

流体力学における非線形現象の数値シュミレーションに関する研究

石井良夫 (創価大工)

1. はじめに

連続体の複雑な現象の1つとして流体力学における非線形現象（乱流やその遷移など）が考えられる。これらのメカニズムはとても複雑であり、理論的にも実験や数値シュミレーションにおいても盛んに研究されている。

流体力学における非線形現象は、ナビエ・ストークスの方程式という支配方程式によって表わすことができるが、この方程式を解くことは難しく、方程式をモデル化してシュミレーションを行うなどさまざまな方法が試みられている。ここでは、これら複雑な現象をとらえる一つの方法として、渦度を用いてナビエ・ストークスの方程式を他の形の方程式に変形し、そのモデル化を行った。具体的には、物理量（速度や渦度）は連続量として扱い、時間と空間に対しては離散的に扱う。シュミレーションの方法としては、方程式中の各項を別々にモデル化し、それらを1つのモジュールのように取り扱い、個々に組み合わせることによって現象の全体的な振る舞いをとらえるようにする。

この方法は、東大の金子邦彦助教授の考案した Capped Map Lattice (CML)法に近いものであり、従来行われている流体力学における数値シュミレーションの方法とは異なったものである。

2. 支配方程式

流体现象の支配方程式はナビエ・ストークスの方程式であり、以下に非圧縮性の場合の式を示す。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

ここで \mathbf{u} は速度を、 p は圧力を表わす。また Re はレイノルズ数と呼ばれる無次元数である。この式は、左辺第1項が時間的な変化を、第2項が空間的な変化を表わし、特に空間的な変化は非線形性を有する。他方、右辺には圧力項と拡散による変化を表わす項が存在する。この式を渦度の定義式

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot } \mathbf{u} \quad (2)$$

を用いて以下のように変形することができる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \omega \quad (3)$$

この式は渦度輸送方程式と呼ばれており、左辺第1項が渦度の時間的な変化を、第2項が空間的な変化（非線形性を有する）を表わす項であり、そして第3項に渦の引き伸ばしによる効果を表わす項が存在する。他方、右辺は渦度の拡散を表わす項が存在する。

この式を2次元で示すと以下のようになる。

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

ここで、2次元空間の座標がx、yであり、それぞれの座標に対応した速度はu、vである。2次元の場合は、(3)式に見られたような左辺第3項の渦の引き伸ばしによる効果がなくなり、式が簡単になる。速度の変わりに流れ関数を用いると、この式は渦度と流れ関数の2つの変数の式となり、渦度と速度の関係式（渦度の定義式）にも流れ関数を代入することによって、ここでも流れ関数と渦度の関係式を導くことができる。この2つの式を連立させればこれらの方程式を解くことができ、2次元の流れ場における渦度と流れ関数を求めることができる。

1次元の場合は、次元を減らすことによって(4)式が以下のようになる。（ここで $1/\text{Re} = \nu$ とする。）

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \quad (5)$$

ただし1次元の場合に渦度は存在しないので、この方程式は実存しない。この式の渦度を速度に変えると、一般的にバーガス方程式と呼ばれている式になる。

3. モデル化および計算結果

a) 1次元の場合

ここでは、(5)式の渦度を速度に変えたバーガス方程式について考える。式の左辺第1項の時間的な変化と第2項の空間的な変化を組み合わせ、非線形項（対流項）のモデルとする。これは以下のようになる。（ ε は、モデルにおける影響（結合）定数）

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \varepsilon (u_{j-1}^n - u_j^n) \cdot u_j^n \quad (6)$$

ここで、nは離散時間を表わす。このモデル化には、一般的な非線形項の差分化である風上差分スキームを用いた。

また左辺第1項と右辺の拡散的变化を組み合わせ、拡散項のモデルとする。これは以下のようになる。

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \varepsilon (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n) \quad (7)$$

各モデルの時間に対する変化を図1と図2に示す。

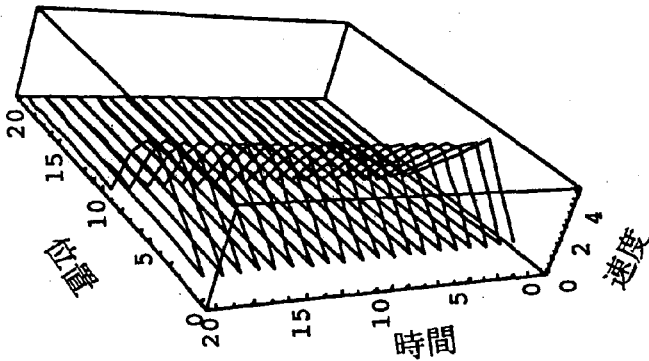


図1. 非線形項のモデル ($\epsilon=0.04$)

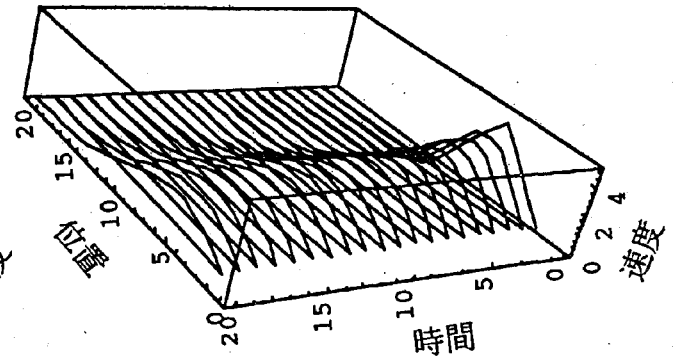


図2. 拡散項のモデル ($\epsilon=0.4$)

各項のモデルを1つのモジュールと考え、それらを組み合わせて方程式全体が示す現象を表わすことを試みる。1次元の(5)式(バーガス方程式)に関して、この方法でシュミレートしたものが図3である。ここでその手順は、物理量(速度)を初めに非線形項のモデルで計算し、次に拡散項のモデルで計算を行った。これは、(5)式を直接解いた方法による結果(図4)と定性的に同じ結果が得られた。特に、直接解くよりもこの方法の方が安定した結果を得ることができた。

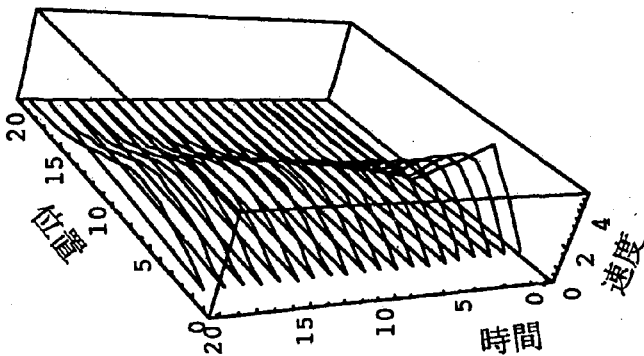


図3. モジュールの組み合わせ

($\epsilon=0.085$ 非線形項, $\epsilon=0.4$ 拡散項)

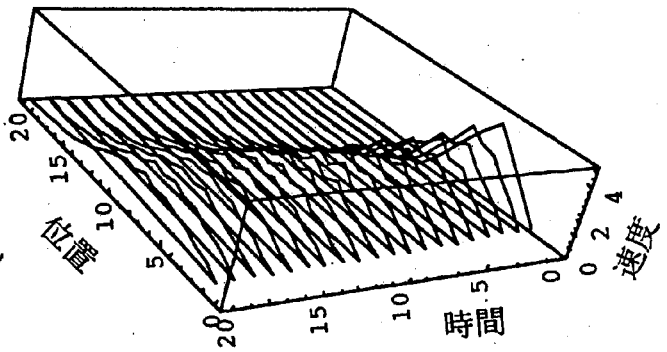


図4. 直接解法

b) 二次元の場合

2次元の現象を表わす(4)式中の各項を、一次元の場合と同様にモデル化する。拡散項の場合は以下になる。(ここで t は離散時間を表わす。)

$$\omega_{ij}^{t+1} = \omega_{ij}^t + \epsilon(\omega_{i+1,j}^t + \omega_{i-1,j}^t + \omega_{i,j+1}^t + \omega_{i,j-1}^t - 4\omega_{ij}^t) \quad (8)$$

非線形項の場合は、1次元のように単純にモデル化することができない。それは、速

度が2つの変数 (xとy方向) を有し、渦度とあわせて3つの変数になるからである。そこで、ここではモデル化に速度と渦度の関係を表わす式 (ビオサバールの式、または渦度の定義式) を用いて2つの成分の速度を渦度に変換し、離散的なモデルを導く。以下に、導いた2次元の非線形項のモデルを示す。

$$\omega_{ij}^{t+1} = \omega_{ij}^t + \varepsilon (\omega_{ij}^t (\omega_{i,j-1}^t - \omega_{i-1,j}^t)) \quad (9)$$

ここで用いた渦度と速度の変換は、それらの関形式を基に近似式で行っており、必ずしも数学的な正確さを有していない。

これら2次元のモデルの時間的な変化を図5と図6に表わす。

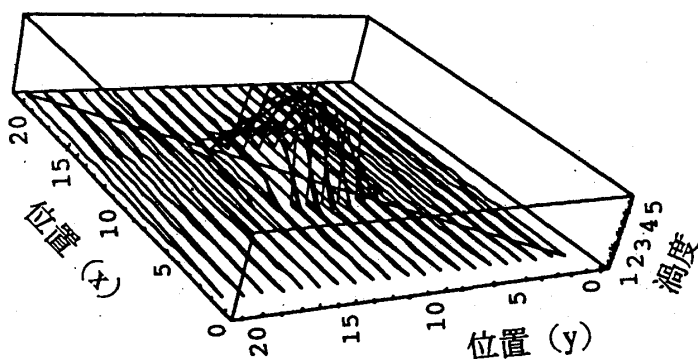


図5. 拡散項のモデル (t=3, ε=0.25)

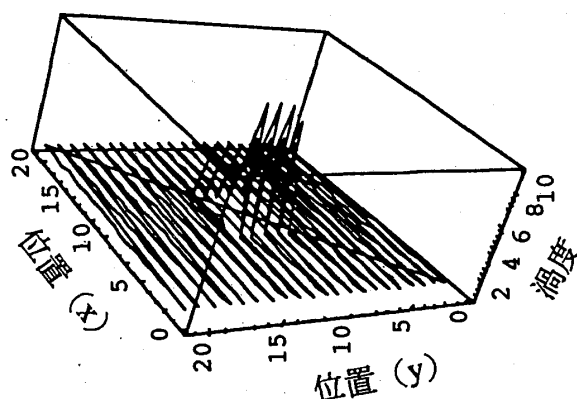


図6. 非線形項のモデル (t=4, ε=0.05)

4. さいごに

流体现象を記述しモデル化およびシュミレートを行うのに、ナビエ・ストークスの方程式より渦度輸送方程式を用いた方が適していると思われる。それは、乱流などの非線形現象の特徴の1つとして渦運動が上げられており、さらに圧力項の消去などの単純化がなされるからである。現在のモデル化では、まだ正確に非線形項を記述しておらず、今後の課題としては、非線形項を正確に記述できるモデル化を行うことである。特に2次元以上の方程式のモデル化に対しては、数学的な正確さと現象論的な正確さを満たすようなモデル化を検討する必要がある。さらに実際の非線形現象の流れ場に適用できるかを検討することも必要である。

連絡先

〒192 東京都八王子市丹木町1-236
 創価大学工学部情報システム学科
 Tel 0426 (91) 2211 (内5408)
 Fax 0426 (91) 9312