

# 質量保存 SAND PILE モデル

東工大理 清水 雄一郎・小野 昱郎

## 1 はじめに

Bak, Tang, Wiesenfeld は、1987年 [1] に SAND PILE モデルを考案した。このモデルは、自然界に見られる自己組織臨界現象を再現するモデルであった。普通見られる相転移での臨界状態は、温度、磁場などの外部パラメータをある特別な値に調節しなければ見られない。ところが自然界のある系では、外部パラメータを調節しなくても十分時間が経てば自発的に臨界状態に達する。

Bak 達はこういった系の例として砂山を考えた。砂山は、傾きを段々急にしていくとある傾きを越えたところで、表面に砂崩れを起こし傾きを下げようとする。そしてある傾きになると、砂崩れは止まり砂山は安定する。外部から砂を加えた時も同様である。つまりこの傾きを持った状態が自己組織化された臨界状態なのである。

Bak 達は砂山をモデル化するために次のようなルールを持ったセルオートマトンを考えた。まず一次元系では、 $z_n(x)$  を局所的な勾配として、 $z_n(x)$  があるしきい値  $z_c$  を越えると、

$$\begin{cases} z_{n+1}(x) = z_n(x) - 2 \\ z_{n+1}(x \pm 1) = z_n(x \pm 1) + 1 \\ \text{for } z_n(x) > z_c \end{cases} \quad (1)$$

二次元では

$$\begin{cases} z_{n+1}(x, y) = z_n(x, y) - 4 \\ z_{n+1}(x \pm 1, y) = z_n(x \pm 1, y) + 1 \\ z_{n+1}(x, y \pm 1) = z_n(x, y \pm 1) + 1 \\ \text{for } z_{n+1}(x, y) > z_c \end{cases} \quad (2)$$

上のダイナミクスを見ればわかるように、砂崩れのたびに全体の傾きの和が保存されていることがわかる。bak 達は以上のモデルでシミュレーションを行なって、砂崩れの大きさ、継続時間などの分布がベキ分布を持つことを初めて示した。

## 2 質量保存の SAND PILE モデル

Bak 等の SAND PILE モデルは傾きを保存するモデルであるため、質量の保存を考えていない。しかし、現実の砂山を傾きではなく質量保存が成り立っていると考えられる。また、その方が実験結果との比較にもなると思われる。また Bak 等のモデルでは二次元でも傾きがスカラー量であるとしたが、現実の砂山では傾きはベクトル量である。

そこで我々は、格子に持たせる値を傾きではなく砂の高さ(質量)としてダイナミクスを次のように変えたモデルを考えた。まず、ある  $n$  ステップの  $x$  軸方向・ $y$  軸方向の段差(傾き)、 $z_x, z_y$  を

$$\begin{cases} z_{xn}(x, y) = h_n(x, y) - h_n(x + 1, y) \\ z_{yn}(x, y) = h_n(x, y) - h_n(x, y + 1) \end{cases} \quad (3)$$

とする。そして、例えば  $z_{xn}$  だけがあらかじめ決めた傾きの臨界値  $z_c$  を越えたときは次のような砂崩れが起きる。

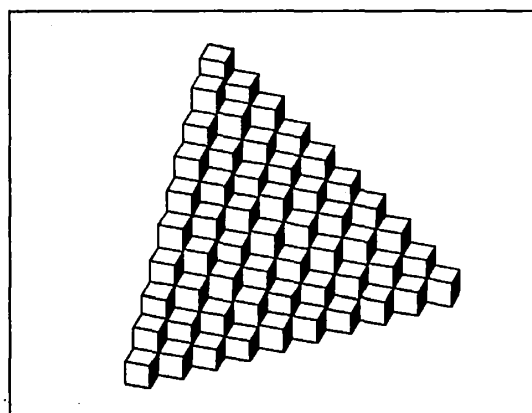
$$\begin{cases} h_{n+1}(x, y) = h_n(x, y) - 2 \\ h_{n+1}(x + 1, y) = h_n(x, y) + 2 \\ \text{for } z_{xn}(x, y) > z_c \end{cases} \quad (4)$$

また、 $z_{xn}, z_{yn}$  がともに  $z_c$  を越えた時は、

$$\begin{cases} h_{n+1}(x, y) = h_n(x, y) - 2 \\ h_{n+1}(x + 1, y) = h_n(x + 1, y) + 1 \\ h_{n+1}(x, y + 1) = h_n(x, y + 1) + 1 \\ \text{for } z_{xn} > z_c \text{ and } z_{yn} > z_c \end{cases} \quad (5)$$

となる。

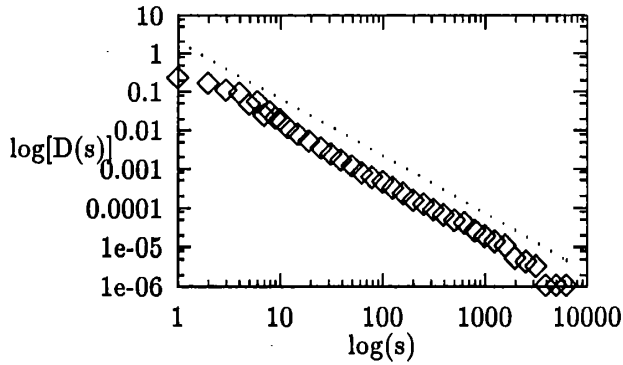
系は、第1図にあるようにピラミッドの1/4だけ持ってきたような形をしており、系のサイズを底面の二等辺三角形の一辺の長さ  $L$  で表す。 $x + y = L + 1$  を open boundary の境界としている。シミュレーションは主に  $L = 100$  の大きさの系で行なった。臨界状態はすべての段差が  $z_c$  に等しい minimally stable state から始め



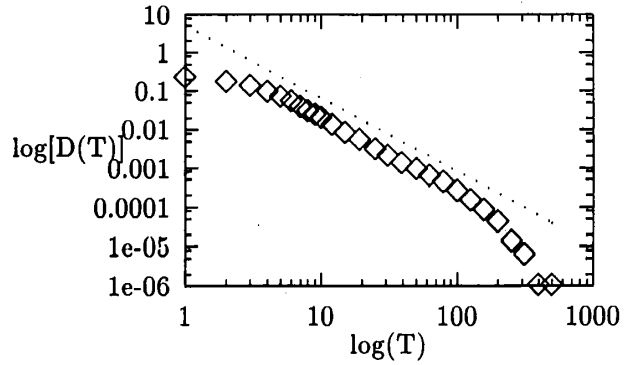
第1図 二次元 SAND PILE モデルの形

て、ランダムに砂を落したり頂点を含むある長方形内の砂山を一段盛り上げたりして砂崩れを起こして作る。こうて作った臨界状態の砂山から段差が臨界値に等しい格子を選んで、そこに砂を落して起こる砂崩れの大きさの分布が第2図である。このように、分布はベキ分布となる。 $D(s) \simeq s^{-\tau}$  とすると、 $\tau = 1.48$  である。第3図は砂崩れの継続時間の分布で、これも同様にベキ分布になり、 $D(T) \simeq T^{-\nu}$  とすると  $\nu = 1.89$  である。系のサイズが

$L=100$  なので、 $T=100$  辺りで有限サイズ効果のためべき乗則からのずれが見られる。

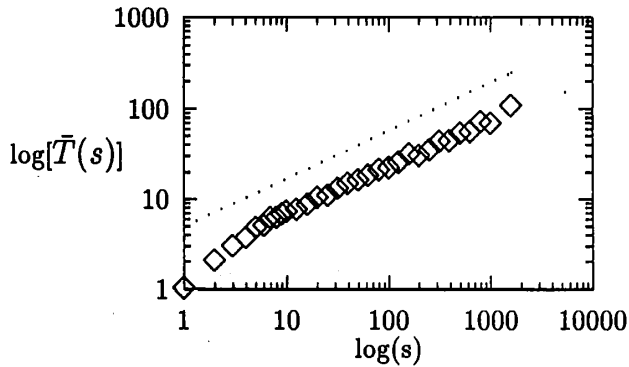


第2図 砂崩れの大きさの分布

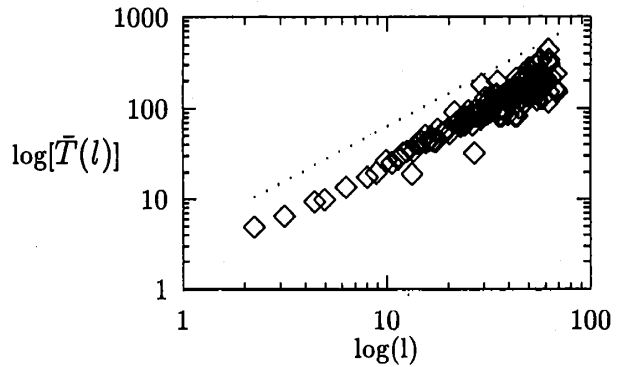


第3図 継続時間の分布

第4図は砂崩れの大きさが  $s$  である時の継続時間の平均値で、これもべき乗則がなりたっていて、 $\bar{T}(s) \simeq s^x$  とすると  $x=0.53$  である。これは、砂崩れの広がり方が二次元的である証拠と思われる。また、砂崩れの始まった点から測って最も遠くで砂崩れの起きた点までの距離を砂崩れのリニアサイズとするとし、このリニアサイズに対する平均継続時間が第5図で、 $\bar{T}(l) \simeq l^z$  とすると、 $z=1.2$  である。指数  $z$  は一般に動的臨界指数と呼ばれているものである。



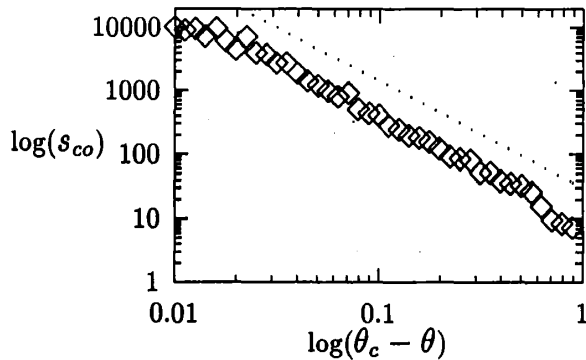
第4図  $s$  に対する平均継続時間



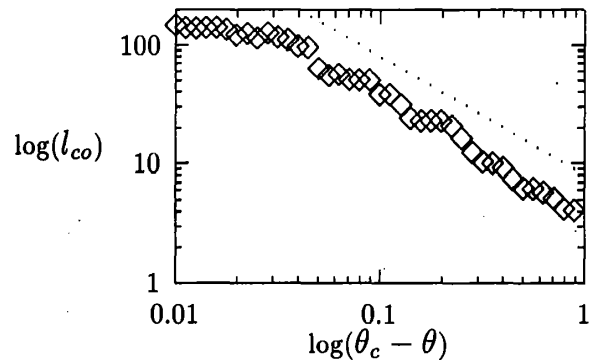
第5図  $l$  に対する平均継続時間

臨界状態ではあらゆる大きさの砂崩れが起きるが、傾きが臨界値以下の場合砂崩れの分布は有限の大きさのカットオフを持つことになり、それ以上の大きさの砂崩れは起きなくなる。第6、7図は砂山の傾きを臨界状態の傾きよりも小さくした時の砂崩れの大きさの最大値  $s_{co}$  とそのリニアサイズ  $l_{co}$  の最大値の分布である。 $\theta$  は局所的な傾きを砂山全体

で平均したもので、 $\theta = \langle z(x, y) \rangle$  である。 $\theta_c$  は臨界状態の値である。



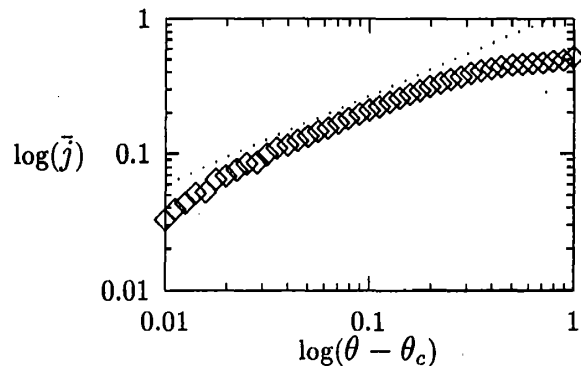
第6図 臨界以下のクラスターサイズ



第7図 リニアークラスターサイズ

この分布図もやはりべき乗則を示している。 $s_{co} \simeq (\theta_c - \theta)^{-1/\sigma}$ ,  $l_{co} \simeq (\theta_c - \theta)^{-\nu}$  とすると  $\sigma = 0.595$ ,  $\nu = 1.0$  となる。

反対に傾きを臨界状態よりも大きくしてやると、砂山の表面で定常的に砂崩れが起きる。この砂崩れの時間平均の大きさを  $\bar{j}$  とする。この  $\bar{j}$  の傾きに対する分布が第8図である。 $\bar{j} = (\theta - \theta_c)^\beta$  とすると  $\beta = 0.65$  である。これらの指数は bak 等のモデルでも計算されている [2]。それは表1にまとめてあって、bak 等のモデルの指数は我々の得た数値とは異なっている。



第8図 臨界以上での砂の流れ

臨界指数	我々のモデル	bak のモデル
$\tau (D(s) \simeq s^{-\tau})$	1.49	1.22 [3]
$\nu (D(T) \simeq T^{-\nu})$	1.89	1.15 [3]
$x (\bar{T} \simeq s^x)$	0.533	0.68 [4]
$z (\bar{T} \simeq l^z)$	1.22	1.29 [2]
$\sigma (s_{co} \simeq (\theta_c - \theta)^{-1/\sigma})$	0.595	0.72 [2]
$\nu (l_{co} \simeq (\theta_c - \theta)^{-\nu})$	1.00	0.74 [2]
$\beta (\bar{j} \simeq (\theta - \theta_c)^\beta)$	0.650	0.7 [2]

表1 臨界指数の比較

### 3 スケーリング関係式

Bak 達のモデルはいくつかのスケーリング関係式を満たすことが知られている。例えば、砂崩れの大きさの分布関数  $D(s)$  と継続時間の分布関数  $D(T)$  との間には  $D(s) = D(T) \frac{dT}{ds}$  の関係が成り立つ。これに  $\bar{T} \simeq s^x, D(s) \simeq s^{-\tau}, D(T) \simeq T^{-y}$  を用いると  $s^{-\tau} = s^{-xy+x-1}$  となるので次の関係式が成り立つ [4]。

$$\tau - 1 = x(y - 1) \quad (6)$$

この関係式に我々のモデルで得た値を代入してみると  $x(y - 1)/(\tau - 1) = 0.97$  となつてかなり良い精度で成り立っていることがわかる。また砂崩れの形のフラクタル次元を  $D$  とした時、砂崩れの大きさのカットオフ  $s_{co}$  とそのリニアサイズ  $l_{co}$  の間に  $s_{co} = l_{co}^D$  の関係が成り立つと考えられる。これに  $s_{co} \simeq (\theta_c - \theta)^{-1/\sigma}, l_{co} \simeq (\theta_c - \theta)^{-\nu}$  を用いると、

$$D = 1/\sigma\nu \quad (7)$$

が得られる [2]。我々の得た値を代入してみると  $D = 1.68$  となる。実際砂崩れの形はほとんど二次元的なのでこれはあまり良い値とは言えない。これとは別に砂崩れのサイズ  $s$  とそのリニアサイズ  $l$  との間に  $s = l^D$  の関係が成り立っていると考えられるので  $\bar{T} \simeq s^x$  と  $\bar{T} \simeq l^z$  を用いて

$$D = z/x \quad (8)$$

同じく我々の得た値を代入してみると  $D = 2.29$  となり、これは少し大きめである。しかし我々は砂崩れの大きさを幾何学的大きさでなく砂崩れの大きさを回数で求めたので、式 (7) の値は小さめに式 (8) の値は大きめに出了のだと考えられる。

### 4 運動エネルギーの効果

これまでのモデルでは下に流れ落ちた砂は完全に静止し、砂の持っていた運動エネルギーはすべて散逸する。しかし、現実の砂山では一度滑り出した砂は滑べりやすくなっているはずである。そこで、砂の持っている運動エネルギーは散逸しないで次のステップに影響するようにダイナミクスを書き換えてみる。まず、 $z_c$  よりも小さいしきい値  $z_{ck}$  を考える。前のステップで砂崩れを起こし運動エネルギーを持った砂はその格子点の段差が新しいしきい値  $z_{ck}$  よりも大きければ砂崩れを起こすとす。こうしてさまざまな分布を計算をするとこれまでと同様にベキ分布を示し、その指数の値は下の表 2 のようになる。

臨界指数	$z_c = 10$	$z_{ck} = 9$	$z_{ck} = 8$
$\tau (D(s) \simeq s^{-\tau})$	1.49	1.42	1.25
$y (D(T) \simeq T^{-y})$	1.89	1.57	0.992
$x (\bar{T} \simeq s^x)$	0.533	0.480	0.370
$z (\bar{T} \simeq l^z)$	1.22	1.00	1.00

表 2 臨界指数の変化

$z_{ck}$  を小さくしていくと分布がよりサイズの大きい方に偏っていく、つまり傾きが小さくなっていくのがわかるのがわかる。Prado [5] 達の報告では運動エネルギーの効果を入れると、分布の大きなサイズに山が見られるということだが、今回の計算結果には現れなかった。これは Prado 達が始め運動の効果を入れないで臨界状態を作ったのに対し、我々は始めから運動の効果を考えて臨界状態を得たことの違いだと思われる。

## 5 おわりに

我々はその他に、外からランダムに砂を落した時に系内で起こる砂崩れの時系列のパワースペクトルを計算したが、今のところ Bak 達の報告にある  $1/f$  スペクトルは現れていない。今回の計算は、Bak 達のモデルをより現実の砂山に近付けたらという視点で行なった。今後は実際に行なわれた実験の再現とデータの比較をしていきたいと思う。

## 参考文献

- [1] P.Bak, C.Tang and K.Wiesenfeld: Phys. Rev. Lett. **59**(1987); Phys. Rev. A **38**(1988)364
- [2] C.Tang, P.Bak: Phys. Rev. Lett. **60**(1988)
- [3] S.S.Manna: J. Stat. Phys. **59**(1990)
- [4] J.Kertész and L.B.Kiss: J. Phys. **23**(1990)
- [5] C.P.C.Prado and Z.Olami: Phys. Rev. A **45**(1992)