多自由度保存系カオスでの動的構造

小西哲郎（名古屋大・理）、金子邦彦（東大・教養）

自然界で我々が目にする様々な空間構造は、大別して２つのタイプがある。一つは結晶や線型な波、孤立波等、定常的で規則的な物である。これらは特徴化が簡単で解析が容易であり、伝統的な物理概念の主役を担ってきた。もう一つは、乱流、液体、微粒子、等であり、秩序構造の存在は認められるものの、非定常で不規則であるがために特徴化が難しく、平均化された量を計算する事以外には解析が容易ではなかった。そのために、これらの秩序が存在する事すら時として忘れられがちである。カオスが再発見されてから３０年位になるが、カオスに対する一つの期待は、不規則な秩序構造を記述しさらには理解する鍵を与えてくれるのではないか、という事である。

今回我々は、前回の続きとして、大域結合を持つ保存系の coupled map lattice に見られる秩序構造の生成と消滅と再生、その相空間構造との関係を議論する。今回は、前回の多粒子系でのクラスター構造の他、斥力粒子系での「ばらばらな秩序構造 (dispersed order)」に付いても述べる。相空間構造の他、拡散係数の時系列上での分布、秩序度の揺らぎなどによりこの構造に迫ってみようと思う。

モデル

１次元 N粒子系の coupled map で大域結合をもち symplectic であるものとして、粒子 $i(=1,2,\cdots,N)$ の座標 x_i と 運動量 p_i の時間発展が次式で定義されるものを考える。

$$p'_i = p_i + \frac{K}{2\pi\sqrt{N-1}}\sum_{j=1}^{N}\sin 2\pi(x_j - x_i)\mathrm{mod}1,\quad x'_i = x_i + p'_i \quad \mathrm{mod}1.$$

$K>0$ では引力の、$K<0$ では斥力の長距離相互作用を持つ。この系は、$|K|$ が小さい時には初期条件により、粒子間の相関がほとんど無い相（無秩序相）あるいは非常に強い相（秩序相）の２通りの運動形態を持つ。$K>0$（引力）の場合には秩序相では粒子が１つの大きなクラスターを作って運動する [1]。

dispersed order について

$K<0$（斥力）の場合には、秩序相は、図１に示すように、各粒子がほぼ均等に分布する状態である。無秩序相と比べ、粒子の集まり具合 $Z \equiv \frac{1}{N}|\sum_{j=1}^{N}\exp(2\pi i x_j)|^2$ の値がほぼ０になることではっきりと区別される。

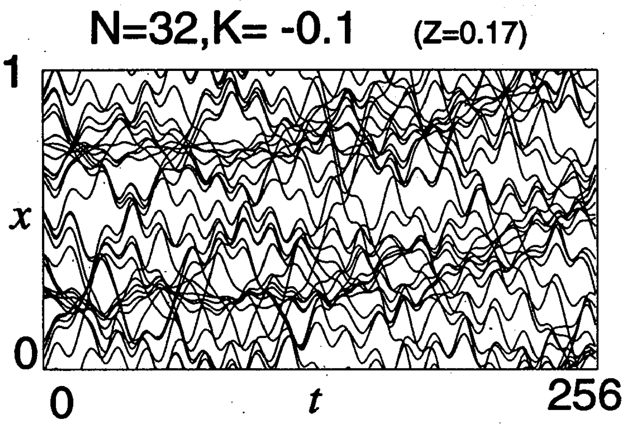

図 1: dispersed state. $N = 32, K = -0.1$

この相を、ばらばらと散らばった秩序相という意味で、'dispersed order' と名付ける。[2, 3]（ばらばらであるという状態で秩序を作っている。）これは Kirkwood-Alder 転移で粒子系が格子上に配列するのと類似しているが、カオスであるために、この秩序は永遠には続かずに、時間がたつと無秩序相へと移行する。

異なる chaotic sea の共存

秩序相・無秩序相ともにカオスであるために、系は秩序相と無秩序相の間を時間的に行き来する事になる。秩序相・無秩序相の違いは結局は相空間の中に 2 種類の異なる性質の chaotic sea が共存している事から来る。秩序相側はハミルトン系の自己相似的な相空間構造を反映したものであり、もう一方はほとんどホワイトノイズ的なものである。その様子は次の表にまとめられる。

2 種類のカオス領域

clustered,dispersed		non-ordered
clustered (or dispersed) state of particles	実空間の構造	none
KAM トーラス、アイランドの残骸	相空間の構造	almost none
べき減衰（特徴的な時間スケールはない）	滞在時間分布	指数減衰

相空間の玉ねぎ構造について

上では、相空間を大きく 2 つに大別して説明したが、実は秩序相側は様々な状態がまるで玉ねぎのように重なっている事がわかった。[2]

初期条件を運動量空間での原点から徐々に変えて行くと、あるいはまた、秩序を持った状態が時間発展する事で、系は次第に秩序を失って行く。この過程で、系の Kolmogolov-Sinai entropy（ここでは正のリヤプノフ数の和で代用する）は単調増加ではなく、ちょうど秩序側と無秩序側の間の

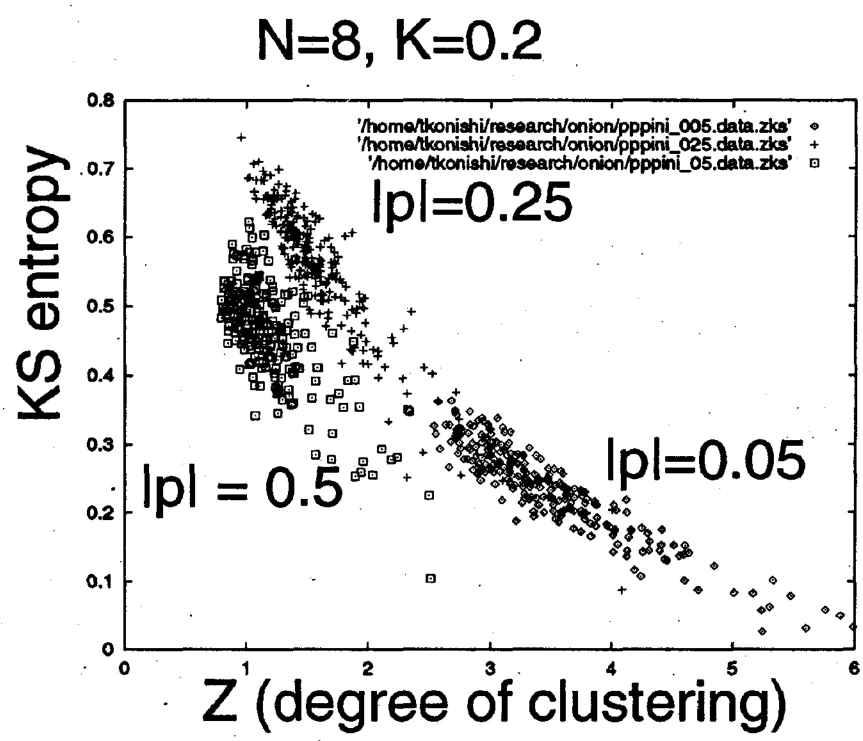

図 2: クラスターの崩壊と KS エントロピー: 1 つの点は 1 つの初期条件を表す。$|p| = 0.25$ はクラスターの崩壊が起きるあたり

ところで最大となる。また、秩序状態の滞在時間は、初期条件での各粒子の運動量を $|p_i| < p_{\rm ini}$ と取った時に、lifetime $\sim \exp\left(\mathrm{const.}/\sqrt{p_{\rm ini}}\right)$ で良く近似される。これは Nekhoroshev 型の評価が出来そうである。その他、詳しくは文献 [2] を参照されたい。

構造遷移における collectivity について

系がある状態から別の状態へ遷移する際に、それが熱的な揺らぎが重なって起きるのかそうではないのかを考えてみたい。もしも熱揺らぎが主な要因であれば、高次元の配位空間にポテンシャル関数を考えてそのバリアを超える確率をボルツマンウェイトで評価する事が出来よう。一方、系の内部で相関が強い場合にはその様な方法が採れない事が予想される。

ここでは構造遷移の際の協同性を見る手法をテストしてみた。$K > 0$ の場合にクラスターが崩壊する過程での、各粒子ごとのリヤプノフベクトルを見てみる。これは、系の不安定性が増大する方向を調べている事になるので、揺らぎが協同的なものかそうではないものかを判断する事が出来ると考えられる。結果は非協同的であった。これは、クラスター→乱雑という、秩序→無秩序の遷移であるためと考えられる。水や微粒子の様に、複数の秩序相を顕著に持つ系でその秩序相たちの間の遷移過程

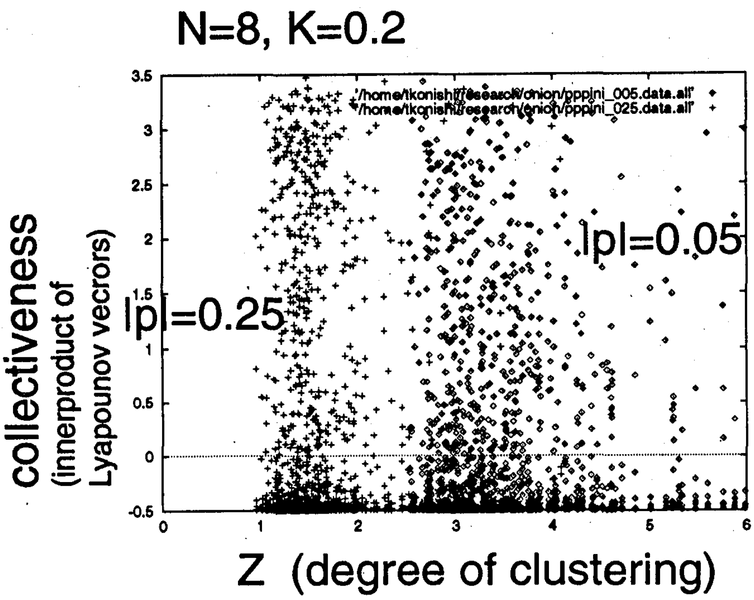

図 3: クラスター状態の崩壊における揺らぎの協同度："□" は $|p| = 0.05$（クラスター状態)、"+" は $|p| = 0.25$（崩壊途中）

を調べてみると良いかも知れない。

相空間の解剖について

この研究で用いた手法では、どれか１つの特性量の１つの値（例えば平均値）で系を判断すると言うよりは、その量の相空間内での分布の様子を調べる事を重視した。(例えば図２や、文献 [2] での図１１、１２。) いわば、相空間を解剖してダイナミクスとの関連を調べるというやり方は、primitive ではあるが強力である。

参考文献

[1] "Clustered motion in symplectic coupled map systems", T. Konishi and K. Kaneko, J. Phys. **A25** (1992) 6283 - 6296

[2] "Peeling the Onion of Order and Chaos in a High-dimensional Hamiltonian System", K. Kaneko and T. Konishi, Nagoya Univ. preprint DPNU-93-23 (to appear in Physica D.)

[3] 余談であるが、この状態を dispersed order と名付けるにあたりいろんな名前を考えてみたのだが、なかなかぴったり来るのがなかった。これまでの 'order' の概念とは違うものを見ている、という事なのかも知れない。