

## メカニカルアロイングとカオス

京都大学工学部  
石原慶一、新宮秀夫

### 1 メカニカルアロイング

メカニカルアロイング (MA) 法は 1970 年 J.S.Benjamin が Ni 基超合金中に酸化物を分散させるために開発した [1]。その後、この方法によりアモルファス相が生成できるなど色々な用途に用いられるようになり最近、多くの研究が行なわれるようになった。

普通メカニカルアロイングには出発原料を粉末としボールミルやアトライターなどのような粉砕機が用いられる。このような方法だとボールとボールに挟まれる確率でプロセスが支配され、どのような変形が材料に起こっているか調べるのが困難である。そこでもっと有効に行なえる方法として Deterministic MA 法が考えられている [2]。

### 2 Deterministic MA

我々は Deterministic MA 法として主に繰り返し圧縮法を用いて実験を行ってきた。その結果、生成物は通常の MA 法と変わらないことが分かった。また、毎回同様の変形を材料に加えられるのでその都度どのように材料が変化していくかを追跡することが可能となった。図 1 に繰り返し圧縮の概略図を示す。

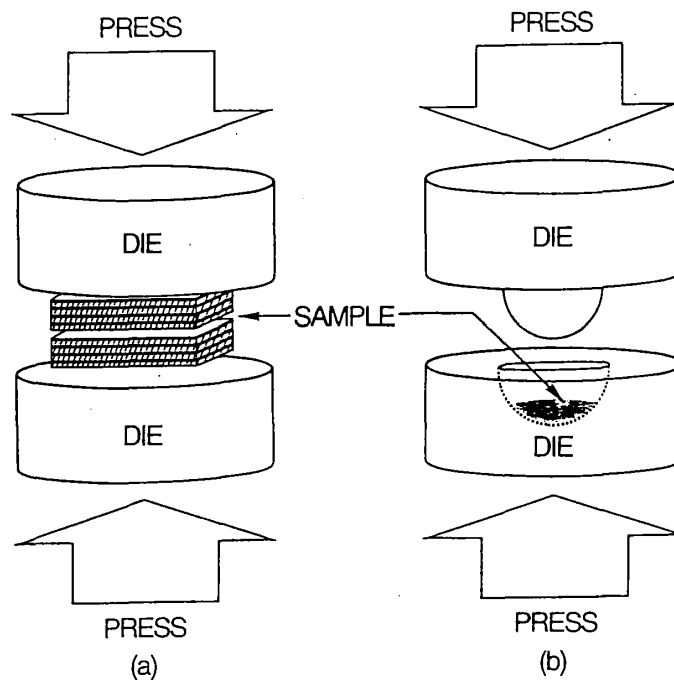


図 1: Schematicview of the repeating procedure. (a) repeated pressing of layered thin foils. (b) repeating pressing of powders.

また、繰り返し圧縮だけでなく、乳鉢による MA や金属箔を積み重ねたものの圧縮なども行なった。この方法によりメカニカルアロイング法は層状組織を細かくしていく過程であることが分かった。

### 3 Deterministic Chaos

#### 3.1 ロジスティック写像

非線形微分方程式の解で周期的でなく不規則で複雑な軌道を描くものがある。そのような解はカオスと呼ばれている。カオス状態は一見非常に不規則なように見えるがその一つ一つは厳密に方程式に従っている。このような現象を特に取り上げて Deterministic Chaos と呼ばれている。最も有名な一次元カオスにロジスティック写像がある。これは生態系の個体数の遷移を示す単純な微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = \mu x(1-x) \tag{1}$$

を差分化して得られる。すなわち、

$$x_{n+1} = x_n + \Delta t \mu x_n(1-x_n) \tag{2}$$

に変数変換

$$x = \frac{\Delta t \mu}{1 + \Delta t \mu} x \tag{3}$$

を施し、 $a = 1 + \Delta t \mu$  と置換すれば

$$x_{n+1} = ax_n(1-x_n) \tag{4}$$

が得られる。実際、個体数の推移は連続的ではなくこのような離散系のほうが実際をよく指し示している場合も有りうる。

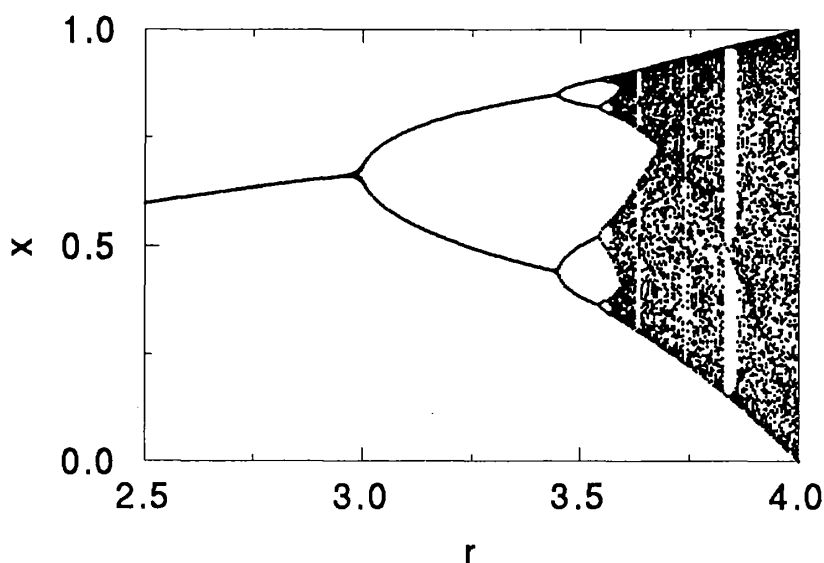


図 2:  $x_n$  ( $100 < n < 200$ ) vs  $r$  in the logistic function.

一般的に、微分方程式で表される連続関数である場合も離散的にサンプリングすることにより(ポアンカレ断面を見ている)離散系に話をすすめることができる。さて、任意の初期値  $x_0$  に対して  $x_n$  の推移を見ていくと図のようになる。

$a_\infty < a \leq 4$  の領域はカオス領域と呼ばれている。

### 3.2 2次元の写像

一般に2次元の写像を以下のように定義する。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n) \end{aligned} \tag{5}$$

ここでは、面積が一定の写像、すなわちヤコビアンが1のものだけについて考えることにする。

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 1 \tag{6}$$

面積一定写像 (area preserving mapping) の典型的な例として次のような写像が一般に考えられる。

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + f(y_n) \\ y_{n+1} &= y_n + g(x_{n+1}) \end{aligned} \tag{7}$$

これは、材料変形の立場で言うともまず  $x$  方向に剪断変形を行ない、その後、 $y$  方向に剪断変形を行なうことに該当する。

まず最も簡単な例として剪断変形のみが与えられる場合、すなわち(8)式において

$$f(y) = y, g(x) = 0 \tag{8}$$

と置いた場合である。

次ぎに、もう一つ簡単な例として圧縮変形がある。ベーカーズ変形と呼ばれている。特に、厚さを半分にして積み重ねる場合、

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} & (x \leq 1/2) \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} & (x > 1/2) \end{cases} \tag{9}$$

この変換は2進展開して書くと次のようになる。

$$\begin{aligned} x_n &= 0.a_1a_2a_3a_4\cdots \\ y_n &= 0.b_1b_2b_3b_4\cdots \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 0.a_2a_3a_4a_5\cdots \\ y_{n+1} &= 0.a_1b_1b_2b_3\cdots \end{aligned} \tag{11}$$

このように、 $x$  から  $y$  に一桁ずつ移していることに他ならない。

一般には  $f, g$  を非線形にした場合が考えられ、二次関数にした場合を次に示す。

$$\begin{aligned} f(y) &= 4(y - 0.5)^2 \\ g(x) &= (x - 1)^2 \end{aligned} \tag{12}$$

## 4 メカニカルアロイングとカオス

メカニカルアロイングとカオスは写像の繰り返しという点で多くの共通点がある。カオス理論を流体の混合に応用した研究 [3] はあるがこのように固相の混合に応用した例はない。

カオスの本質は引き伸ばしと折り畳みにある。そのためカオスになるには稠密に点が詰まった実関数である必要がある。ところが我々が扱っている材料は原子からできており厳密に言うと稠密ではない。従ってマクロ組織の遷移はカオス理論により説明が付くがたとえ写像の通り変形が起こったとしても実際に原子がどのように動いて、例えばアモルファス構造になるかを説明することはできない。

KAM 理論によるとある小さい変形量しか与えられないような写像の時不変トーラスができその中と外ではほとんど混じらないことがある [4]。メカニカルアロイングにおいてもある変形量以上にしないとアロイングがほとんど進行しないという現象はよく見受けられる。従って最適に混合する方法はカオス理論を通じて分かる可能性がある。

### 参考文献

- 1 J.S.Benjamin, Metall. Trans. 1 (1970) 2943.
- 2 工業材料 40 no.8 (1992) 18.
- 3 J.M.Ottino et al., Nature 333 (1988) 419.
- 4 J.A.G.Roberts and G.R.W.Quispel, Phys. Rep. 216 (1992) 63.

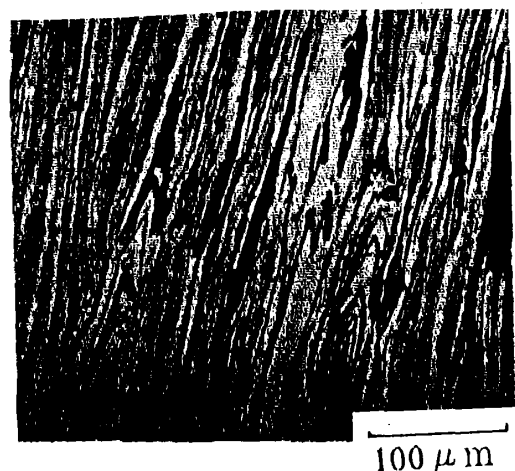
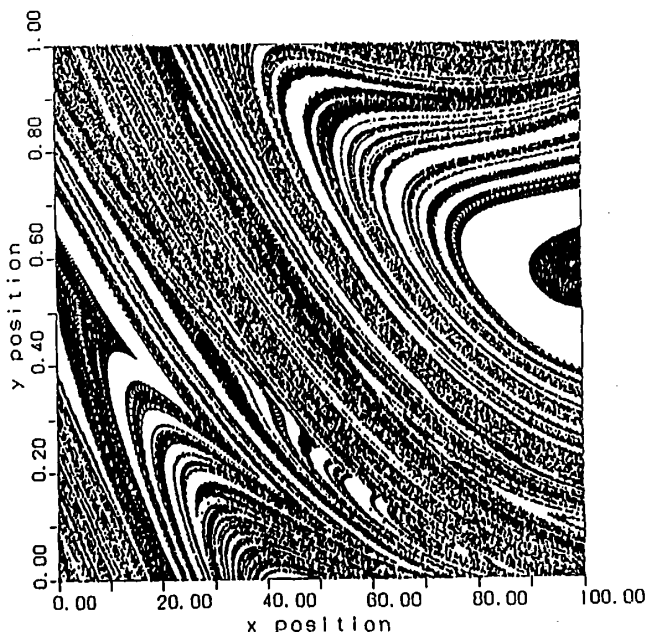


図 4: The structure of MA sample after 15 repeated pressing Fe 70%Ag sample.

図 3: The structure after 5 times of mapping in eq. (12).