量子確率 Liouville 方程式の時間発展演算子
——その一般的構造——

斎藤　健, 有光敏彦
筑波大物理

1　序論

Non-Equilibrium Thermo Field Dynamics (NETFD) [1]–[4] の枠組みで定式化された**量子確率 Liouville 方程式** [4, 5] を拡張して、**量子確率微分方程式**に対する系統的な体系が構成された [6]–[14] 。

そこでは、まず、与えられた Fokker-Planck 方程式に対応する Stratonovich 型確率 Liouville 方程式が、その時間発展演算子 (**確率的時間発展演算子**) とともに得られる。次に、その Stratonovich 型時間発展演算子から生成される**確率 Heisenberg 方程式**として、Stratonovich 型 Langevin 方程式が導出される。Stratonovich 型 Langevin 方程式から、伊藤型と Stratonovich 型の積の変換公式を経て、伊藤型 Langevin 方程式が得られた。ところで、伊藤型 Langevin 方程式から計算されたモーメントの運動方程式が、対応する Fokker-Planck 方程式から得られる結果と一致する。このことから、この体系が、無矛盾なものであることが確認された。また、伊藤型と Stratonovich 型の積の変換公式を用いて、Stratonovich 型確率 Liouville 方程式から伊藤型確率 Liouville 方程式が得られた。さらに、NETFD の熱空間で定式化された拡張されたコヒーレント表示を用いた位相空間法により、c-数の関数空間に写像された方程式を調べ、この体系が伊藤公式をも含んだものであることが分かった。

しかしながら、その出発点となった Stratonovich 型確率的時間発展演算子は、発見的に見つけられたものであり、その唯一性などは確かめられていなかった。

最近、非定常な量子確率過程を記述する、確率的時間発展演算子が、少数の要請から一般的に導出された [14, 15] 。ここでは、揺動力演算子が定常な量子 Wiener 過程に従う場合に対して、伊藤型及び Stratonovich 型確率的時間発展演算子が、少数の要請から唯一に求まることを示す。

2 NETFD の一般的要請

NETFD [1]–[4] は、散逸のある場の量子論であり、粗視化された量子場に対する正準形式の理論を可能とする。まず、後の議論のために、NETFD の基礎的な道具立てを挙げる。

Tool 1. 任意の演算子 A (通常、粗視化された演算子と確率演算子) に対して、それと組をなすティルド (tilde) 演算子 $\tilde{A}$ が存在する。ティルド共役 (tilde conjugation) $\sim$ は、関係式

$$(A_1A_2)^\sim = \tilde{A}_1\tilde{A}_2, \tag{1}$$

$$(c_1A_1 + c_2A_2)^\sim = c_1^*\tilde{A}_1 + c_2^*\tilde{A}_2, \tag{2}$$

$$(\tilde{A})^\sim = A, \tag{3}$$

$$(A^\dagger)^\sim = \tilde{A}^\dagger, \tag{4}$$

により定義される。ただし、A は演算子であり、c_1、c_2 は c–数である。

Tool 2. 同時刻のティルド付き演算子とティルド無し演算子は互いに可換であり、

$$\langle 1|A^\dagger = \langle 1|\tilde{A}, \tag{5}$$

という関係で結ばれている。

Tool 3. 演算子 A の期待値は、$\langle 1|A|0\rangle$ により与えられる。オブザーバブルはティルド無し演算子のみで構成される。

Tool 4. 熱ブラ真空 (thermal bra vacuum) $\langle 1|$ と熱ケット真空 (thermal ket vacuum) $|0\rangle$ ($|0_f\rangle$) は、ティルド不変 (tilde invariant) である。すなわち、

$$\langle 1|^\sim = \langle 1|, \quad |0\rangle^\sim = |0\rangle, \quad (|0_f\rangle^\sim = |0_f\rangle), \tag{6}$$

が成り立つ。また、$\langle 1|0\rangle = 1$ ($\langle 1|0_f\rangle = 1$) のように規格化されているものとする。添字 f は確率変数で記述される系 (揺らいでいる系) の量を表すものとする。

Tool 5. 系の時間発展は Schrödinger 方程式 ($\hbar = 1$)

$$\frac{\partial}{\partial t}|0(t)\rangle = -i\hat{H}|0(t)\rangle, \tag{7}$$

で記述される。確率変数で記述される系に対しては、Schrödinger 方程式は、確率変数の積の種類によって、

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\ |0_f(t)\rangle, \tag{8}$$

または

$$d|0_f(t)\rangle = -i\hat{H}_{f,t}dt \circ |0_f(t)\rangle, \tag{9}$$

と表される。(8) は伊藤型の積 [16] を、(9) は Stratonovich 型の積 [17] を用いていることを表している。記号 $\circ$ は Stratonovich 型の積を表す。粗視化された演算子に対する Schrödinger 方程式 (7) を、通常 Fokker-Planck 方程式と呼ぶ。また、確率演算子に対する Schrödinger 方程式 (8) 及び (9) を確率 Liouville 方程式と呼ぶ。これらの時間発展方程式は Schrödinger 表示である。

Tool 6. 無限小時間発展演算子$\hat{H}$, $\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$及び$\hat{H}_{f,t}$ は、

$$\left(i\hat{H}\right)^{\sim} = i\hat{H}, \quad \text{確率的時間発展演算子についても同様の関係式}, \tag{10}$$

を満たす。この性質をティルディアン (**tildian**) と呼ぶ。ティルディアン無限小時間発展演算子は一般にはエルミート演算子ではない。

Tool 7. 熱ブラ真空 $\langle 1|$ は、無限小時間発展演算子のゼロ固有値に属する固有状態である。すなわち、

$$\langle 1|\hat{H} = 0, \quad \text{確率的時間発展演算子についても同様の関係式}. \tag{11}$$

これは、確率保存 $\langle 1|0(t)\rangle = 1$ ($\langle 1|0_f(t)\rangle = 1$) を表す。

3 確率的時間発展演算子の導出

伊藤型確率 Liouville 方程式 (8) に現れる semi free 確率的時間発展演算子*$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}$ は、以下の基本的要請により導出される。

A1. semi free 確率演算子は、

$$a(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)a\hat{S}_f(t), \qquad \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)\tilde{a}^\dagger\hat{S}_f(t), \tag{12}$$

と定義される。ただし、演算子$\hat{S}_f(t)$ は方程式

$$d\hat{S}_f(t) = -i\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt\ \hat{S}_f(t), \tag{13}$$

を満足する。初期条件は$\hat{S}_f(0) = 1$ とする。すなわち、注目する系が、揺動力演算子 $dF(t)$ 等で記述される注目しない系と、時刻 $t = 0$ に相互作用を始めたと仮定する†。Schrödinger 表示の確率演算子 a 、$a^\dagger$、$\tilde{a}$、$\tilde{a}^\dagger$ は正準交換関係

$$[a,\ a^\dagger] = 1, \qquad [\tilde{a},\ \tilde{a}^\dagger] = 1, \tag{14}$$

*散逸の効果を含む繰り込まれた非摂動時間発展演算子を、散逸の効果を含まないもの (free 時間発展演算子) と区別して semi free 時間発展演算子と呼ぶ。

†揺動力演算子 $dF(t)$ 、$dF^\dagger(t)$ は、注目する系の Schrödinger 表示の任意の演算子 A と可換であるとする。すなわち、$[A,\ dF(t)] = [A,\ dF^\dagger(t)] = 0$ 。

を満たす。semi free 演算子 (12) は同時刻交換関係

$$[a(t),\ a^{\dagger\!\dagger}(t)] = 1, \qquad [\tilde{a}(t),\ \tilde{a}^{\dagger\!\dagger}(t)] = 1, \tag{15}$$

を満たす。確率的時間発展演算子$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ に対するティルディアンの性質 Tool 6 は、semi free 演算子の定義 (12) と整合性を持つ。前述したように (Tool 6)、ティルディアン時間発展演算子$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ は必ずしもエルミートとは限らない。従って、一般には演算子 $a^{\dagger\!\dagger}(t)$ は $a(t)$ のエルミート共役ではない。このことを強調するため記号 $\dagger\!\dagger$ を導入した。しかし、特に混乱の恐れがない限り、$\dagger\!\dagger$ のかわりに $\dagger$ を用いることにする。また、semi free 確率演算子に対して、粗視化された semi free 演算子と同じ記号 $a(t)$ 等を用いることにする。

A2. semi free 確率演算子は Tool 2

$$\langle 1|a^{\dagger\!\dagger}(t) = \langle 1|\tilde{a}(t), \tag{16}$$

を満たす。

A3. 揺動力演算子は定常 Wiener 過程であるとし、その相関は、

$$\langle dF(t)\rangle = \left\langle dF^{\dagger}(t)\right\rangle = 0, \tag{17}$$

$$\langle dF(t)dF(t)\rangle = \left\langle dF^{\dagger}(t)dF^{\dagger}(t)\right\rangle = 0, \tag{18}$$

$$\left\langle dF(t)dF^{\dagger}(t)\right\rangle = 2\kappa(\bar{n}+1)dt, \tag{19}$$

$$\left\langle dF^{\dagger}(t)dF(t)\right\rangle = 2\kappa\bar{n}dt, \tag{20}$$

と与えられるとする。ただし、$\langle\cdots\rangle = \langle|\cdots|\rangle$ は揺動力演算子 $dF(t)$ についての平均を表す。

A4. 揺動力演算子は Tool 2

$$\langle|dF^{\dagger}(t) = \langle|d\tilde{F}(t), \tag{21}$$

を満たす。

A5. semi free 確率演算子と揺動力演算子は相関がない (伊藤型の積、4章参照)。すなわち、

$$\left\langle a(t)d\mathcal{F}^{\dagger}(t)\right\rangle = 0, \quad \text{etc.}, \tag{22}$$

を満たす。ただし、揺動力演算子 $d\mathcal{F}^{\dagger}(t)$ は、

$$d\mathcal{F}^{\dagger}(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)dF^{\dagger}(t)\hat{S}_f(t). \tag{23}$$

で定義される Heisenberg 表示[‡] の演算子である。

[‡]全時間発展演算子に非線形項が含まれる場合には、ここでの表示は相互作用表示というべきである。ここでは、全時間発展演算子が双線形の場合のみを扱うことにし、この表示を Heisenberg 表示と呼ぶ。

これらの要請を満たす確率的時間発展演算子を以下で求める。

演算子 a 、$a^\dagger$、$dF(t)$ 、$dF^\dagger(t)$ とそのティルド共役について双線形で、かつ位相変換 $a \to a e^{i\theta}$、$dF(t) \to dF(t)e^{i\theta}$ に対して不変な時間発展演算子の一般形は、

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = \hat{H}dt + i\left\{h_1 a^\dagger dF(t) + h_2 a^\dagger d\tilde{F}^\dagger(t) + h_3 \tilde{a}\ dF(t) + h_4 \tilde{a}\ d\tilde{F}^\dagger(t)\right.$$
$$\left. + h_5 \tilde{a}^\dagger d\tilde{F}(t) + h_6 \tilde{a}^\dagger dF^\dagger(t) + h_7 a\ d\tilde{F}(t) + h_8 a\ dF^\dagger(t)\right\}, \tag{24}$$

と書ける。ただし、$\hat{H}$は、

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \omega\left(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\right) - i\kappa\left[(1+2\bar{n})\left(a^\dagger a + \tilde{a}^\dagger \tilde{a}\right) - 2(1+\bar{n})\,a\tilde{a} - 2\bar{n}a^\dagger \tilde{a}^\dagger\right] - i2\kappa\bar{n} \\ &= (\omega - i\kappa)\,\bar{a}^\mu a^\mu - i2\kappa\bar{a}^\mu \bar{n}^{\mu\nu} a^\nu + \omega + i\kappa,\end{aligned} \tag{25}$$

で与えられる [1, 2, 3] 。$\bar{n}^{\mu\nu}$は、

$$\bar{n}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \bar{n} & -\bar{n} \\ 1+\bar{n} & -(1+\bar{n}) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

であり、h_1、h_2等は時間に依存しない c-数である。ωはエネルギーで、κは正の実数、$\bar{n}$は粒子数で、

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{\beta\omega} - 1}, \tag{27}$$

と与えられる。βは温度の逆数$\beta = 1/T$ である。Boltzmann 定数は 1 と置く。(24) において、演算子 $dF(t)$ 、$dF^\dagger(t)$ とそのティルド共役に関する双線形項は、それらが確率収束の意味で c-数になることを考慮して省いた (**A3** 参照) 。

Tool 6 の$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt$ のティルディアンの要請から、(24) は、

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = \hat{H}dt + i\left\{\left(h_1 a^\dagger + h_3 \tilde{a}\right) dF(t) + \left(h_2 a^\dagger + h_4 \tilde{a}\right) d\tilde{F}^\dagger(t) + \text{t.c.}\right\}, \tag{28}$$

となる。**A2** と Tool 7 より関係式

$$h_1 + h_3 = 0, \qquad h_2 + h_4 = 0, \tag{29}$$

を得る。よって、(28) は、

$$\hat{\mathcal{H}}_{f,t} = \hat{H} + i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\}, \tag{30}$$

と表される。ただし、$\hat{H}$は (25) で与えられる。すなわち、

$$\hat{H} = \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a}) + i\hat{\Pi}, \tag{31}$$

$$\hat{\Pi} = -\kappa\left[(a^\dagger - \tilde{a})(\xi a + \eta \tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right] + 2\kappa[\bar{n} + \eta](a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a), \tag{32}$$

である。$\hat{\Pi}$の表式は、

$$\xi + \eta = 1, \tag{33}$$

を満たす実数の c-数ξ、ηを導入することにより、

$$[\xi a + \eta \tilde{a}^\dagger,\ a^\dagger - \tilde{a}] = 1, \tag{34}$$

を満たす正準演算子$\xi a + \eta \tilde{a}^\dagger$、$a^\dagger - \tilde{a}$で表現した。また、

$$dW(t) = h_1 dF(t) + h_2 d\tilde{F}^\dagger(t), \tag{35}$$

で定義される揺動力演算子 $dW(t)$ を導入した。$dW(t)$ の相関は、

$$\langle dW(t)\rangle = \langle d\tilde{W}(t)\rangle = 0, \tag{36}$$

$$\langle dW(t)dW(s)\rangle = \left\langle d\tilde{W}(t)d\tilde{W}(s)\right\rangle = 0, \tag{37}$$

$$\left\langle dW(t)d\tilde{W}(s)\right\rangle = (h_1 + h_2)\left\{h_1^* \left\langle dF^\dagger(s)dF(t)\right\rangle + h_2^* \left\langle dF(t)dF^\dagger(s)\right\rangle\right\}, \tag{38}$$

$$\left\langle d\tilde{W}(s)dW(t)\right\rangle = (h_1^* + h_2^*)\left\{h_1 \left\langle dF^\dagger(s)dF(t)\right\rangle + h_2 \left\langle dF(t)dF^\dagger(s)\right\rangle\right\}, \tag{39}$$

と与えられる。ただし、**A4** を用いた。

ティルド付き演算子とティルド無し演算子の可換性の要請 Tool 2

$$\left\langle dW(t)d\tilde{W}(s)\right\rangle = \left\langle d\tilde{W}(s)dW(t)\right\rangle, \tag{40}$$

により、関係式

$$(h_1 + h_2)h_1^* = (h_1^* + h_2^*)h_1, \qquad (h_1 + h_2)h_2^* = (h_1^* + h_2^*)h_2, \tag{41}$$

また、それと同等の式として、

$$h_1^* h_2 = h_1 h_2^* = (h_1^* h_2)^*, \tag{42}$$

を得る。条件 (42) により、h_1、h_2を、

$$h_1 = \mu \mathrm{e}^{i\theta}, \quad h_2 = \nu \mathrm{e}^{i\theta}, \tag{43}$$

と置くことができる。ただし、$\mu = |h_1|$、$\nu = |h_2|$ である。従って、(38) と (39) は、

$$\begin{aligned}\left\langle dW(t)d\tilde{W}(s)\right\rangle &= \left\langle d\tilde{W}(s)dW(t)\right\rangle \\ &= (\mu + \nu)\left\{\mu \left\langle dF^\dagger(s)dF(t)\right\rangle + \nu \left\langle dF(t)dF^\dagger(s)\right\rangle\right\},\end{aligned} \tag{44}$$

となる。これは、$dW(t)$ と $d\tilde{W}(s)$ が、異時刻 $t \neq s$ でも同時刻 $t = s$ と同様に、確率収束の意味で交換することを示している。左側ベクトル $\langle| dW(t)$ は **A4** を用いて、

$$\langle| dW(t) = (\mu + \nu)\mathrm{e}^{i\theta}\langle| dF(t), \tag{45}$$

と計算される。

さらに、ベクトル $\langle|dW(t)$ と $\langle|dF(t)$ のノルムが等しいという要請

$$\|\langle|dW(t)\| = \|\langle|dF(t)\|, \tag{46}$$

を置くと、μ、νの間の関係式として、

$$\mu + \nu = 1, \tag{47}$$

を得る。この要請は、揺動力演算子 $dW(t)$ と $dF(t)$ の強さが等しいということを表している。位相因子 $e^{i\theta}$を $dF(t)$ と $d\tilde{F}^\dagger(t)$ に押し込むと、(44) と (35) はそれぞれ

$$\begin{aligned}\left\langle dW(t)d\tilde{W}(s)\right\rangle &= \left\langle d\tilde{W}(s)dW(t)\right\rangle \\ &= \mu\left\langle dF^\dagger(s)dF(t)\right\rangle + \nu\left\langle dF(t)dF^\dagger(s)\right\rangle,\end{aligned} \tag{48}$$

及び

$$dW(t) = \mu dF(t) + \nu d\tilde{F}^\dagger(t), \tag{49}$$

となる。ただし、$\mu + \nu = 1$ である。

4　伊藤型及び Stratonovich 型の積

伊藤型 [16] と Stratonovich 型 [17] の積は、それぞれ

$$X^{(H)}(t)\cdot dY^{(H)}(t) = X^{(H)}(t)\left[Y^{(H)}(t+dt) - Y^{(H)}(t)\right], \tag{50}$$

$$dX^{(H)}(t)\cdot Y^{(H)}(t) = \left[X^{(H)}(t+dt) - X^{(H)}(t)\right]Y^{(H)}(t), \tag{51}$$

及び

$$X^{(H)}(t)\circ dY^{(H)}(t) = \frac{X^{(H)}(t+dt) + X^{(H)}(t)}{2}\left[Y^{(H)}(t+dt) - Y^{(H)}(t)\right], \tag{52}$$

$$dX^{(H)}(t)\circ Y^{(H)}(t) = \left[X^{(H)}(t+dt) - X^{(H)}(t)\right]\frac{Y^{(H)}(t+dt) + Y^{(H)}(t)}{2}, \tag{53}$$

で定義される。ただし、$X^{(H)}(t)$ 及び $Y^{(H)}(t)$ は Heisenberg 表示の任意の確率演算子である。すなわち、Schrödinger 表示の演算子 $X^{(S)}(t)$ を用いて $X^{(H)}(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)X^{(S)}(t)\hat{S}_f(t)$ と定義される。また、$X^{(H)}(t)$ の増分 $dX^{(H)}(t)$ は、流れの演算子 $dX^{(S)}(t)$ を用いて $dX^{(H)}(t) = \hat{S}_f^{-1}(t)dX^{(S)}(t)\hat{S}_f(t)$ と定義される。$Y^{(H)}(t)$、$dY^{(H)}(t)$ についても同様である。(50)、(51) 及び (52)、(53) より、Heisenberg 表示の演算子に対する伊藤型と Stratonovich 型の積の変換公式の微分形

$$X^{(H)}(t)\circ dY^{(H)}(t) = X^{(H)}(t)dY^{(H)}(t) + \frac{1}{2}dX^{(H)}(t)\cdot dY^{(H)}(t), \tag{54}$$

$$dX^{(H)}(t)\circ Y^{(H)}(t) = dX^{(H)}(t)\cdot Y^{(H)}(t) + \frac{1}{2}dX^{(H)}(t)\cdot dY^{(H)}(t), \tag{55}$$

を得る。

Heisenberg 表示の演算子の定義に注意すると、Schrödinger 表示の確率演算子に対する変換公式も、(54)、(55) と同じ形

$$X^{(S)}(t) \circ dY^{(S)}(t) = X^{(S)}(t)dY^{(S)}(t) + \frac{1}{2}dX^{(S)}(t) \cdot dY^{(S)}(t), \tag{56}$$

$$dX^{(S)}(t) \circ Y^{(S)}(t) = dX^{(S)}(t) \cdot Y^{(S)}(t) + \frac{1}{2}dX^{(S)}(t) \cdot dY^{(S)}(t), \tag{57}$$

で与えられることが分かる。

5 Stratonovich 型確率的時間発展演算子

変換公式 (57) を方程式 (13) の右辺にある $dW(t)\hat{S}_f(t)$ のような積に適用すると、時間発展演算子の Stratonovich 型運動方程式が得られる。その表式は、

$$\begin{aligned}
d\hat{S}_f(t) &= -i\left[\hat{H}\,dt + i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\}\right]\hat{S}_f(t) \\
&= -i\left[\hat{H}\,dt - i(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a)dW(t)d\tilde{W}(t)\right. \\
&\qquad \left. +i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\}\right] \circ \hat{S}_f(t) \\
&= -i\hat{H}_{f,t}dt \circ \hat{S}_f(t),
\end{aligned} \tag{58}$$

となる。$\hat{H}_{f,t}dt$ は、Stratonovich 型の semi free 無限小確率的時間発展演算子で

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{f,t}dt &= \hat{H}\,dt - i(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a)dW(t)d\tilde{W}(t) + i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\} \\
&= \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger\tilde{a})dt - i\kappa\left\{(a^\dagger - \tilde{a})(\xi a + \eta\tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right\}dt \\
&\quad +i\left\{2\kappa[\bar{n} + \eta]dt - dW(t)d\tilde{W}(t)\right\}(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a) \\
&\quad +i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\},
\end{aligned} \tag{59}$$

と定義される。ここで、Stratonovich 型時間発展演算子は、拡散を記述する

$$(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a), \tag{60}$$

を含む項に依存しないという要請を置く。これより、

$$dW(t)d\tilde{W}(t) = 2\kappa[\bar{n} + \eta]dt. \tag{61}$$

を得る。

一方、定常な揺動力の相関は、(19) 及び (20) で与えられるので、(48) より、

$$\left\langle dW(t)d\tilde{W}(t)\right\rangle = 2\kappa(\bar{n} + \nu)dt, \tag{62}$$

が得られる。これは、確率収束の意味で、

$$dW(t)d\tilde{W}(t) = 2\kappa(\bar{n} + \nu)dt, \tag{63}$$

を与える。(61) と (63) を比較して、

$$\eta = \nu, \tag{64}$$

を得る。

6 まとめ

定常 Wiener 過程に従う揺動力演算子により生成される、量子系の確率過程に対して、量子確率 Liouville 方程式の semi free 確率的時間発展演算子を導出した。伊藤型時間発展演算子は、

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{H}}_{f,t}dt = {}& \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a})dt - i\kappa\left\{(a^\dagger - \tilde{a})(\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right\}dt \\ & + i2\kappa(\bar{n} + \nu)(a^\dagger - \tilde{a})(\tilde{a}^\dagger - a) \\ & + i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\},\end{aligned} \tag{65}$$

と与えられる。一方、Stratonovich 型時間発展演算子は、

$$\begin{aligned}\hat{H}_{f,t}dt = {}& \omega(a^\dagger a - \tilde{a}^\dagger \tilde{a})dt - i\kappa\left\{(a^\dagger - \tilde{a})(\mu a + \nu \tilde{a}^\dagger) + \text{t.c.}\right\}dt \\ & + i\left\{(a^\dagger - \tilde{a})dW(t) + \text{t.c.}\right\},\end{aligned} \tag{66}$$

となる。ただし、$\mu + \nu = 1$ であり、$dW(t)$ は、

$$dW(t) = \mu dF(t) + \nu d\tilde{F}^\dagger(t), \tag{67}$$

で定義され、その相関は、

$$\begin{aligned}\left\langle dW(t)d\tilde{W}(t)\right\rangle &= \left\langle d\tilde{W}(t)dW(t)\right\rangle \\ &= \mu\left\langle dF^\dagger(t)dF(t)\right\rangle + \nu\left\langle dF(t)dF^\dagger(t)\right\rangle \\ &= 2\kappa(\bar{n} + \nu)dt,\end{aligned} \tag{68}$$

で与えられる。$dF(t)$ と $dF^\dagger(t)$ の相関は、(19) と (20) で与えられる。

前の論文 [6, 7, 10] では、Stratonovich 型確率的時間発展演算子 (66) は、理論体系が Fokker-Planck 方程式と矛盾しないように発見的に与えられた。

ここでは、伊藤型確率的時間発展演算子 (65) が、位相不変な系に対して少数の要請から、唯一に求められた。Stratonovich 型確率的時間発展演算子 (66) は、伊藤型と Stratonovich 型の積の変換公式を用いて、(65) から得られた。

この事実は、時間発展演算子 (65) と (66) を基に構成された、量子確率微分方程式の体系の正当性、及び一般性を示している。

参考文献

[1] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **74** (1985) 429.

[2] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 32.

[3] T. Arimitsu and H. Umezawa, Prog. Theor. Phys. **77** (1987) 53.

[4] T. Arimitsu, *Thermal Field Theories*, eds. H. Ezawa, T. Arimitsu and Y. Hashimoto (North-Holland, 1991) p. 207.

[5] T. Arimitsu, Phys. Lett. **A153** (1991) 163.

[6] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **6** (1992) 1319.

[7] T. Arimitsu and T. Saito, Vistas in Astronomy, **37** (1993) 99.

[8] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, Physica **A177**, (1991) 329.

[9] T. Arimitsu, M. Ban and T. Saito, in *Structure: from Physics to General Systems*, eds. M. Marinaro and G. Scarpetta (World Scientific, 1991), p. 163.

[10] T. Arimitsu and T. Saito, Bussei Kenkyu **59-2** (1992) 213, in Japanese.

[11] T. Saito and T. Arimitsu, Modern Phys. Lett. B **7** (1993) 623.

[12] T. Saito and T. Arimitsu, "Quantum Stochastic Liouville Equation of Ito Type" Mod. Phys. Lett. B in press.

[13] T. Arimitsu and T. Saito, "Quantum Stochastic Differential Equations in Phase-Space Methods", U of Tsukuba preprint, March 1993.

[14] T. Arimitsu, Lecture Note of *Summer School for Younger Physicists in Condensed Matter Physics* (1993) [published in *Bussei Kenkyu* **60** (1993) 491, written in English].

[15] T. Arimitsu, "Quantum Brownian Motion in Non-Equilibrium TFD", to appear in *Proc. 3rd Workshop on Thermal Field Theories and Their Applications* (1993).

[16] K. Ito, Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944) 519.

[17] R. Stratonovich, J. SIAM Control **4** (1966) 362.