Unified Approach to Roton Dynamics

東京大学教養学部物理　　　　生井澤　寛

超流動ヘリウム４の素励起は、よく知られているようにフォノン－ロトンであり、この超流動体の熱的・流体力学的性質を支配する。これらは従来、ランダウによって始められた現象論（以後、従来の現象論、と呼ぶ）によりかなりの程度理解できるものとされてきた。

しかし、近年、素励起の素過程が直接観測出来るようになってくると、従来の現象論にも限界のあることが次第に明らかになりつつある。そのうち、ロトンが主役を演ずる過程に関して、現象論的ではあるが、統一的な描像が可能であることを指摘したい。

ロトンが主役を演ずる過程として問題となるのは次の３っつである。

A) **ロトン－ロトン直接散乱**：この実験は、フォーブスとワイアット[1)]が行った。彼らによれば、散乱断面積は、２ロトンの閾値付近から劇的に増加する。従来の現象論によれば、ロトン付近で発散するエネルギー密度の効果で断面積は、この結果とは逆にむしろ閾値では大きく、そこから遠ざかるにつれ減少するはずである。このことから、ロトンの間の相互作用は、従来仮定されていた接触型ではなく、運動量またはエネルギーに依存するものと考えた方が自然である。そこで筆者[2)]は、相互作用を現象論的に

$$V_q(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k}) = g_q f_q(\boldsymbol{k}') f_q(\boldsymbol{k}) \tag{1a}$$

$$f_q(\boldsymbol{k}) = (\xi_q(\boldsymbol{k})/\xi_c)^\alpha \tag{1b}$$

$$\xi_q(\boldsymbol{k}) = \epsilon(\boldsymbol{k}) + \epsilon(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{q}) - 2\Delta_R \tag{1c}$$

と仮定して実験を分析した。ここに、$\epsilon(\boldsymbol{k})$ は波数 $\boldsymbol{k}$ のロトンのエネルギー, Δ_R はロトン・ギャップ、ξ_c はエネルギー・カットオフ (~ 10K) である。分析の結果、べきと結合定数が

$$\alpha \sim 1/2\,, \qquad g \sim -1.5\times 10^{-38}\,\mathrm{ergcm}^{-3} \tag{1d}$$

程度の時、実験をよく再現する。

B) **ラマン散乱**：いわゆる２ロトン・ピークについては、岩本[3)]、及び独立に、ルーワルズ・ザワドウスキー[4)]が（以後、これらの理論をまとめて、IRZ 理論、と呼ぶ）、従来の現象論に基づき、２ロトンの束縛状態を予言した。実験でも、このピークが、少なくとも低圧下では、$2\Delta_R$ より下にあることが確かめられスペクトルも理論とよく合致したので、従来の現象論が更に裏付けられたものと考えられた。

しかし、理論には重大な欠陥のあることがクレーバン[5)]により指摘されると、束縛状態の存在すら疑問視され、２ロトン領域のラマン散乱には信頼すべき理論が存在しない、という状態が長く続いた。ラマン散乱の強度 (I_{RS}) は、ヘリウムの密度揺らぎの４点関数に比例する

が、光のエネルギーに比べ、超流動ヘリウムの励起エネルギーが無視できるほど小さいので

$$I_{RS}(\omega) \propto K(1-2) < \delta n(\boldsymbol{r}_1, t)\delta n(\boldsymbol{r}_2, t)\delta n(\boldsymbol{r}_3, t')\delta n(\boldsymbol{r}_4, t') > K(3-4) \tag{2}$$

の様に、実質的には2時間の相関に帰着する。ここに、$K(1-2)$ はヘリウム中の光の伝搬関数であり、$< \ldots >$ は熱平均を表す。ところで、ハード・コア (半径$= \sigma$) のために、同時刻では原子は互いにその半径内には入り込めないから

$$< \delta n(1)\delta n(2)\delta n(3)\delta n(4) > = 0 \text{ if } \ r_{12} < \sigma \ \text{ or } r_{34} < \sigma \tag{3}$$

が成り立つはずである。ところがIRZ理論では、点1と2及び3と4の間を、逆向きのロトン対が伝搬するとした。こうすると、ロトンの波数が、$k_R \sim 1/\sigma$ であるために、対応する密度揺らぎの間の距離は、σ 程度となり、(3) が満たされなければならない。しかし、IRZ理論のスペクトル関数は (3) をひどく破るのである。

その原因は、i) 密度揺らぎを素励起の演算子に比例するとしたこと、ii) その結果、ヘリウム中を伝わる光の波数も、$k_R \sim 2\text{Å}^{-1}$ 程度と大きすぎてしまうこと、にある。

そこで、筆者は最近、これらの仮定を止め、代わりに

i′) 密度揺らぎには、素励起の演算子 $(c_q, c_q^\dagger)$ の非線形項も含まれる、すなわち

$$\delta n(\boldsymbol{q}) = F_1(\boldsymbol{q})\, c_{\boldsymbol{q}}^\dagger + F_1(-\boldsymbol{q})^* \, c_{-\boldsymbol{q}} + \textstyle\sum_{\boldsymbol{k}} \{f_p(\boldsymbol{k}\,;\boldsymbol{q})c_{\boldsymbol{k}_+}^\dagger c_{-\boldsymbol{k}_-}^\dagger + f_p(\boldsymbol{k}\,;-\boldsymbol{q})^* c_{-\boldsymbol{k}_+} c_{\boldsymbol{k}_-}$$
$$+ f_n(\boldsymbol{k}\,;\boldsymbol{q})c_{\boldsymbol{k}_+}^\dagger c_{\boldsymbol{k}_-} + f_n(-\boldsymbol{k}\,;\boldsymbol{q})c_{-\boldsymbol{k}_-}^\dagger c_{-\boldsymbol{k}_+}\} \cdots , \qquad \boldsymbol{k}_\pm = \boldsymbol{k} \pm \boldsymbol{q}/2 , \tag{5}$$

ii′) 中間状態では、小さい波数の光が主要な寄与をする、

とする新しい理論を提唱した[6]。

仮定 ii′) により、点1と2及び3と4の間の距離が大きい場合の寄与が主となるから4点関数を2点関数の積に分解する近似が成り立つ。また、同じ仮定により光の伝搬関数に対し双極子近似が使える。これらの近似により (2) を評価すれば、電磁相互作用の長距離性によって、中間状態の光の波数が零の項が支配的となり、結局強度は

$$I_{RS}(\omega) = (32\pi\hbar^2/9Mu)\,\alpha^4\, k_0^8\, n_0^2\, P(e_S \cdot e_I) S_{II}(\mathrm{o}, \omega) , \tag{6a}$$

$M \sim {}^4He$ mass; $u \sim$ sound velocity; $\alpha \sim$ polarizability;

$k_0 = (k_I + k_S)/2$; $n_0 = N/V_0 \sim$ average number density;

$$P(e_S \cdot e_I) = P^{(0)}(e_S \cdot e_I)^2 + P^{(2)}\{(e_S \cdot e_I)^2 + 3\}/4 , \tag{6b}$$

$e_I(e_S) \sim$ polarization direction of incident (scattered) lights;

$P^{(\ell)} \sim$ degree of polarization of ℓ-wave of lights;

の様に、動的構造因子の、いわゆる多フォノン部分に帰着する。

動的構造因子を求めるには、素励起間の相互作用を知らなければならない。そのためにここでは、原子間の擬ポテンシャル、$v(q)$、が何らかの方法で与えられたものとしよう。素励起間の相互作用は、形式的には、$v(q)$ で決まる相互作用に、密度揺らぎの展開 (5) を代入し、素

励起の演算子についての規準積をとれば求められる。その結果、素励起のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = \Delta E + \mathcal{H}_2 + \mathcal{H}_3 + \mathcal{H}_4 \dots , \tag{7a}$$

$$\mathcal{H}_2 = \sum_{\boldsymbol{k}} \epsilon_0(\boldsymbol{k}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}} c_{\boldsymbol{k}} , \tag{7b}$$

$$\mathcal{H}_3 = V_0^{-1/2} \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{q}} \{ v_{1n}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) c^\dagger_{\boldsymbol{q}} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_-} c_{\boldsymbol{k}_-} + \mathrm{c.c.} + v_{1p}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}_-} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}_+} c_{-\boldsymbol{q}} + \mathrm{c.c.} \} , \tag{7c}$$

$$\mathcal{H}_4 = (1/2V_0) \sum_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}',\boldsymbol{q}} \{ v_{nn}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}'_-} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_+} c_{\boldsymbol{k}_-} c_{\boldsymbol{k}'_+}$$
$$+ (v_{pp}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}'_-} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}'_+} c_{-\boldsymbol{k}_+} c_{\boldsymbol{k}_-} + \mathrm{c.c.}) + (v_{pn}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) c^\dagger_{\boldsymbol{k}'_-} c^\dagger_{-\boldsymbol{k}'_+} c^\dagger_{\boldsymbol{k}_+} c_{\boldsymbol{k}_-} + \mathrm{c.c.}) \} . \tag{7d}$$

の様に与えられる。ただし、上では温度が十分低く、素励起の熱的揺らぎは小さいとして、少数の素励起が関係する部分だけをあげた。また、V_0はヘリウムの体積、$\boldsymbol{k}'_\pm = \boldsymbol{k}' \pm \boldsymbol{q}/2$、また、$\Delta E, \epsilon_0(\boldsymbol{k}), v_{1n}, v_{1p}, v_{nn}, v_{pp}$および v_{pn} などは、$v(q)$ と (5) の展開に現れた形状因子で表される量である。簡単のために、3個以上の素励起に対する形状因子が、1個 (f_1) 及び2個 (f_n, f_p) の形状因子に分解されるとすれば、上に現れた各相互作用は

$$v_{1n}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) = \lambda_{\boldsymbol{q}} F_1(\boldsymbol{q}) f_n(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q})^* , \tag{8a}$$

$$v_{1p}(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) = \gamma_{\boldsymbol{q}} F_1(-\boldsymbol{q})^* f_p(\boldsymbol{k};-\boldsymbol{q}) , \tag{8b}$$

$$v_{nn}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) = h_{\boldsymbol{q}} f_n(\boldsymbol{k}';\boldsymbol{q})^* f_n(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) , \tag{8c}$$

$$v_{pp}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) = g_{\boldsymbol{q}} f_p(\boldsymbol{k}';-\boldsymbol{q}) f_p(\boldsymbol{k};-\boldsymbol{q})^* , \tag{8d}$$

$$v_{pn}(\boldsymbol{k}',\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) = j_{\boldsymbol{q}} f_p(\boldsymbol{k}';-\boldsymbol{q}) f_n(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) . \tag{8e}$$

の様に表される。ここに、$F_1(\boldsymbol{q}) = \sum_{\boldsymbol{k}} f_1(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q})$、また、$\lambda_{\boldsymbol{q}}$などは、対応する過程の結合定数である。

考えるエネルギーは、2ロトン領域なので、3ロトンを含む過程を無視すれば ($j_{\boldsymbol{q}} = 0$ と置く)、この相互作用から動的構造因子は、n_0を平均原子数密度として

$$n_0 S(\boldsymbol{q},\omega) = 4\rho(\boldsymbol{q},\omega)$$
$$\times \{ (\hbar\omega - \epsilon_0(\boldsymbol{q}) - \mathrm{Re}\Sigma(\boldsymbol{q},\omega))^2 + (\mathrm{Im}\Sigma(\boldsymbol{q},\omega))^2 \}^{-1} \mid \hbar\omega - \epsilon_0(\boldsymbol{q}) + V_0^{-1/2} F_1(\boldsymbol{q}) \gamma_1(\boldsymbol{q}) \mid^2 , \tag{9}$$

$$\rho(\boldsymbol{q},\omega) = -\mathrm{Im}D(\boldsymbol{q},\omega)/4\pi$$
$$= (2\pi)^{-1} \mathrm{Im}\Pi(\boldsymbol{q},\omega) / \{ (1 + g(\boldsymbol{q},\omega)\ Re\Pi(\boldsymbol{q},\omega))^2 + (g(\boldsymbol{q},\omega)\mathrm{Im}\Pi(\boldsymbol{q},\omega))^2 \} , \tag{10}$$

$$\Pi(\boldsymbol{q},\omega) = -V_0^{-1} \sum_{\boldsymbol{k}} \mid f_p(\boldsymbol{k};\boldsymbol{q}) \mid^2 (\hbar\omega - \epsilon_0(\boldsymbol{k}_+) - \epsilon_0(\boldsymbol{k}_-) + i\delta)^{-1} , \tag{11}$$

$$D(\boldsymbol{q},\omega) = -2(1 + g_{\boldsymbol{q}}\Pi(\boldsymbol{q},\omega))^{-1}\Pi(\boldsymbol{q},\omega) , \tag{12}$$

$$\Sigma(\boldsymbol{q},\omega) = \mid \gamma_1(\boldsymbol{q}) \mid^2 D(\boldsymbol{q},\omega) . \tag{13}$$

$$\gamma_1(\boldsymbol{q}) = \gamma_{\boldsymbol{q}} F_1(\boldsymbol{q})^* , \tag{14}$$

$$g(\boldsymbol{q},\omega) = g_{\boldsymbol{q}} + 2 \mid \gamma_1(\boldsymbol{q}) \mid^2 / (\hbar\omega - \epsilon_0(\boldsymbol{q}) - i\delta) , \tag{15}$$

と与えられる。十分低い温度では、ロトンの幅はゼロだから$\gamma_{\boldsymbol{q}} = 0$ としてよく、(9) は、

$$n_0 S(\boldsymbol{q},\omega) = V_0^{-1} \mid F_1(\boldsymbol{q}) \mid^2 \delta(\omega - \epsilon_0(\boldsymbol{q})/\hbar) + 4\rho(\boldsymbol{q},\omega) , \tag{16a}$$

となり、動的構造因子の1素励起の強さと多フォノン部分が

$$Z(\boldsymbol{q}) = N^{-1} \mid F_1(\boldsymbol{q}) \mid^2 , \tag{16b}$$

$$S_{II}(\boldsymbol{q},\omega) = 4n_0^{-1}\rho(\boldsymbol{q},\omega) , \tag{16c}$$

と同定される。こうして、$S_{II}(\boldsymbol{q},\omega)$ は、相互作用のある場合の状態密度、$\rho(\boldsymbol{q},\omega)$、に帰着する。

この結果の長波長極限を (6a) に代入すれば、ラマン散乱の強度が求められる。筆者らは[7]、相互作用に対しては (1a,b,c) の形、ロトンの分散関係に対してはランダウ型の表式を用い、べきα、ロトン・ギャップΔ_Rと結合定数gをパラメターとして、広い圧力範囲にわたる実験的なラマン・スペクトル[8]を分析した結果、

a) 実験結果は、$0 \leq \alpha \leq 9/16$ の範囲のべきでよく再現できる、

b) この範囲のべきを持つ相互作用により、低圧では２ロトンの束縛状態が実現される、

c) べきがこの範囲にあれば、えられたロトン・ギャップは、べきによらず広い圧力範囲で互いによく一致するだけでなく、中性子散乱の結果ともよく一致する、

d) 特に、$\alpha \sim 1/2$ にたいする結合定数は、A) で定めた直接ロトン散乱の結果と合致する、

ことがわかった。

仮定 ii′) により、我々の理論には始めからハード・コアの困難はないが、a) および b) より、形の上では IRZ 理論 ($\alpha = 0$ に対応) も含み束縛状態も許すことがわかったから、間違った理論がなぜ実験をよく再現したか、という謎が解けたことになる。また、c) により、ラマン散乱のみで素励起の基本的なパラメターが精度よく決定できたことは強調に値しよう。更に、d) から、２ロトンの過程に関して、全運動量がゼロ (ラマン散乱) から $2\hbar k_R$(直接ロトン散乱) 程度までの広い位相空間にわたって、(1a,b,c) で$\alpha \sim 1/2$ とおいた同一の相互作用による記述が出来たことは、ここに提唱された理論とこの相互作用により、ロトン動力学に対して統一的な描像が可能であることを示唆する。

C) 中性子散乱：ロトンが関係する領域で、中性子散乱で従来の現象論と相いれない主な事柄は、

1) いわゆる低エネルギー枝（１素励起ピーク）が、ランダウ・ピタエフスキーの推論に反して、プラトー部分で ($q \geq 2.8Å^{-1}$)、$2\Delta_R$を越え、$q \sim 3.5Å^{-1}$で、鋭い幅を保ったまま、突然消滅する、

2) いわゆる高エネルギー枝が、幅に質的な変化も示さず 19 気圧より高い圧力下で、低エネルギー枝の最高値 (Δ_M、マクソン) 以下に落ち込む、

である。

ところで、筆者はすでに B) の定式化によって、中性子散乱の対象である動的構造因子の表式 (9) を与えた。この表式により $S(q,\omega)$ を定量的に評価するには、すでに A) および B) によってロトン・ギャップやロトン間の相互作用はわかっているから、ロトンが幅を持つ領域

($q \geq 2.5\AA^{-1}$) での混合結合定数 γ_q と、自由ロトンの分散関係 $\epsilon_0(q)$ とが与えられればよい。現在筆者は、この分析を行っているところであり、その結果は近い将来発表するつもりであるが、ここには、詳細な分析によらずとも定性的に言えることに触れておこう。

まず、(9) からわかるように、$S(q,\omega)$ 構造の源は、繰り込まれたロトンの伝搬関数 ($G(q,\omega)$) からくる部分 (自己エネルギー$\Sigma(q,\omega)$ を含む項) と相互作用する 2 ロトンの状態密度 ($\rho(q,\omega)$) である。後者は、多フォノン分枝の $2\Delta_R$程度のエネルギー部分の極を与え、前者は、その分枝のより高いエネルギー部分と 1 素励起分枝を与える。これによりまず、これら二つの分枝の起源が明らかとなった。この際、小さい波数 ($q \leq 2.5\AA^{-1}$) ではロトンの混合はないから、$G(q,\omega)$ の構造と $\rho(q,\omega)$ の構造は独立であり、結局 (16a,b,c) に帰着する。このことから、上の 2) は自然に説明できる。なぜなら、加圧により Δ_M はほとんど変化しないが、Δ_R はかなり減少して、20 気圧程度で、$2\Delta_R < \Delta_M$ となるからである。次に、プラトー部分は、混合の影響を受けた素励起分枝として $G(q,\omega)$ の極で決まるが、相互作用 (1a,b,c) のべき $\alpha \sim 1/2$ 程度のエネルギー依存によって自己エネルギーのランダウ・ピタエフスキーの特異性 ($\alpha = 0$ で出現) が消失するために、大きい波数では $\epsilon(q) \geq 2\Delta_R$ となるとともに、ある波数以上では $G(q,\omega)$ の極も、虚数部分が小さいうちに消える。こうして、1) も自然に説明できた。

References

1) A.C. Forbes and A.F.G. Wyatt , Phys. Rev. Lett. **64**(1990), 1393.
2) H. Namaizawa , Phys. Lett. A **151**(1990), 339.
3) F. Iwamoto , Prog. Theor. Phys. **44**(1970), 1135.
4) J. Ruwalds and A. Zawadowski , Phys. Rev. Lett. **25**(1970), 333.
5) P. Kleban , Phys. Lett. **49A**(1974), 19.
6) H. Namaizawa , J. Low Temp. Phys. **95**(1994), in press.
7) M. Nakajima and H. Namaizawa , J. Low Temp. Phys. **95**(1994), in press.
8) N. Ogita, M. Watabe, M. Udagawa, and K. Ohbayashi , Physica B **165 and 166**(1990), 503 and a private communication from professor K. Ohbayashi and Dr. N. Ogita from Hiroshima University.