# 遅延をふくむフィードバック系の非線形ダイナミクス

立命館大学理工学部物理教室　　　　池田　研介

## I. 遅延をふくむフィードバック系

光学系と音響系はデバイスとして見たときに極めて類似している。ともに動作媒体は電磁波（波長＝１０−４ｃｍ）と音波（波長数１０センチメートル）という違いがあるが共に古典波動である。したがって、レーザーや楽器をみて分かるように共に媒体を溜めておくための共鳴器を供えている。共鳴器は共鳴を利用してその中に電磁波あるいは音波のエネルギーを大振幅で蓄える。共鳴器は非線形な特性を持つパワーサプライヤーと結合し、そのなかで共振する周波数の波を自励発振する。(1) 典型的な光学系の例として二枚の平行な鏡で囲まれた共鳴器に非線形な屈折媒質を閉じ込めたいわゆる受動型非線形共振器を考えよう。この系はそのままではレーザーのように自励発振しないが、鏡（半透明）を通して外から光を注入すると、アクチヴな様々な機能をあらわすデバイスである。(2) 共鳴器は環状の導波路をつくりその中には非線形誘電媒質が満たされている。導波路の一部を構成する半透明鏡を通して、高速道路へのインターチェンジよろしくレーザー光が導入され、環状路に沿って光はぐるぐる伝搬・周回する。さらに、半透明鏡を通して周回光の一部がアウトプットとしてとりだされる。

理論的に、この系は共鳴器内をマックスエル方程式にしたがって伝わる電磁波と、それに相互作用しながら変化する非線形誘電媒質の運動方程式（光学的ブロッホ方程式）の連立方程式というかなり複雑な時間−空間に依存する場の方程式系で記述される。しかし、１９７９年、筆者によってこの方程式系を変換して空間変数を消去する方法が発見され、(3) この系はある極限で次の型の簡単な方程式で表現できることが明らかになった。(4)

$$\gamma^{-1} dx(t)/dt = -x(t) + f(x(t-t_R)), \qquad (1)$$

この方程式は非線形フィードバック項ｆ（ｘ）に共振器内を光が往復する時間$t_R$を時間遅れとしてふくむので遅延微分方程式 (delay-differential equation)と呼ばれる。このに系は時間を$t_R$を単位にして区間（$nt_R$、$(n+1)t_R$）（ｎ：整数）に分割し、ｎ区間内での解を$x_n(\tau)$（$0 \leqq \tau < t_R$）と書くと関数から関数への写像$x_{n-1}(\tau) \longrightarrow x_n(\tau)$、すなわち

$$x_n(\tau) = x_{n-1}(t_R)e^{-\gamma\tau} + \int_0^{\tau} ds\, e^{-\gamma(\tau-s)} f(x_{n-1}(s)) \qquad (2)$$

を定義している。したがって初期データ$x_0(\tau)$を与えると、以後の運動は一義的に決定される。なお、管楽器のようにに局在化した非線形デバイス（管楽器の場合だとリードがそれにあたる）が入力→伝搬・反射→出力特性をもつ線形共振器と結合した系を一般に

$$dx(t)/dt = F(x, y) \quad \text{（デバイス方程式）} \tag{3a}$$
$$y(t) = L(x(t)) \quad \text{（共振器の入出力特性）} \tag{3b'}$$

と表現すれば（ここでは一般にxをベクトル）、演算子Lが遅延性を持つ場合（多くの管楽器がそうであろう）その特性は（1）でモデル化できるであろう。一方、制御工学の立場から見れば（3a）（3b）は典型的な制御システムのモデルであり制御変数yが入力情報x（t）の時間遅れを伴なって決定されることはありふれた状況である。例えば生産物x（t）が消費地に送られ、そこでの消費動向を見極めながら生産体制を制御する、つまりy（t）をx（t）に応じて変化させるような系は典型的な時間送れをともなうフィードバック系である。制御工学の分野ではこの種のシステムが線形領域においてではあるが、古くから研究されてきたようである。[5] しかし、非線形発振　の研究がなされるようになったのは極く最近のことである。

## 2　遅延微分方程式系の非線形振動とカオス

### 2・1　参照定差方程式

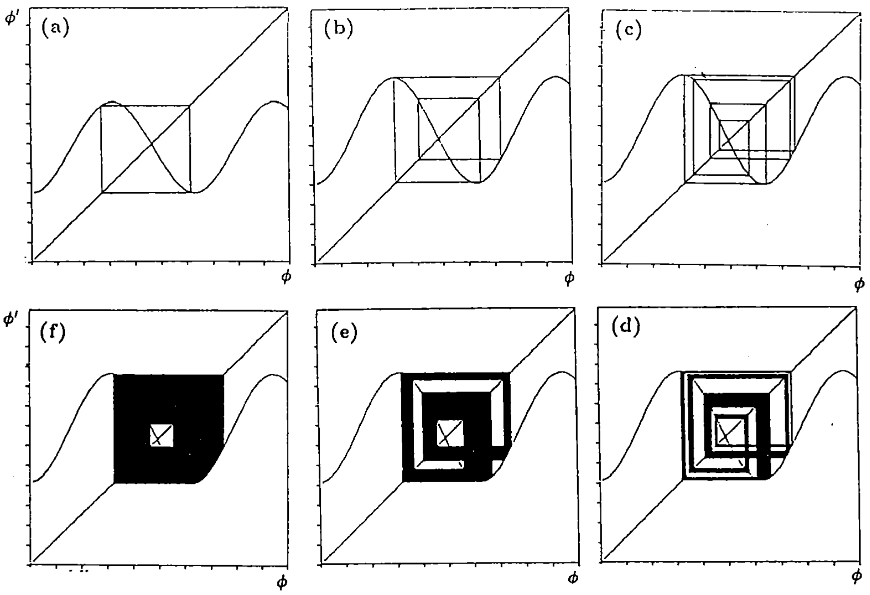
モデル（1）、したがって（2）の著しい特徴は緩和定数$\gamma$を形式的に→∞の極限に飛ばすと

$$x_n(\tau) = f(x_{n-1}(\tau)) \tag{4}$$

なる定差方程式に帰着する事である。実際、（1）の解は（4）の解の性質によって「骨格」が大体定められているといえよう。おおざっぱにいえば、（4）がカオスを持てば、（1）もカオスをもつ。しかし（1）のカオスに比べて（4）のカオスはよりマイルドである。古典力学と量子力学のアナロジーでいえば、（1）が量子系、（2）がその古典極限に対応する。$1/\gamma$がプランク定数である。まず、（4）の性質を調べよう。もしfとして少なくとも一つ以上のピークをもつ関数、たとえば非線形光学の標準的モデル

$$f(x) = \mu \cos(x - x_0) \tag{5}$$

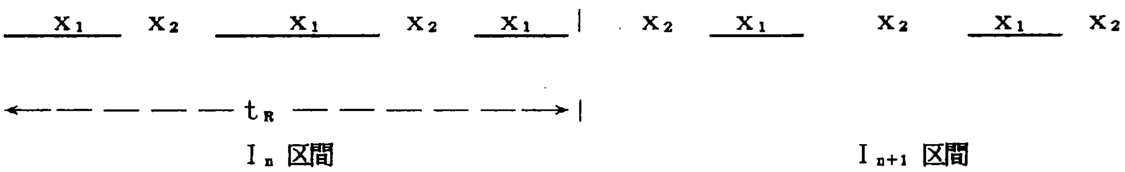
を採用すれば、ファイゲンバウム現象としてよく知られているように、[6] 非線形性をあらわすパラメータ$\mu$が増大しある臨界値$\mu_1$に達すると（4）の定常解が不安定になって周期$2t_R$の振動が現れる。$\mu$がさらに増大して新しい臨界値$\mu_2$（<）$\mu_3$（<）$\mu_4$・・・に達するたびにこの周期はどんどん　$2t_R \to 2^2 t_R \to 2^3 t_R \to$・・・・のように倍加し、遂にある臨界値$\mu = \mu_F$で周期∞になってそこから先はカオス運動が実現される。しかしカオスといっても$\mu_F$近くではそれは$2^m$個の分離したバンドを規則正しく巡りあるく運動と、バンド内をランダムに動くカオス運動からなっており、カオス成分は小さい。さらに$\mu$がふえると$\mu_F$をはさんでカオス側に、あたかも$\mu_1$、$\mu_2$、$\mu_3$、$\mu_4$・・に鏡映するように、臨界値　・・$\mu_4{}^-$（<）$\mu_3{}^-$、（<）$\mu_2{}^-$（<）$\mu_1{}^-$・・・があらわれ、$\mu_m{}^-$に達するたびにバンド数が$2^m \to 2^{m-1}$と減少してカオス成分が増え最後にまったくバンド構造のない「十分乱れた」カオスが現れる。この様相を図－1に示す。[7]




図－1　$\phi' = f(\phi)$ の軌跡　(a) 2、(b) $2^2$、(c) $2^3$、(d)－(e) はそれぞれ $2^3$ －、$2^2$ －、2－バンドカオスである。

## 2・2　遅延微分方程式の解の分岐

(2) の解にみられる分岐現象は (4) の分岐構造を良く反映する。逐次周期倍加分岐がモデル (1) でも確かに起こり、上で論じた $2^n$ 周期解が実現されるのである。しかしモデル (4) の解のうち (2) の解になりうるものは極めて限られている（古典解のうち量子化規則を満たすもののみが存在する古典量子対応を彷彿とさせるものがある）簡単のために定差方程式　$x' = f(x)$ の2周期解 $x_2 = f(x_1)$、$x_1 = f(x_2)$ を例にとって説明しよう。時間軸を $t_R$ を単位にして区切った時、n番目区間　$I_n =$　$(t \mid n t_R, (n+1) t_R)$ を更に再分割して任意の数、任意の幅の部分区間に分けそれぞれに $x_2$、$x_1$ をわりふったものがすべて (4) の解になっているのである。[8]　(下図)




問題はこの様な解のほとんどが (2) の解として許されない事なのである。$\gamma \to \infty$ の極限といえども、$x_2$、$x_1$ の界面では不連続性のために $\gamma^{-1} dx/dt$ の項がどうしても無視できなくなって (4) の近似は破綻してしまう。$\gamma$ がいかに大きくても、$t \to \infty$ の (2) の漸近解は (4) の解からは構成出来ない。それではどの様な解が許されるのだろうか？

### (i) 定差方程式 (4) のもっとも単純な解－－矩形波解[4][8]

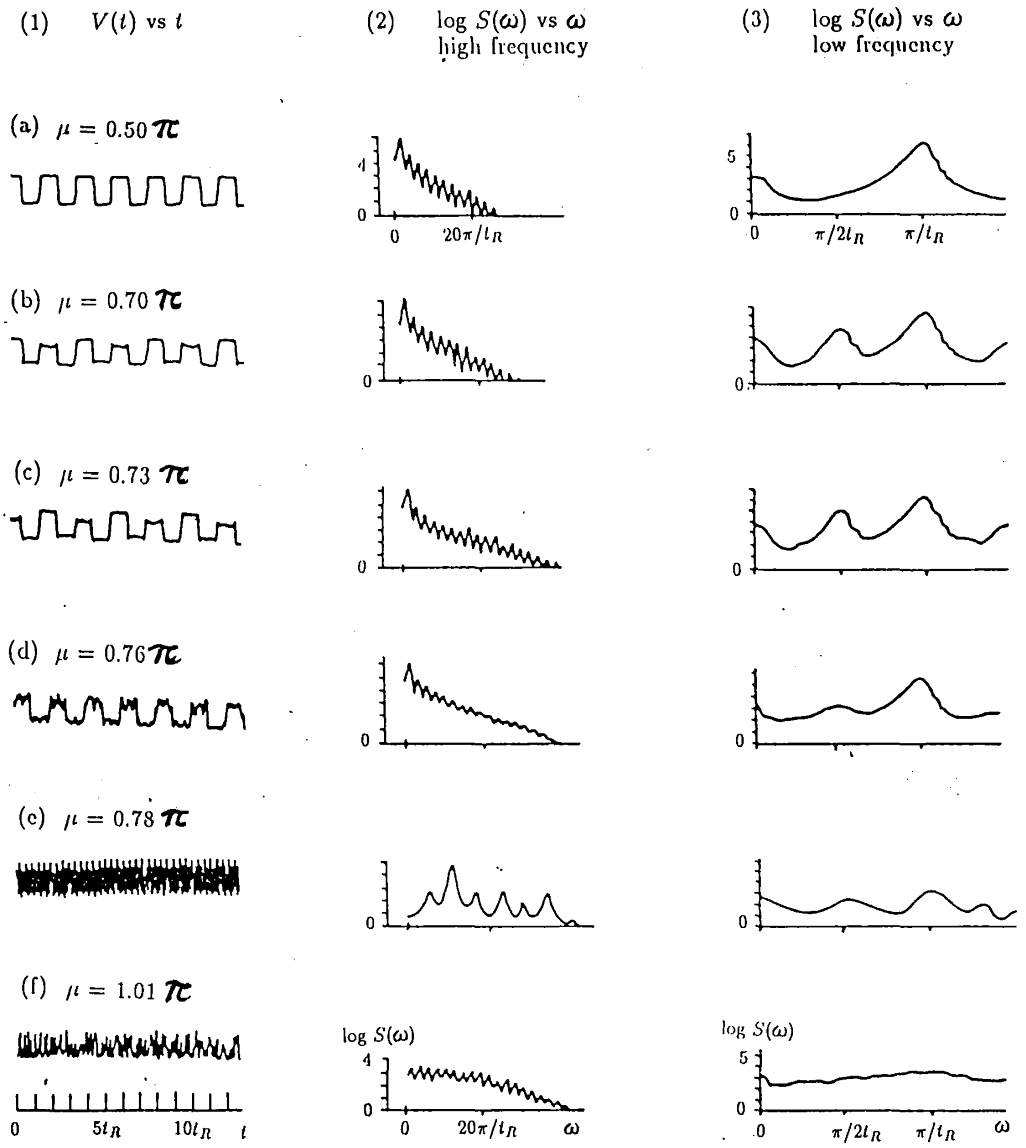
2周期解　$x_n(\tau) = x_1$、　$x_{n+1}(\tau) = x_2$；　4周期解　$x_n(\tau) = x_1$、$x_{n+1}(\tau) = x_2$

$x_{n+2}(\tau) = x_3$、　$x_{n+3}(\tau) = x_4$

**８周期解**　・・・一般に２$^{n}$周期解に対応する（２）の解が存在する

ここに$x_n$（$\tau$）はn区間のx、つまり　$x(\tau+nt_R)=x_n(\tau)$　$(0\leqq\tau<t_R)$で$x_1$，$x_2$・・・

・・・は定差方程式の$2^n$解　$x_2=f(x_1)$、　$x_3=f(x_2)$・・・




図－２　Arizona のグループによって観測された光カオスへの逐次分岐[9]
（１）波型（２）（３）パワースペクトル（（３）は拡大図）

実際のモデル（2）の解は図－2（a）の実験結果に示すように2種の解を幅1／$\gamma$程度の境界層で滑らかにつないだ構造をとっている。ところで、 Chow, Mallet-ParetなどMichiganの応用数学のグループが（4）を参照方程式にして（2）の解の構成可能性を数学的に証明している。彼等の手法の骨子は、無限遠方で（$x_1$ 、$x_2$ ）（$x_2$ ，$x_1$ ）になり$x_1 \to x_2$　$x_2 \to x_1$ とスイッチする（1）のヘテロクリニック解　（$x^{(+)}$（t），$x^{(-)}$（t））の存在を証明しそれを境界層解として$x_2$ と$x_1$ を滑らかにつなぎながら数学的に厳密な解を構成しょうというものである。[10]

図－2に実験で観測された典型的な矩形波にまつわるカオスへの周期倍加分岐の例を示そう。[9] [11]（a）は$2t_R$ 波，（b）は$2^2$ $t_R$ 波、（c）は2バンドーカオス、（d）は1－バンドカオスを示す。

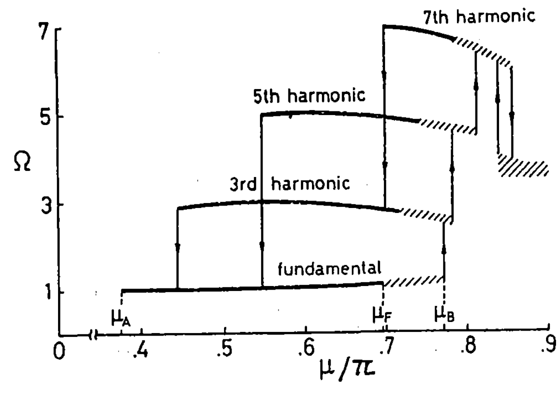
## 2・3　奇数高調波の共存

図－2において、1－バンド領域でさらに$\mu$がふえると、狭い領域で突然矩形波から奇数高調波へのジャンプが起こり（（e））、奇数高調波の階段を掛け上がって（逐次高調分岐）最後に極めて複雑なカオス状態（むしろ乱流状態というのが相応しい）に遷移してしまう（（f））。このジャンプはヒステリシスを伴う。それは奇数高調波が矩形波と共存しているからである [8]。さて、一つだけ遅延をふくむ系のきわめて一般的な性質として次のことがいえる。

（ｉｉ）矩形波解の周期が（定数部分を除いて）$t_R$ に比例するなら、その奇数高調波解が存在する。[12]

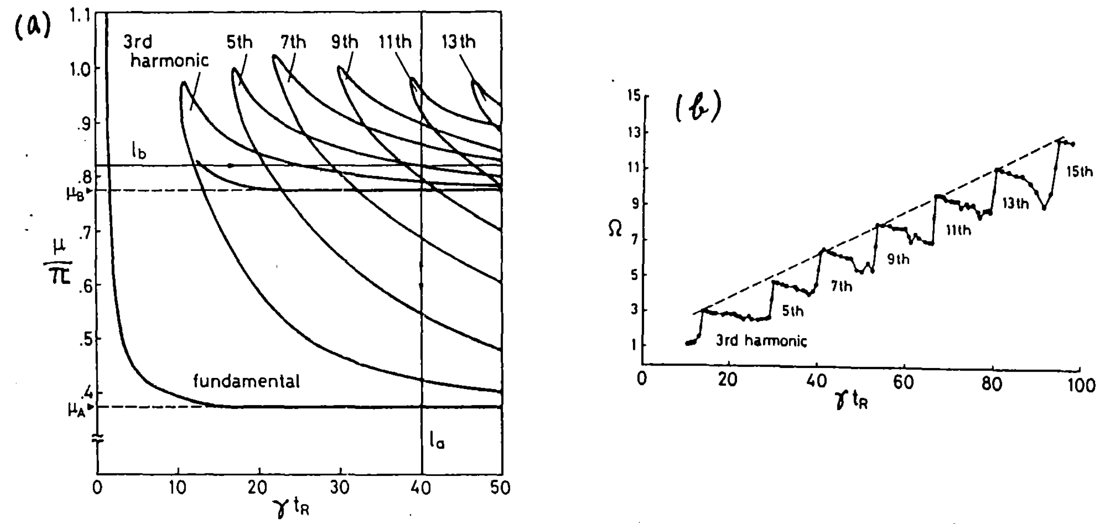
これは、遅延系がもっている時間シフトにたいする対象性に起因する性質である。モデル（2）に関して、矩形波解の周期が　$2t_R$ ＋定数　であることが示せるので（ｉｉ）は成り立っている。実際、光学系のカオスの実験では、図－2に示すように矩形波にくわえてその奇数高調波がしばしば観測されてきた。奇数高調波の分枝は$\mu$が小さい領域にものびている。基本矩形波と奇数高調波のヒステリシスをしめすシミュレーションの例を図－3に示す。与えられた$t_R$ に対して$\mu$の小さい領域でも奇数高調波は基本矩形波と共存することがわかる。しかし$\mu$の増大によって実現するルートは矩形波ルートのみであり、高調分枝に到達するには逐次高調分岐を利用しなければならない。さて、高調波の調波数に関して、次の性質がある。

図－3　　基本矩形波と奇数高調波のヒステリシス。　ハッチした部分はカオス。Ωは平均周波数。図4(a)の線 $l_a$ にそって得られたもの



（ｉｉｉ） 安定に存在しうる奇数高調波のｈａｒｍｏｎｉｃ数には上限がありそれは $\sim\gamma t_R$ 。[8][12]

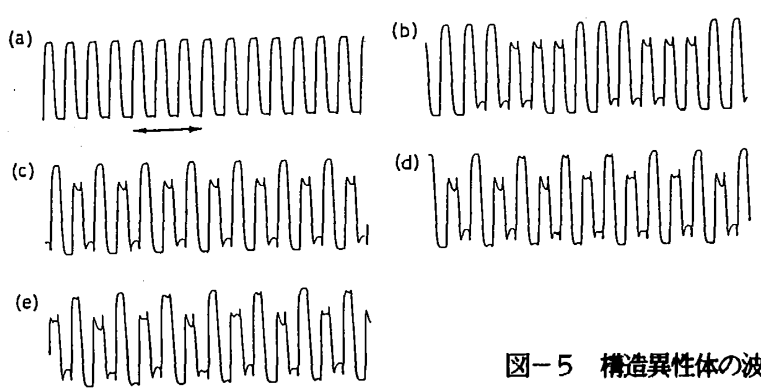
したがって、$t_R$ を増大させると共存する奇数高調波の数が増大する。（$t_R$ 、$\mu$）のパラメーター空間で奇数高調波が存在する領域を図－４（ａ）に示す。図－４（ａ）の $l_b$ にそって $t_R$ を増大させると、図－４（ｂ）に示すように次々高い高調波へと逐次遷移させることができる。



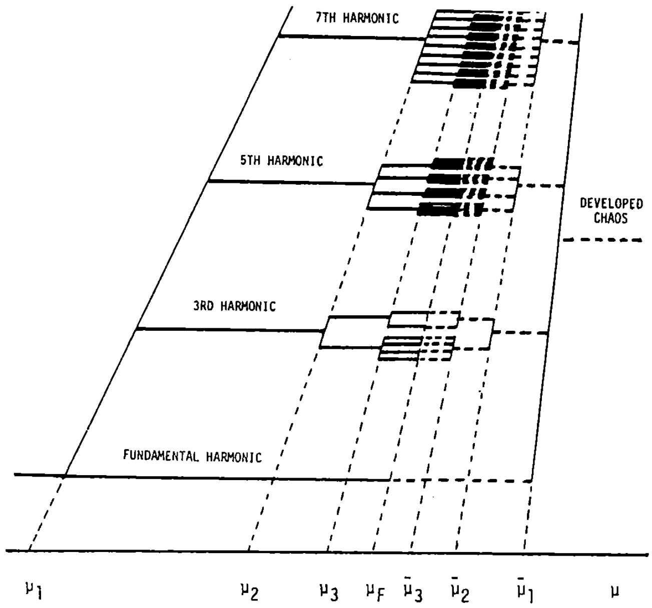

図－４　高調解の存在領域（ａ）と $l_b$ に沿って実現された逐次高調分岐（ｂ）[8]

２・４　分岐ルート自身の分岐－－階層的多重安定性と異性体

高調分枝も $\mu$ が小さいところでは規則的であり、ひとつ高調分枝を選んで $\mu$ をふやすと、その上でも基本矩形分枝同様、逐次周期倍加分岐によるカオスへの遷移が起きている。高調分枝でも分岐臨界値 $\mu_1$ 、$\mu_2$ ・・・・・に達するたびに周期が倍加するのだが、基本分枝と異なる点は、周期倍加解は只一つではなく、幾つかの構造異性体が誕生する点である[12][13]。このような構造異性体が生まれる理由は２・２に論じたように、（図を見よ）分岐した値の割り振りかたが一義的でないためである。 図－５（ａ）の３倍高調波が周期 $2^2\ t_R$ に分岐して生まれた２つの異性体が（ｂ）（ｃ）である。（ｄ）（ｅ）は（ｂ）が分岐してできた $2^3\ t_R$ 解である。




図－５　構造異性体の波形。矢印は $2\,t_R$ [12]

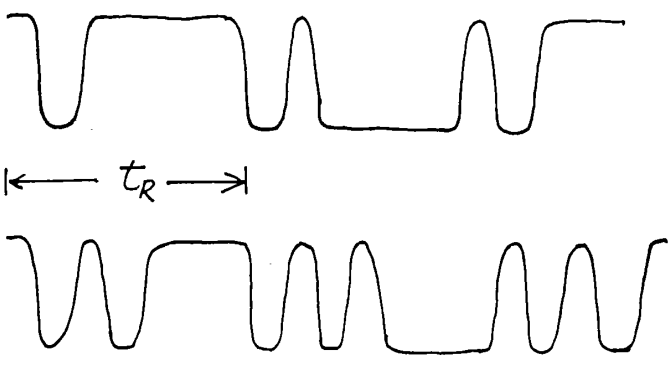



図－6　分岐ルートの分岐とその階層構造

このように、新しい分岐点で、元の分岐ルートそのものが、いくつもの分岐ルートに分岐するのである。この様相を模式的に図－6に示す。したがって夥しい数の周期解がカオスへの最終転移点$\mu_F$ 近傍で共存することになり、これらの解を動的な記憶媒体として用いる提案が成された[12]。これら分岐解による系の記憶容量は$\mu_F$ 近くで、極めて大きく、少なくとも$t_R$ $\gamma$ビット程度に達する。カオス領域に入ると、バンド融合に対応する現象が起きて、異性体が統合されてゆき、最後にすべての奇数高調波解が融合して発達したカオス状態（乱流状態）を形成する[12]。このカオス状態では、すでに壊されてしまった奇数高調波解の残骸を巡る運動－カオス的遍歴[14]－が実現していると考えられている。換言すれば、この過程は過去に存在した構造を想起する運動なのである。Davis らはこの運動が位相空間をくまなくサーチする性質、とそれに至る分岐がヒエラルキー的構造をもつことを利用して、望みの時系列時間パターンを、異性体の一つとして効率よくコードする方法を提案し、実験的検証を行っている[15]。

## 2・5　その他

●経験的には、奇数高調波以外にも変わった波型をもつ安定もしくは擬安定な解が存在する。例えば、異なった奇数高調波のハイブリッド解（下図）と解釈される解もしばしば極めて長い寿命で観測される。この様な解は奇数高調波間の遷移がおきた直後にみられる。面白いことに、このようなパターンは多重遅延フィードバック系では安定化されるらしい[16]。



●以上に述べた事実はモデル（1）（2）に極めて普遍的であり、$f(x)$ の詳細にあまりよらない。もっとも、$|x|\to\infty$ で $|f(x)|\to 0$ なるタイプの系（例えば分数関数）では少し毛色の変わった異性体への分岐現象が見られる[17]。

●乱流状態において、これらの高調モードの間をカオスが生成した情報が伝搬してゆく態様を解明することは極めて興味深い問題である。筆者とMatsumoto は、相互情報量とその流率によってモード間の因果的連結性を定量的に研究したが、ここでは紙数の関係上その結果を論ずることはしない[12][18]。

## 3 多重遅延フィードバック系

共振器はしばしば２枚以上の鏡を含むことがある。このような系では２つ以上の時間遅れをもったフィードバック $t_{R1}$, $t_{R2}$, ・・・が並列にはいることができる。ひとつのフィードバック $t_{R1}$ に共振しようとすれば、発振周波数は $\omega_1 = n_1\pi/t_{R1}$ になるだろう。ところがもう一つのフィードバック回路 $t_{R2}$ に共鳴すれば $\omega_2 = n_2\pi/t_{R2}$ になるだろう。２つ共振器長が整数比 $N_1/N_2$ ならば $n_1$、$n_2$ が $N_2$、$N_1$ の最小公倍数（とその整数倍）をとれば $\omega_1=\omega_2$ となって、発振が可能になる。しかし一般に比 $t_{R1}/t_{R2}$ は無理比であろうからこの様に都合の良い周波数は発見できない。このとき一体どのようなルールで発振周波数が選択されているのだろうか？筆者と水野は２重の時間遅れを持つフィードバック系

$$\gamma^{-1}dx/dt=-x(t)+f_1(x(t-t_{R1}))+f_2(x(t-t_{R2})) \qquad (6)$$

をモデルにこの問題を研究し、その発振特性が比 $\chi=|(t_{R1}-t_{R2})/(t_{R1}+t_{R2})|$ の整数論的性質に依存して異常な変化をしめすことを明らかにした[19]。この結果は Zhangの光双安定デバイスの実験によって確認された[20]。理論的には、最近、 Malta らによって数学的により精密化された取扱いがなされている[21]。

発振規則とは次のようなものである[19]。

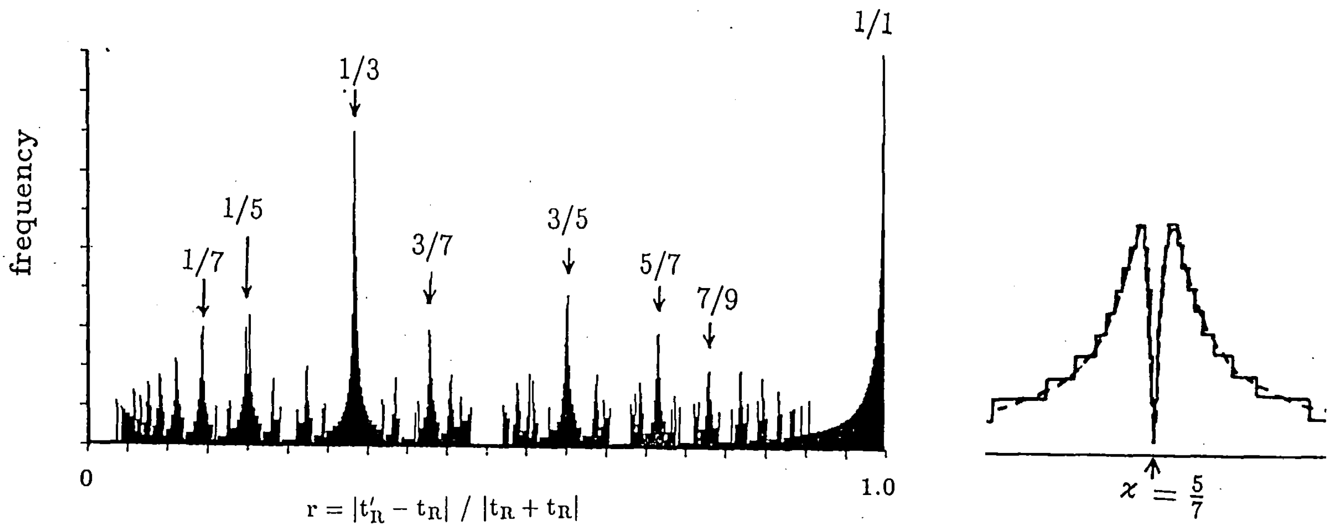
$\chi$ を連分数展開せよ。つまり

$$\chi=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cdots\cdots\ \cfrac{1}{a_n}}}}=P_n/Q_n \qquad (7)$$

但し $a_1\cdots a_n$, $P_n$, $Q_n$ は整数。$Q_n$ は $n$ の増加関数であるが、$Q_n$ が $1/\varepsilon=\gamma(t_{R1}+t_{R2})/2$ をこえない最大の整数になった所でとめる。$P_n/Q_n$ は、分母 $Q_n$ が $1/\varepsilon$ を越えない範囲で $\chi$ を最も良く近似するいわゆる最良の有理数である。すると、最適発振モード数 $N^*$ は次のルールで定まる。

（1）　$P_n$ ／$Q_n$ ＝偶数／奇数　または　奇数／偶数ならば　$N^*$ ＝$Q_n$ とおけ。
（2）　$P_n$ ／$Q_n$ ＝奇数／奇数のときn－1，n世代のQで決まる中間有理数（m$P_n$ ＋$P_{n-1}$ ）／（m$Q_n$ ＋$Q_{n-1}$ ）（最良有理数についてχを良く近似できる有理数である。）の分母m$Q_n$ ＋$Q_{n-1}$ のうち、ある関数を最大にする（詳細は文献（１９））分母が$N^*$ を与える。

要は、最も二つの共振器に同時共鳴できる高調モード$N^*$ を探す問題がχを最良近似する有理数を探す問題と等価になっていることである。これに加えてモード$N^*$ の周波数がgain band 内になければならないという条件が$N^*$ に上限を課する。一重遅延系では$N^*$ は奇数でなければならなかった。これに対応する事情が二重遅延系でも現れ、上記（１）（２）の場合わけが必要になる。上の決定規則は比χをインプットした時発振する周波数を決定論的に与えるアルゴリズムをあたえている。ところが上のアルゴリズムに含まれている連分数展開は、良く知られているようにカオスなのである（展開世代nを時間とみなすと、$a_n$ の運動は理想的カオスになっている）。このため極く僅かなχの違いがnと共に拡大されまったく違う周波数での発振が起こる。パラメータε（＝緩和時間／遅延時間）が小さいほど、したがってより大きいnまでとれる場合ほど、この傾向は著しい。実際、発振周波数をχの関数としてプロットすると図－７に示すように異常な発振特性が得られる（図７ではχはrになっている。）。しかしこの関数形はけっしてデタラメではなく美しい自己相似構造をもっている。χ＝奇数／奇数　近くで見られるタワー（塔）は選択規則の（２）に起因し、二重遅延系に特徴的なパタンをもたらす[16]。




図－７　２重遅延系の発振特性（左）　rはχのことである。χ＝奇数／奇数のタワー構造拡大図（右）

ここで取り扱われた発振は一重遅延系でいえば矩形波が発振する第一ホップ分岐に相当し、発振するのは規則的な奇数高調波であるが、２重の遅延フィードバックループの競合によって系がフラストレイション（欲求不満）に陥り、発振モードを決定する規則の中にカオスがあらわれて、最初に発振するモードのharmonic数の決定過程を著しく不安定かつ複雑にしてしまうのである。この複雑さは、上のルールの枠組みの中では単にアルゴリズム的なものとしてとらえられていないが（それは我々が残念ながら局所解析しかできないためなのだが）、この効果は、位相空間内に高調モード達がアトラクターとして住み分けているグローバルな態様（＝ベイスン構造）を

一重フィードバック系にくらべて著しく複雑にするだろう。たとえば、図－３に示したような高調波になるほど吸引領域（ベイスン）が狭くなるといった単純なヒステリシスや図－４に示したような単純な相図はもはや期待出来なくなり、とくにεが小さいと高調波の存在領域が複雑にいりくんだ相図が得られるだろう。さらに橋－高橋のシミュレーションでも示唆されたように[16]、高調波のハイブリッド波が安定な解として高調波解と共存している可能性もあって、これらはさらに振動解間のヒステリシスを複雑に変えそうである。しかしこのあたりの構造はまだあまりはっきりしないのが現状である。さらに、二重遅延系で気になる問題として一重遅延系では見られなかった、準周期運動の発生という問題がある。実際、Zhang らは$x = 1/2$近くに固定した実験で、$\mu$を増大させたときに最初の高調振動が準周期運動（２周波数トーラス）に変化すること、一重遅延系と著しく異なってこのような準周期振動がしばしば現れることを報告している。しかし、残念ながら詳しい総合報告は発見できなかった。これらの、問題は木管楽器の振動特性の問題と微妙にからまりあっており、今後の研究の発展が強く望まれる。

## 参考文献


（１）光カオスに関する解説記事

池田研介、秋元興一：「光双安定性とカオス」　応用物理　52巻,(1983) 866　;

池田研介：「光カオスは応用可能か？」　光学　17巻, (1988) 508 ;

池田研介：「光カオス」　新版レーザーハンドブック（朝倉書店　1988）矢島達夫他編　pp145-150 ;

池田研介：「光カオス」　光通信理論とその応用　（森北出版　1988）光通信研究会編　pp255-265 ;

池田研介：「光カオス」　音響学会誌 49巻 (1993) 51

（２）H.M.Gibbs: Optical Bistability: Controlling Light with Light (Academic Press 1985)

（３）K.Ikeda: Opt. Commun. 30 (1979) 257

（４）K .Ikeda, H.Daido, and O.Akimoto: Phys. Rev. Lett. 45 (1980) 709

（５）制御関係の文献として ICTPで1974年に行なわれた会議「Control Theory and Topics in Functional Analysis」のプロシーディングスがある。

（６）B .Hu: Phys. Rep. 91 (1982)25

（７）たとえば、P.ベルジュ他著　「カオスの中の秩序」（産業図書）相沢洋二訳；

Ｒ．Ｌ．デバネー　「カオス力学系入門」（共立出版）後藤憲一訳など

（８）K.Ikeda, K.Kondo, and O.Akimoto: Phys.Rev.Lett. 49, (1982) 1467 .

（９） H.M.Gibbs, F.A.Hopf, D.L.Kaplan, and R.L.Shoemaker: Phys. Rev. Lett. 46、(1981) 474;

F.A.Hopf, D.L.Kaplan, H.M.Gibbs, and R.L.Shoemaker: Phys. Rev. A25(1982) 2172;

M.W.Derstine, H.M.Gibbs, F.A.Hopf, and D.L.Kaplan: Phys. Rev. A26 (1982) 3720.

（１０）S.-N.Chow and J.Mallet-Paret: North Holland Math. Stud. 80,(1983) 7;

J.Mallet-Paret and R.D.Nussbaum: Ann. Mat, Pura Appl. 145 , (1986) 33;

S.N.Chow, X.B.Lin, and J.Mallet-Paret: J. of Dynamics and Diff. Equations 1 , (1989) 3.

（１１）奇数高調波を観測した光カオスの実験例として R.G.Harrison, W.J.Firth, C.A.Emshary, and I.A.Al-Saidi: Phys. Rev. Lett. 51, (1983) 562; R.G.Harrison, W.J.Firth, and I.A.Al-Saidi: Phys. Rev. Lett. 53, (1984) 258.; W.H.Loh and C.L.Tang: Opt. Commun. 85, (1990) 258. など。

（１２）K.Ikeda and K.Matsumoto: Physica 29D , (1987) 223.

（１３）K.Ikeda: in Coherence and Quantum Optics(Plenum, 1984) ed. by L.Mandel and E.Wolf pp875.

（１４）K.Ikeda, K. Otsuka, and K.Matsumoto. Prog. Theor. Phys. Suppl. No99 (1989) 295.

（１５）Ｐ．Ｄａｖｉｓ： 本研究会報告

（１６）橘 崇哲、高橋 公也： 本研究会報告

（１７）K.Kondo, O.Akimoto, and K.Ikeda: unpublished (preprint available)

（１８）K.Ikeda and K.Matsumoto : J. Stat. Phys. 44, (1986),955

（１９）M.Mizuno and K.Ikeda: Physica 36D (1989) 327.

（２０）H ong-Jun Zhang and Jian-Hua Dai: Opt. Lett. 11 (1986) 245

（２１）C.R.Ragazzo and C.P.Malta: J. of Dynamics and Diff. Equations. 4 , (1992) 617.