「秩序生成と崩壊過程の理論」

東大理　　鈴木増雄

1. はじめに

秩序生成の問題は非平衡系の統計物理の中でも特に重要な興味深い課題であり、すでに多くの研究が行われている[1~5]。ここでは，一つのマクロ変数に関するランジュバン方程式をスケーリング極限で漸近的に解く方法をまずレビューする。さらに、この一般化にふれ、その方程式のリアプーノフ指数がゆっくりと時間と共に変化する場合には、秩序崩壊過程も取り扱うことができることを示す。最後に、ランジュパン方程式と等価なフォッカー・プランク方程式を代数的に解く方法を議論し、これに関連して、順序づき指数演算子の一般分解理論を説明する。

2. 秩序生成のスケーリング理論

秩序パラメータ x の時間変化を現象論的に扱うには、次のランジュバン方程式

$$\frac{dx}{dt} = \gamma x - gx^3 + \eta(t) \quad ; \quad \gamma > 0 \tag{1}$$

から出発するのが便利である。ただし、$\eta(t)$ は白色のガウシャン・ノイズとする:

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\varepsilon\delta(t-t') \tag{2}$$

さて、(1) の線形近似 ($g=0$) に対する解 $x(t)$ のゆらぎ $\langle x^2(t) \rangle$ は,$x(0)=0$ として、

$$\langle x^2(t) \rangle_{(l)} = \frac{\varepsilon}{\gamma}(\mathrm{e}^{2\gamma t}-1) \tag{3}$$

と与えられる。このゆらぎは、時間 t が大きくなると、$\varepsilon \mathrm{e}^{2\gamma t}$に比例して指数関数的に大きくなる。

非線形の項 $(-gx^3)$ を考慮すると、$\varepsilon \mathrm{e}^{2\gamma t}$の高次もすべてとり込まなければならない。詳しい研究[1~5]によると、スケーリング極限

$$sc-\lim = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t\to\infty(\varepsilon\exp(2\gamma t)=\text{一定})} \tag{4}$$

では

$$\frac{\langle x^2(t) \rangle}{\langle x^2 \rangle_{st}} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\xi^2/2} \frac{\xi^2\tau}{1+\xi^2\tau} d\xi \tag{5}$$

で与えられる。但し、τは次式

$$\tau = \frac{g\varepsilon}{\gamma^2}\mathrm{e}^{2\gamma t} \tag{6}$$

で定義されるスケーリング変数である。また、$\langle x^2\rangle_{st} = \gamma/g$である。この漸近解 (5) の特徴は、$t \to \infty$ で正しい定常解 $\langle x^2\rangle_{st}$に近づくことである。これは、非線形の効果が漸近的に正しくとり込まれているからである。

このように、秩序生成のスケーリング理論はゆらぎと非線形の効果をうまくとり入れる定式化を与える。ここまでは、すでに 1970 年代に確立された[1~5]話であるが、最近、秩序崩壊過程が問題になってきている。これは次節で議論する。

3. 秩序崩壊過程の理論

最初無秩序状態 $x(0) = 0$ から出発し、途中の時間領域すなわちオンセットタイム

$$t_0 \sim \frac{1}{\gamma}\log(\frac{\gamma^2}{g\varepsilon}) \tag{7}$$

で秩序が生成され始め、十分時間が経過したとき、秩序生成が完了する。今までの理論では、ここで終りとなるが、もし系に内在する力によって非常にゆっくりと growing rate パラメータγが負の値に変わる場合を考えると、秩序はやがて再び崩壊していくことになる。前節の漸近的な取り扱いにおいてγの時間変化を表わすパラメータ t のみを「断熱パラメータ」と考えて解を拡張することによって、秩序崩壊過程を議論することができる。詳しくは、文献 6) を参照して頂きたい。

4. Fokker-Planck 方程式と指数演算子

ランジュバン方程式は、系が時刻t において x をとる確率 $P(x,t)$ に関する Fokker-Planck 方程式に変換できる：

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \mathcal{L}P(x,t). \tag{8}$$

ただし、

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{drift}} + \mathcal{L}_{\text{diff}}, \tag{9}$$

および

$$\mathcal{L}_{\text{drift}} = -\frac{\partial}{\partial x}\alpha(x),\ \ \mathcal{L}_{\text{diff}} = \varepsilon\frac{\partial^2}{\partial x^2}. \tag{10}$$

ここで、$\alpha(x)$ は$\eta(t) = 0$ に対する系の時間変化を表わす項であり、(1) 式に対する$\alpha(x)$ は $\alpha(x) = \gamma x - gx^3$で与えられる。$\gamma$が時間による場合には、$\alpha(x)$ は$\alpha(x,t)$ のように時間 t に依存することになり、(8) の時間発展演算子 $\mathcal{L}$ は $\mathcal{L}(t)$ のように時間に依存することになる。さて、(8) の形式解は

$$P(x,t) = \mathrm{e}^{t\mathcal{L}}P(x,0) \tag{11}$$

と与えられる。したがって、$\mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$がうまく計算できれば、(11) の解の様子がわかることになる。一つの方法は、$\mathcal{L}$ を (9) のように互いに非可換な２つの演算子に分け、$\mathrm{e}^{t\mathcal{L}}$を適当な指数

積に分割することである[2,3,5]。また、$\mathcal{L}$ が時間による場合には、

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = \mathcal{L}(t)P(x,t). \tag{12}$$

となり、この形式解は

$$P(x,t) = (\exp_{\rightarrow} \int_0^t \mathcal{L}(s)ds)P(x,0) \tag{13}$$

のように書ける。ただし、ここで、次のように定義される順序づき指数演算子を用いた：

$$\begin{aligned}\exp_{\rightarrow} \int_0^t \mathcal{L}(s)ds &= 1 + \int_0^t \mathcal{L}(s)ds + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2) + \cdots \\ &\quad + \int_0^t dt_1 \int_0^{t_2} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\cdots\mathcal{L}(t_n) + \cdots\end{aligned} \tag{14}$$

このような順序づき指数演算子の分解理論を次節で議論する。

5. 順序づき指数演算子の一般分解理論

最近、指数演算子 $e^{x(A+B)}$を e^{xA} と e^{xB}を用いて分解する一般論が発見された[7]。

超演算子 $\mathcal{T}$を

$$F(t)e^{s\mathcal{T}}G(t) = F(t+s)G(t) \tag{15}$$

によって定義する。すなわち、$F(t)$ が時間 t に関して微分可能なときは、$\mathcal{T}$は

$$\mathcal{T} = \frac{\bar{\partial}}{\partial t} \tag{16}$$

と等価である。この超演算子 $\mathcal{T}$を用いると、次の定理が成り立つ[7]: $s > 0$ に対して、

$$\exp_{\rightarrow} \int_t^{t+s} \mathcal{H}(u)du = \exp[s(\mathcal{H}(t) + \mathcal{T})] \tag{17}$$

この定理を用いると、順序づき指数演算子 (14) は通常の指数演算子 $e^{x(A+B)}$の高次分解の問題に帰着される。一般に、

$$\mathcal{H}(t) = A_1(t) + A_2(t) + \cdots + A_q(t) \tag{18}$$

とおき、さらに、時間発展演算子を

$$U(t+s,t) = \exp_{\rightarrow} \int_t^{t+s} \mathcal{H}(u)du \tag{19}$$

と定義すると、

$$U(t+s,t) = U(t+s,t+(n-1)\Delta t)U(t+(n-1)\Delta t, t+(n-2)\Delta t)\cdots U(t+\Delta t, t) \tag{20}$$

と書くことができる。ただし、$\Delta t = s/n$ である。ここで n を十分大きくすれば、Δt はそれに応じて十分小さくすることができる。そこで、(20) において各時間発展演算子を $\{\exp(xA_j(t))\}$ の積として表わし、高次近似式を作る。

例えば、Δt の 1 次近似式は

$$U_1 = (t+\Delta t, t) = \mathrm{e}^{\Delta t A_1(t+\Delta t/2)} \cdots \mathrm{e}^{\Delta t A_q(t+\Delta t/2)} \tag{21}$$

と与えられる。同様に、2 次近似式は、

$$U_2 = (t+2\Delta t, t) = \mathrm{e}^{\Delta t A_1(t+\Delta t)} \cdots \mathrm{e}^{\Delta t A_{q-1}(t+\Delta t)} \mathrm{e}^{2\Delta t A_q(t+\Delta t)} \mathrm{e}^{\Delta t A_{q-1}(t+\Delta t)} \cdots \mathrm{e}^{\Delta t A_1(t+\Delta t)} \tag{22}$$

と書ける。さらに、3 次以上の高次分解公式も通常の時間によらない場合の分解公式から直ちに導くことができる。

最近は、この分解公式は Aharonov-Bohm 効果の数値的解析などにも使われている[8)]。また、マクロトンネル効果の理論的研究などにも有効に使われ始めている[9)]。

参考文献

1) 鈴木増雄, 岩波講座:現代の物理学 4『統計力学』第 4 章参照 (1994 年 4 月発刊) 。
2) M. Suzuki : Adv. Chem. Phys. 46 (1981) 195.
3) G. Nicolis, G. Dewel and J.W. Turner(eds.) :Order and Fluctuations in Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics (Wiley, 1981).
4) K. Kawasaki, M. Suzuki and A. Onuki(eds.) : Formation, Dynamics and Statistics of Patterns, Vol.1 and K. Kawasaki and M. Suzuki(eds.) : –, vol.2 (1993).
5) M. Suzuki, Prog. Theor. Phys. Supple. **65** (1980) 160.
6) M. Suzuki, in “Nonlinear Fluctuations” edited by T. Hida et al. (World Scientific, 1994).
7) M. Suzuki, Prog. Japan. Acad. **69** Ser.B (1993) 161 およびその参考文献参照。
特に、無限次までの分解理論が、M. Suzuki, Phys. Lett. **A146** (1990) 319 で初めて見い出された。
8) H.De Raedt and K. Michielsen, 前刷。
9) S. Miyashita, 準備中。