

Title	Fermionhs in Magnetic Field versus Hard-Core Bosons in Two dimensions
Author(s)	高野, 浩志
Citation	物性研究 (1994), 61(6): 664-668
Issue Date	1994-03-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/95271
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Fermions in Magnetic Field versus Hard-Core Bosons in Two dimensions

東大教養 高野浩志

1 Introduction

Hard Core Boson systems は、いろいろな所で見られる興味深い system である。例えば、 $S = \frac{1}{2}$ spin model においては、spin 変数が HCB 変数であらわせるし、 He_4 [1]、や byomenbrane などにみられる強い斥力を持った boson system を調べる際、effective model として、HCB model が採用される。また、最近では anyon の boson class として注目されている。そこでこの系を解析していきたいわけだが、相互作用が入ると、やはり近似に頼らざるを得なくなる。どういう近似理論を持ってあげればいいのか。spin model を解析する際には、昔からよくやられている boson 変数で近似する spin 波近似、また最近では、modified spin 波近似があるのだが、ここでは一様磁場中の fermion 変数で近似することを考察する。このことは、最近の anyon system の研究からわかってきたことで、すでに Heisenberg model に応用して解析した研究もあるが [2]、彼らの解析は不十分の観がある。

研究会では、fermion で近似する際の「こつ」を紹介したので、以下これを記したい。

一言でいえば、統計をかえる Vertex Operator を含めて近似する、ということで先の仕事はこれを考慮していない。まず我々は、簡単な模型として相互作用をしていない free HCB system、(スピン模型では、XY model に対応する) を解析する。基底状態の energy、相関関数、運動量分布などを求める。基底状態の energy に対しては、有限系の exact 数値計算と比較して、近似のよさを見る。2次元、温度0での XY model の相関関数は、解析的に長距離相関が存在することが知られているので [3]、fermion 近似で見ることができかどうかを調べる。

この研究は近畿大 松居哲生氏と金沢大 榊原 和彦氏との共同研究によるものである。

2 Hard Core Boson(HCB) 変数と fermion による近似理論

ここで考える HCB ϕ_x とは、次の様な代数を満たす格子上の operator である。

$$\begin{aligned} [\phi_x, \phi_y] &= [\phi_x, \phi_y^\dagger] = \{\phi_x, \phi_x\} = 0, \\ \{\phi_x, \phi_x^\dagger\} &= 1 \end{aligned} \quad (1)$$

違ったサイト上では boson 代数だが、同じサイト上では fermion 代数なので、0個か、1個しか存在できず、これは強い斥力が働いているボゾンと見なせる。また、0、1個の状態をスピン up,down に対応することもできる。つまり

$$\begin{aligned} S_{1,x} &= \frac{1}{2} (\phi_x + \phi_x^\dagger); \\ S_{2,x} &= \frac{i}{2} (\phi_x - \phi_x^\dagger), \\ S_{3,x} &= \frac{1}{2} - \phi_x^\dagger \phi_x \end{aligned} \quad (2)$$

と言うふうにスピン変数を HCB 変数で書いてやると、(1) の交換関係を用いてスピン変数は通常の交換関係

$$[S_{i,x}, S_{j,x}] = i\epsilon_{i,j,k} S_{k,x} \quad (3)$$

と同時に、違ったサイト同志のスピンは可換という代数を満たすようになる。さて HCB を fermion で記述したいのだが、それにはよく知られている Jordan-Wigner 変換がある。正準 fermion ξ_x を持ってきて、Vertex operator W_x とで、HCB $\phi_x = W_x \xi_x$ が構成できる。Vertex operator W_x も、fermion ξ_x で構成されていて、1次元の場合はよく知られた

$$W_x = \exp i \sum_{z < x} \xi_z^\dagger \xi_z \quad (4)$$

というもので、2次元の場合は、

$$W_x = \exp i \sum_{z:all} G_{xz} \xi_z^\dagger \xi_z \quad (5)$$

ここで、 z は系のすべてのサイトを走り、 G_{xz} は、次式を満たす数である。 $G_{xz} = G_{zx} + \pi$ 。以下では x 軸からの x - z の偏角を採る。free HCB の Hamiltonian は、

$$H_B = -\frac{J}{2} \sum_{\mu;nn} \phi_{x+\mu}^\dagger \phi_x + h.c. \quad (6)$$

と書ける。fermion に変換すれば、

$$H_B = \frac{J}{2} \sum_{\mu;nn} \xi_{x+\mu}^\dagger \exp\{-iA_\mu(x)\} \xi_x + h.c. \quad (7)$$

ここで

$$A_\mu(x) \equiv \sum_z [G_{x+\mu,z} - G_{x,z}] \xi_z^\dagger \xi_z \quad (8)$$

であり、free HCB 系は、nonlocal 相互作用をもつ fermion 系に map されることがわかる。ここでなんらかの近似が必要となる。そこで \exp の肩にある vector potential 的な演算子 A_μ 中の $\xi_z^\dagger \xi_z$ をその期待値 $\langle \xi_z^\dagger \xi_z \rangle$ 即ち密度でおきかえる近似をしよう。その結果得られた近似 Hamiltonian H_F は一様磁場中を動く自由電子の系を記述する Hamiltonian と一致する。この系は我々のよく知るものである。[4]

3 基底状態エネルギー、相関関数

H_B の基底状態 $|g_B\rangle$ は普通小さな系の数値計算で得られる以外、ほとんど知ることはできない。一方 H_F の基底状態 $|g_F\rangle$ は密度に応じて、Landau level に fermion をつめれば得ることができる。我々はこの $|g_F\rangle$ で H_B をはさみ $E_F = \langle g_F | H_B | g_F \rangle$ で $E_B = \langle g_B | H_B | g_B \rangle$ の近似値とする。ちなみに Canright、Wang 等は $E = \langle g_F | H_F | g_F \rangle$ を計算していて、これでもいい近似なのであるが、我々の方がいい近似であることが、数値計算の結果わかる。まず計算すべき量は相関関数である。

$$C_B(x, y) = \langle g_B | \phi_x^\dagger \phi_y | g_B \rangle \quad (9)$$

の近似量として、

$$C(x, y) = \langle g_F | \xi_x^\dagger \xi_y | g_F \rangle \quad (10)$$

ではなく、

$$\begin{aligned} C_F(x, y) &= \langle g_F | \phi_x^\dagger \phi_y | g_F \rangle \\ &= \langle g_F | \xi_x^\dagger W_x^\dagger W_y \xi_y | g_F \rangle \end{aligned} \quad (11)$$

を求める。ここで Vertex operator W が入っていることが、大事なこつである。この式を数値計算で求めるために変形すると、次のように行列 Γ で書けることがわかる。

$$\begin{aligned} \langle g_F | \xi_x^\dagger W_x^\dagger W_y \xi_y | g_F \rangle &= \langle g_F | \xi_x^\dagger \exp(-i \sum_z [G_{xz} - G_{yz}] \xi_z^\dagger \xi_z) \xi_y | g_F \rangle \\ &= \frac{1}{2} \det \Gamma_{[xy]} (\Gamma_{[xy]}^{-1})_{x,y} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\Gamma_{[xy]}$ は、 x, y , で指定される行列で、

$$\begin{aligned} (\Gamma_{[xy]})_{z,w} &= \delta_{z,w} + \gamma_{[xy]}^z \gamma_{[xy]}^w \langle g_F | \xi_z^\dagger \xi_w | g_F \rangle \\ (\gamma_{[xy]}^z)^2 &= \exp(-i[G_{xz} - G_{yz}]) + 1 \end{aligned} \quad (13)$$

と書ける。あとは、基底状態のエネルギーを求めるのには、最近接でこれをたしあげればよい。

$$\langle g_F | H_B | g_F \rangle = \sum_{n.n.} \langle g_F | \phi_x^\dagger \phi_y | g_F \rangle + h.c. \quad (14)$$

Fig 1 に、基底状態のエネルギー/リンク と密度を示した。システムサイズは、4 site * 4 site である。白丸は、西森氏等の TITPACK を使った Lanczos method による exact 数値計算の結果である。+印は、Vertex operator を考慮していないもので、黒丸が我々の Vertex operator を考慮したものである。+印でもいい近似にはなっているが、Vertex operator を入れた方が近似を高めていることがわかる。Fig 2 は、相関関数と距離の関係を示している。+印は、 $C(x, y)$ で距離が離れるとすぐに dump していることがわかる。大きなシステムで計算すると $C(x, y)$ は、指数的減衰をしていることが、確認できた。白丸は exact 数値計算のもので、黒丸は、我々の近似のものである。システムサイズは、5 * 5 である。+印より黒丸のほうが、白丸の振る舞いに近いことが見られる。そこでシステムを 20 * 20 にして近似計算を行ったものをドットで示した。遠方で saturation しているようなので、1/距離をとって見たのが Fig 3 である。強引に外挿すると exact も近似のものも nonzero の値をもっていて、解析的な長距離相関の証明を支持するような情報が Vertex operator を考慮する事で得ることができたといえる。

4 まとめと課題

Vertex operator を考慮することで近似があがり、さらに fermion 理論なのにボーズ凝縮と関連がある長距離相関の情報もとりだせることを見てきた。次の課題は、Heisenberg 模型にこの近似を応用することで現在進行中である。途中報告を榊原氏がこの研究会でおこなっているので、参照してください。

参考文献

- [1] T.Matsubara and H.Matsuda, Prog.Theor.Phys. 16(1956)569
- [2] Y.R.Wang, P.R.**B43**,3769,13774(1991)
- [3] T.Kennedy,E.H.Lieb,and B.S.Shastry,P.R.L.61,2582(1989)
K.Kubo and T.Kishi P.R.L.61,2585(1989)
- [4] D.R.Hofstadter, P.R.**B14**,2239(1976)
Y.Hasegawa et.al P.R.L.63,907(1989)

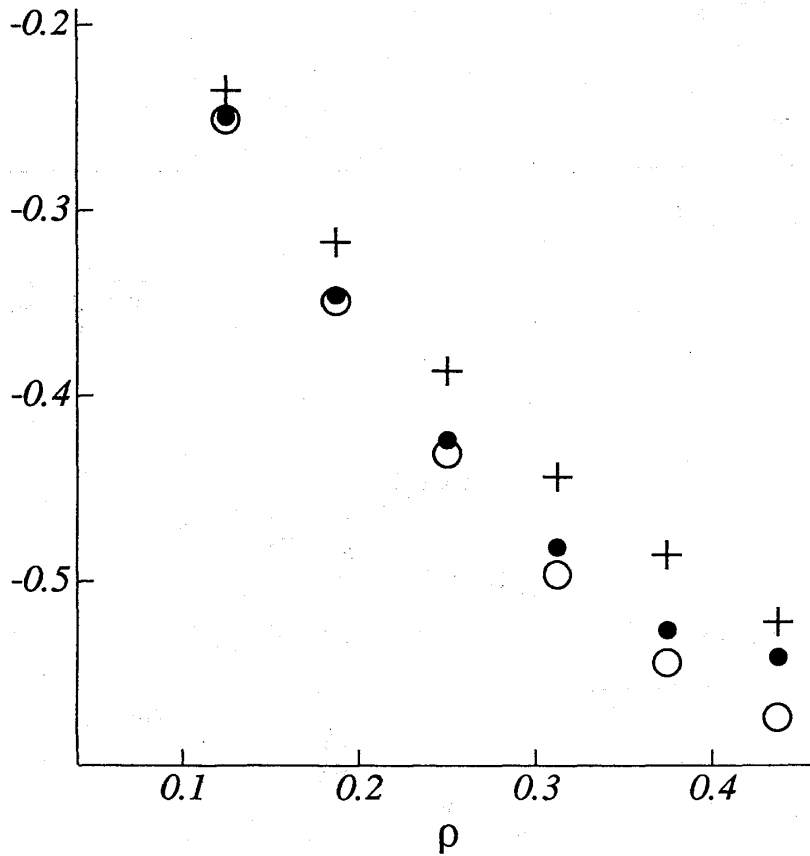


Fig 1

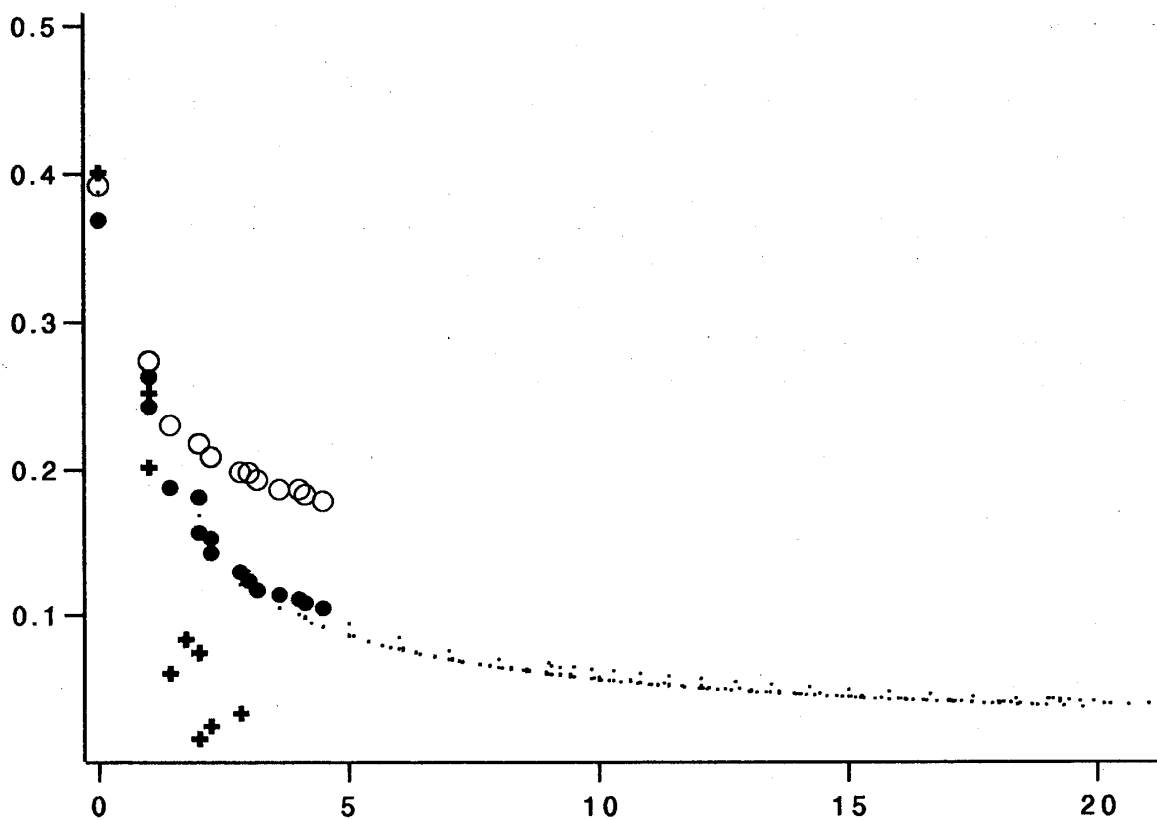


Fig 2

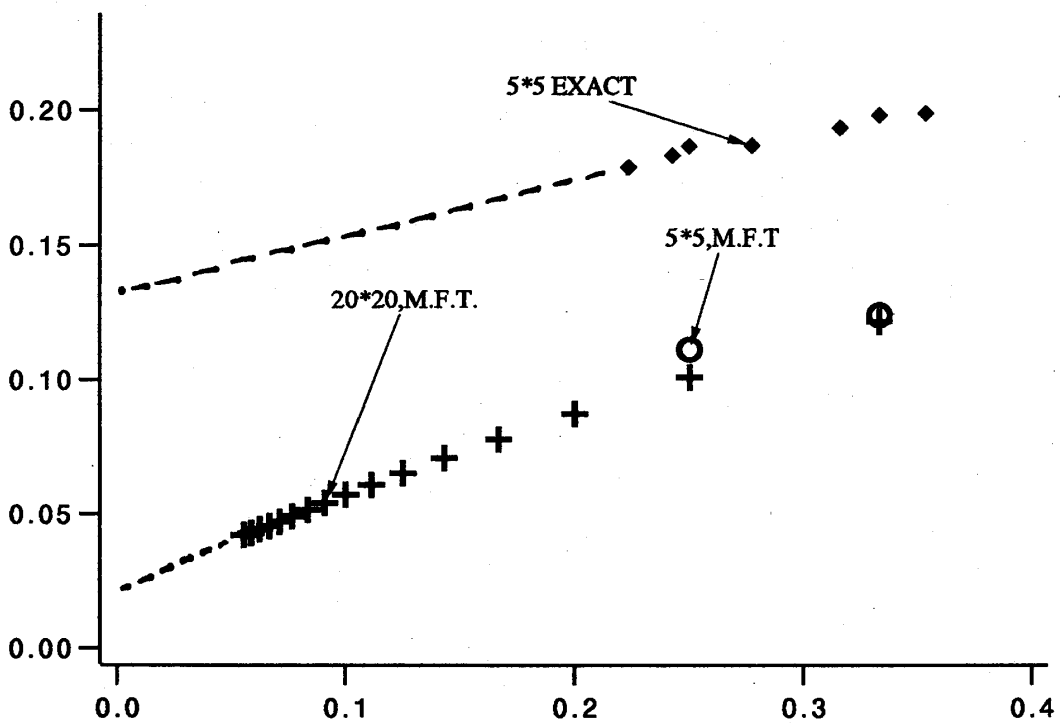


Fig 3