Davey-Stewartson 方程式の摂動と数値計算

矢嶋徹（東大工）
西成活裕（東大工）

1．はじめに

一次元系での非線形波動の研究は現在まで精力的に行なわれてきた。その中の一つは、KdV 方程式・非線形シュレディンガー方程式などの可積分系の研究であり、その結果局在構造を持つ解としてソリトンが発見された。ソリトンは、互いの衝突のもとで安定性をもち、裾が指数的に減衰するような局在構造をもつ解で、波としての性質と粒子としての性質を併せ持つものである。ソリトンは、系の持つ非線形性と分散性の釣合の結果生じるものであると知られている。この解に対しては様々な意味での摂動に対する安定性が議論されている。

これに対して、二次元以上の系に対しては局在構造を持つ解はあまり知られていない。一般には二次元以上になるとうまく非線形性と分散性をつり合わせることが難しく、一次元的な描象で（外からエネルギーを入れるとか、結合方程式系を考えることなく）ソリトンを作り出すことはできない。その一例は、Zakharov によって非線形シュレディンガー方程式をモデルとして考察されている [1]。ある初期条件では、系が高次元になると、非線形性が強過ぎて局在構造が有限の時間内に壊れてしまう、collapse と言う現象が現われる。また、KdV 方程式の高次元化された方程式である KP 方程式はソリトン解をもつが、これは一方向にのみ局在した解である。ソリトン解以外では、二次元で局在した構造としてドロミオンがあげられる [2–4]。これは、Davey-Stewartson (DS) 1 型という方程式

$$\mathrm{i}A_t + A_{xx} + A_{yy} + (U+V)A = 0, \tag{1a}$$

$$U_y = (|A|^2)_x, \qquad V_x = (|A|^2)_y, \tag{1b}$$

の解で、指数的に減衰する裾を持つ。しかし、ドロミオンは、衝突の際に一般には粒子数を保存しないなど、ソリトンと異なる性質を持っている。また、この解に対しては、厳密解としての議論は数多くなされてはいるが、摂動安定性などを議論したものは少ない。

ここでは、1ドロミオンの安定性と、1ドロミオンの正面衝突に関して、数値計算を行なった [6,7]。

2．ドロミオン解について

ここでは、DS1 方程式とその１ドロミオン解について簡単に述べる。DS 方程式が記述する系の一つに、二次元の表面波があげられる。非圧縮性の完全流体を考え、速度ポテンシャル・流体表面の高さを微小パラメタを使って展開し、逓減摂動法を適用し、適当に座標変換してやると、(1a), (1b) が得られる [5]。その際、変数 U, V は、速度ポテンシャルの最低次のオーダーの x, y 微分を表わし、また A は同じオーダーの平面波の包絡面を表わす量である。そのため、U, V は平均流と呼ばれており、外からのエネルギーの注入に対応するものとなっている。A には適当なネーミングはないが、ここでは主流と呼ぶことにする。

方程式 (1a,1b) を見て頂ければわかるように、時間発展をあらわに持っているのは (1a) だけである。従って、変数 U, V については各時間で (1b) に基づいて積分してやれば良い。その時に境界条件 $U(x, y=-\infty)$, $V(x=-\infty, y)$ が必要になる。１ドロミオンと呼ばれる解は、

$$A = G/F, \tag{2a}$$

$$F = 1 + \exp(\eta_1 + \eta_1^*) + \exp(\eta_2 + \eta_2^*) + \gamma \exp(\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*),$$

$$G = \rho \exp(\eta_1 + \eta_2),$$

$$U|_{y=-\infty} = \frac{8k_r^2 \exp(\eta_1 + \eta_1^*)}{(1 + \exp(\eta_1 + \eta_1^*))^2}, \qquad V|_{x=-\infty} = \frac{8l_r^2 \exp(\eta_2 + \eta_2^*)}{(1 + \exp(\eta_2 + \eta_2^*))^2}. \tag{2b}$$

$$|\rho| = 2\sqrt{2k_r l_r(\gamma - 1)}$$

$$\eta_1 = (k_r + ik_i)x + (\Omega_r + i\Omega_i)t, \qquad \eta_2 = (l_r + il_i)y + (\omega_r + i\omega_i)t,$$

$$\Omega_r = -2k_r k_i, \qquad \omega_r = -2l_r l_i, \qquad \omega_i + \Omega_i = k_r^2 + l_r^2 - k_i^2 - l_i^2.$$

のような関数で表わされる。これは、図１のように式 (2b) により境界で平均流たちを与え、それをドライブすることで式 (2a) の局在構造が引っ張られて動く仕組みになっている。一般に任意に初期条件・境界条件を与えた場合に A, U, V がどのように振舞うのかは不明で、またリャプノフの方法での解析は不可能なので [7] 数値計算によって初期値境界値問題を取り扱うことにする。

３. 結果と考察

図２は１ドロミオン解の初期条件を与えて数値計算したものである。境界では有限の値

での U, V を与えるべきであるが、微小擾乱の効果を考えに入れることにして (2b) で与えられる境界条件を採用した。これにより、ドロミオンは少なくともその大きさの程度を進む間は微小擾乱の存在にもかかわらず、安定に伝播することがわかる。念のため第一保存量を計算したところ、10^{-15} 程度の相対誤差におさまることがわかった。

次に、厳密解から外れる例として1ドロミオンの重ね合わせを初期条件とし、正面衝突の場合を計算した。図3がその結果である。お互いに近付いてきたドロミオン同士が中間パルスを作った後4個のパルスに分かれていくことがわかる。これは、かなり一般的な現象である。これは、式(1a) により分かるように、平均流が引力ポテンシャルの働きをして主流の局在構造を引き付けるからであると考えられる。図3の右側の等高線図（閉曲線が主流、直線上のものが平均流) には平均流の交点に主流が引き付けられていることが表されている。

以上のように、DS1 方程式の解であるドロミオンについて、その安定性をある程度調べることができた。この他に、外力などの加わったものなど、可積分から外れたような系についての考察が残されているが、それについては現在研究を続行中である [7,8]。

---

[1] V. E. Zakharov Sov. Phys. JETP **35**, 908 (1972).

[2] M. Boiti, J. J.-P. Leon, L. Martina and F. Pempinelli, Phys. Lett. A **132**, 432 (1988).

[3] A. S. Fokas and P. M. Santini, Phys. Rev. Lett. **63**, 1329 (1989).

[4] J. Hietarinta and R. Hirota, Phys. Lett. A **145**, 237 (1990).

[5] A.Davey and K.Stewartson, Proc. R. Soc. London A **338**, 101 (1974).

[6] K. Nishinari and T. Yajima, to appear in J. Phys. Soc. Jpn. **63**, No. 10 (1994).

[7] K. Nishinari and T. Yajima, preprint (submited to Phys. Rev. E)

[8] 矢嶋徹・西成活裕, 京都大学数理解析研究所講究録 **866** 「流体における波動現象の数理とその応用」, 252 (1994)

図 1

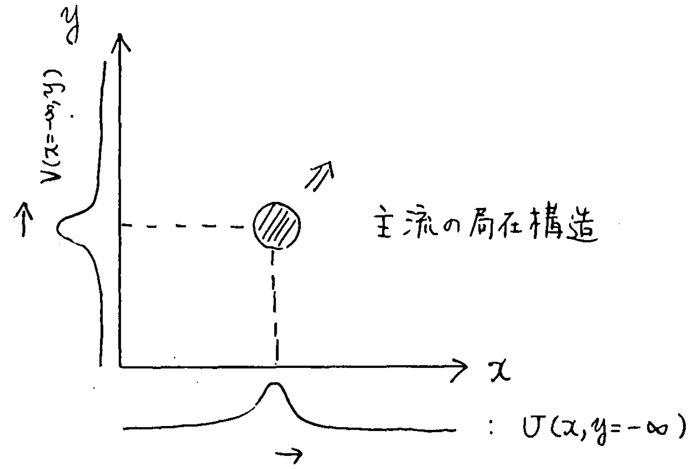
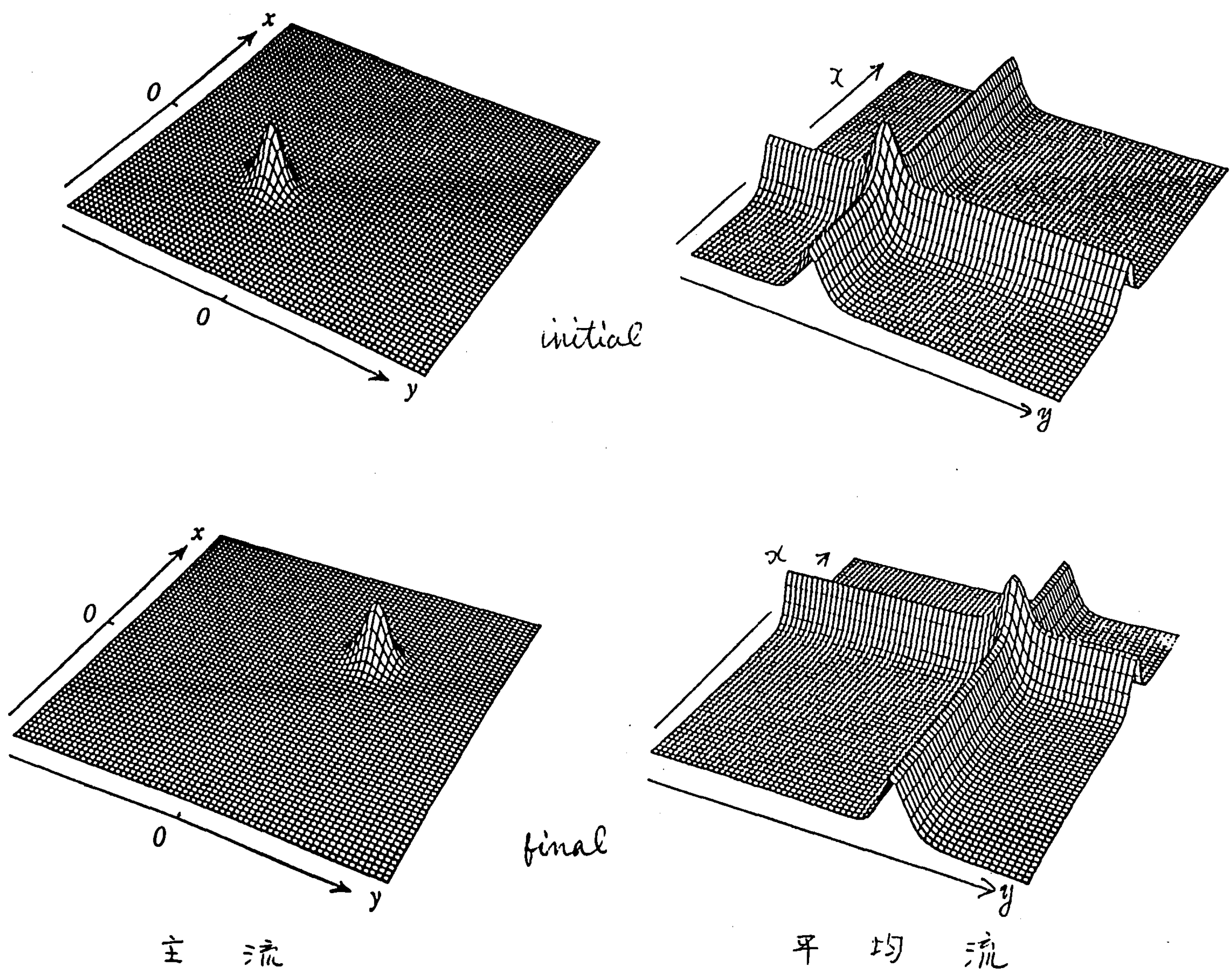


図 2



主 流　　　　　　平 均 流

図 3