となり熱を急速に輸送した後、新しい回転方向が選択される。(図 2)。ここでは、もともと存在した2つのカオス・アトラクターの間を大自由度カオスを介して行き来する運動をカオス的遍歴と呼ぶ。

このカオス的遍歴を乱流発達過程に現れる現象としてみると、アスペクト比が小さい場合には（大きいアスペクト比では時間空間間欠運動が見られる)、対流構造が次第に崩壊していくのではなく乱流状態と層流状態が時間的に入り交じった状態を経て発達した乱流となる。

このカオス的遍歴運動は Navier-Stokes 方程式を小数のモードで展開した Lorenz 系のようなシステムでは見ることができない大自由度系の特徴である。以下、このカオス的遍歴運動の特徴づけを行なう。

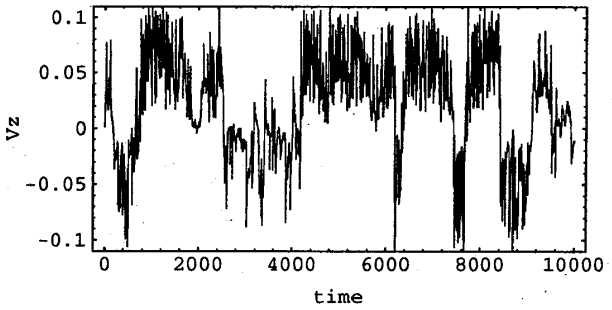

図 1: 中心点での速度の鉛直成分の時間発展

Rayleigh 数を増加すると回転方向の異なる 2 つのアトラクターが結合し、間欠的に回転方向が変化する。$\lambda = 0.02, \nu = \eta = 0.2, \Delta T = 1.0, N_z = 17, N_x = 34$

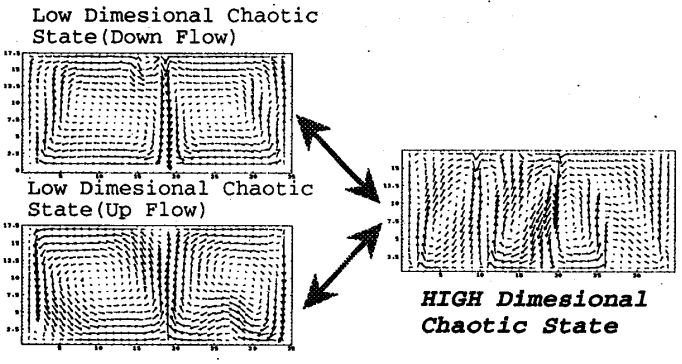

図 2: カオス的遍歴運動時のベクトル場

カオス的遍歴運動の開始点では長時間を空間的乱れが少ない層流状態に滞在する。しかし、層流では熱は十分輸送されないため時間とともにフラストレーションがたまり空間的に乱れた状態となる。その後、新たに回転方向が選択される。この時必ずしも回転の異なった方向が新しく選択されるとは限らない。$\lambda = 0.02, \nu = \eta = 0.2, \Delta T = 3.0, N_z = 17, N_x = 34$

3.2 遍歴運動の特徴

3.3 滞在時間分布

カオス的遍歴運動をロールの数により層流、乱流の２つ状態に符合化し、これらの滞在時間分布を求めた（渦の数がある臨界数 n_c より大きい時は乱流、小さい時は層流と定義した)。滞在時間の分布型は状態によってことなり、層流状態では指数分布をしており、カオス的遍歴運動の臨界点に近くなるにつれその指数は小さくなる (図. 4)。臨界点での振舞いはまだ明かではないが冪的振舞いをするようである。一方、乱流状態では Rayleigh 数に依存しない一定の分布であり、その型は指数分布となる (図 3)。

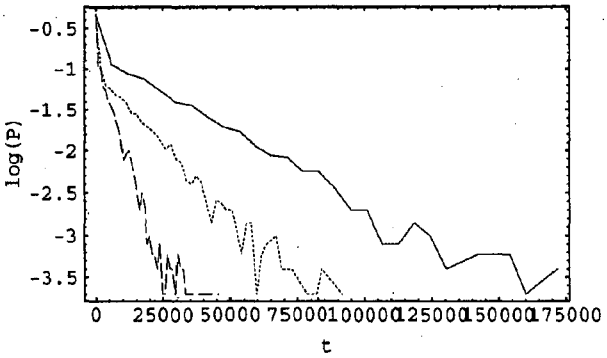

図 3: 層流状態の滞在時間分布

層流状態では滞在時間分布は Rに依存し、カオス的遍歴運動開始点に近付くに従い分布の指数は減少し、開始点では冪的に振舞う。実線$\Delta T = 0.7$, 点線 :$\Delta T = 0.9$, 破線:$\Delta T = 1.5$

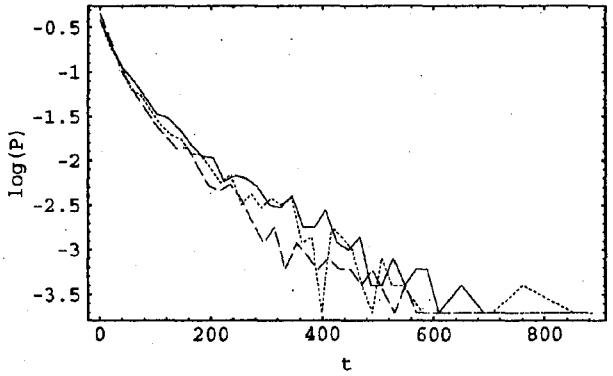

図 4: 乱流状態の滞在時間分布

対流状態を渦の数によって層流・乱流に２値化し、その滞在分布を求めた。乱流状態の滞在時間は Rayeigh 数に依存しない指数分布である。実線:$\Delta T = 0.7$, 点線:$\Delta T = 0.9$, 破線:$\Delta T = 1.5$

3.4 Lyapunov 指数

カオス的遍歴運動しているときの Lyapunov スペクトラムの Rayleigh 数依存性を見ると、Rayleigh 数の増大にともなって正の Lyapunov 数の値は増大するが、正の Lyapunov 数の数はあまり変化しない (Fig 5)。

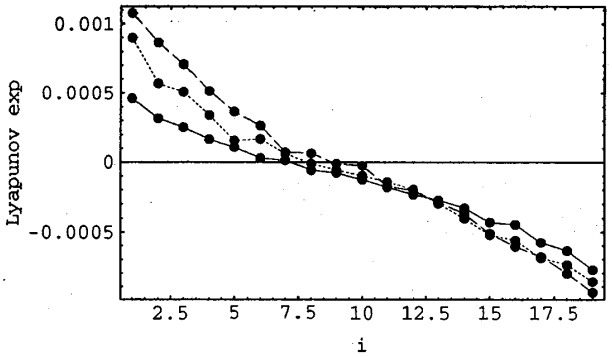

図 5: カオス的遍歴運動時の Lyapunov スペクトラム

Rayleigh 数の変化にともない指数は大きくなるが、正の指数の数は一定である。実線:$\Delta T = 0.5$, 点線:$\Delta T = 1.0$, 破線:$\Delta T = 1.5$

3.5 局所エントロピー

Lyapunov 指数は長時間平均であるため、カオス的遍歴のように時間的に運動の特性が変わる運動を見るのに適していない。そこで、局所的に時間平均した Lyapunov 指数の正の和として局所的エントロピーを定義し、その振舞いを調べた。局所的に時間平均したエントロピーを見るとロールの反転が起こるとき局所エントロピーは増大する (図 6)。これは渦数の増大（空間的な乱れ）によって不安定性が増したためである。

4 まとめ

熱対流系におけるカオス的遍歴運動の振舞いを調べた。状態を渦数によって層流・乱流に２値化しその滞在分布を見ると、乱流状態は Rayleigh 数によらない指数分布となる。一方、層流状態の分布は遍歴運動が始まる臨界点に近付くほど指数が小さくなり、臨界点では冪的に振舞うようである。臨界点以前では初期条件にともない２つのアトラクターが存在する、Rayleigh 数を増すと、これらのアトラクターが結合し１つのアトラクターになる。このとき、２つのアトラクターの間を行き来する道は細く（？）往来はほとんど起こらない。

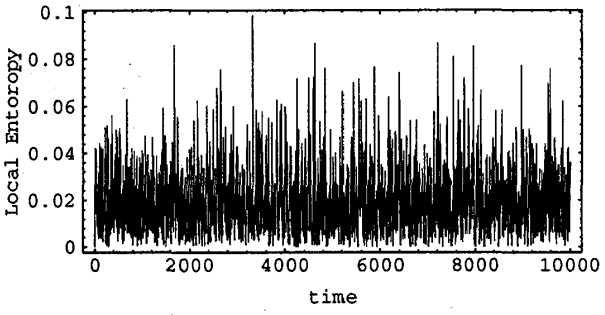

図 6: 局所エントロピーの時間変化

局所エントロピーが大きいところは空間的に乱れた状態に対応している。層流状態でもロールの運動はカオス的であるため局所エントロピーは正であり、時間的に変動する。

遍歴運動を乱流化する時の道筋と考えると、乱流の発達は対流構造が徐々に壊れていくのではなく、層流・乱流状態が時間的に交代に現れ、層流状態でいられる時間が徐々に短くなり発達した乱流となる。アスペクト比が大きい場合には、層流状態でのロール数の選択をともなう遍歴運動を行なう。例えば、$\cdots \mapsto 3 \mapsto$ 乱 $\mapsto 5 \mapsto$ 乱 $\mapsto 3 \mapsto \cdots$なる遍歴を行なう（ここで数字はロールの数を表す)。さらにアスペクト比が大きい場合には、時間空間間欠運動をへて乱流化する [1]。

参考文献

[1] T.Yanagita K.Kaneko. Coupled map lattice model for convection. *Phys.Lett.*, 175A:415–420, 1993.

[2] K.Kaneko. Clustering, coding, switching, hierarchical ordering,and control in network of chaotic elements. *Physica*, 41D:137–172, 1990.

[3] K.Kaneko. Globally coupled circle maps. *Physica*, 54D:5–19, 1991.

[4] I.Tsuda. Chaotic Neural Networks and Thesaurus. In A.V.Holden V.I.Kryukov, editor, *Neurocomputers and Attention: Neurobiology, synchronisation and chaos.* Manchester Univ. Press, 1991.

[5] K.Ikeda K.Matsumoto K.Ohtsuka. Maxwell-Bloch Turbulence. *Prog. Theor. Phys. Suppl.*, 99:295–324, 1989.

[6] J.P.Gollub S.V.Benson. Many routes to turbulent convection. *J.Fluid Mech.*, 100:449–470, 1980.

[7] A.Libchaber J.Maurer. A Rayleigh-Bénard experiment: Helium in a small box. In T.Riste, editor, *Nonlinear phenomena at phase transitions and instabilities*, page 259. Plenum Pub., 1982.

[8] J.Maurer A.Libchaber. *J. de Physique Colloques*, 41-C3:51, 1980.

[9] M.Dubois P.Bergé. *J. Physique Letters*, 42:167, 1981.

[10] M.Dubois M.A.Rubio P.Bergé. Experimental evidence of Intermittencies Associated with a Subharmonic Bifurcation. *Phys. Rev. Lett.*, 51:1446–1449, 1983.