非対称 Swift-Hohenberg モデルにおける局在パターン

神戸芸工大 大内克哉、九大 藤坂博一、千葉商短大 江上邦博

平成6年 11月 11日

最近の20年間で、パターン形成についての多くの研究が実験、理論双方において行なわれてきた。我々はレイリーベナール対流系や液晶対流系での roll pattern や hexagonal pattern、反応拡散系での target pattern や spiral pattern 等の、多くの例を見ることができる。その中でも特に、レイリーベナール対流系は構造の自己組織化を示す顕著な例として注目され、多くの研究結果が発表されている。特に、1977 年に Swift と Hohenberg によって2次元 roll pattern の形成に対する微分方程式

$$\dot{w}(\mathbf{r},t) = [\varepsilon - (\nabla^2 + k_0^2)^2]w - w^3, \tag{1}$$

が提案され、数値的及び理論的な解析が行なわれている。ここで wは速度場の垂直成分を表わし、$\epsilon \propto R - R_c$を満たす。

他方、化学反応系もまた空間的もしくは時間的に pattern を形成する典型的なシステムである。1952 年に Türing が生態系での自己組織化について簡単なモデルを提案し、その後、様々な反応拡散系における自己組織化についての研究がなされた。最近、Quyang と Swinney が CIMA(chlorite-iodide-malonic acid) を使った実験を行い、roll pattern や hexagonal pattern を観測することに成功した。しかしながら方程式 (1) では、hexagonal pattern を記述することができず、このような反応拡散系のダイナミクスを記述するには不十分である。そこで、我々は Türing 不安定性を示す反応拡散系を議論するため、非対称 Swift-Hohenberg 方程式

$$\dot{w}(\mathbf{r},t) = [\varepsilon - (\nabla^2 + k_0^2)^2]w + aw^2 - w^3. \tag{2}$$

を導入し、wの示す様々な pattern を調べた。実際、Brusselator 方程式に対して、Türing instability を生じるパラメータで reductive perturbation を行なうと、方程式 (2) を導くことができる。このシステムでは、よく知られているように、適切なパラメータ領域において三角格子パターンがみられる。またあるパラメータ領域では、三角格子とロール構造が長時間にわたって共存

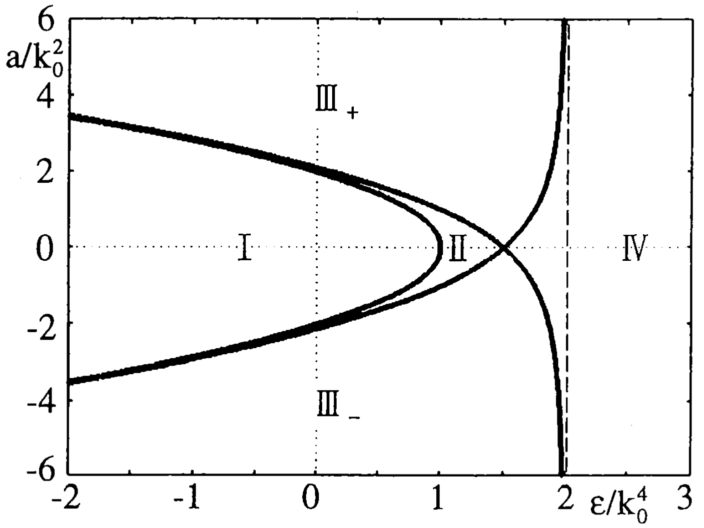

図 1: 非対称 Swift-Hohenberg 系での均一解の安定性

し、そのパターンの競合によって緩和過程がより遅くなることが分かっている（参考文献（[1]））。ここでは、よりϵの大きい領域でみられる双安定状態とその界面ダイナミクスおよび、均一解とロール解の境界のパラメータでみられるスポット解について報告する（参考文献（[2]））。

方程式（2）の均一解は、

$$w_0^{\pm} = \frac{1}{2}[a \pm \sqrt{a^2 + 4(\epsilon - k_0^4)}] \tag{3}$$

と求まり、その線形安定解析を行なうと図 1 のように 4 つの領域に分かれる。このうち、I、II の領域は均一解が存在しないか不安定な領域で、IV は w_0^+、w_0^-のどちらも安定なため、いわゆる双安定構造を示し、その 2 つの解の境界でキンクのダイナミクスを展開できる。一般的な相分離系と違い、このシステムでは、$a = 0$ の時、2 つのキンク間の距離 L の時間依存性が

$$\dot{L} = -2\gamma e^{-3L/2\xi'} \cos^3\{Q'(\frac{L}{2} - \phi)\} \tag{4}$$

で記述され、有限の距離 L_m

$$Q'(\frac{L_m}{2} - \phi) = \frac{\pi}{2} + m\pi \tag{5}$$

で安定になるため、無限の平衡状態が存在する。

次に Spot 及び Earthworm 構造について述べる。図 2 は$\epsilon = 0.4$、$k_0 = 1$、$a = 2.5$ に対して初期条件 $w \simeq 0$ の元で数値シミュレーションした結果である。最初に多くの Earthworm が形成されて、それが次第に縮んでいき、最終的に spot 状態になり、しかも一度 spot が形成されるとその運動は非常にゆっくりしたものになる。spot 解 $w_S(\mathbf{r})$ は、$D \equiv \nabla^2 + k_0^2$とすると

$$D^2 w_S = \epsilon w_S + a w_S^2 - w_S^3 \tag{6}$$

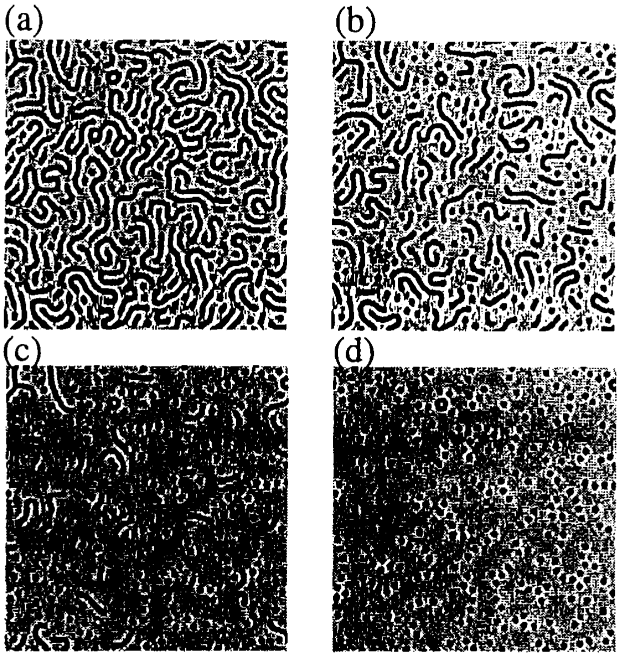

図 2: spot が見られるパラメータでの系の時間発展

から求まる。$r \gg 1$ での w_Sは、w_0^+からのずれを摂動展開の形式に求めることができ、その第一項は、

$$\tilde{w}_S(r) \simeq \frac{f_0 e^{-r/\xi}}{\sqrt{r}} \cos(Qr + \phi_0) \tag{7}$$

となる。ここで、$w_S = w_0^+ + \tilde{w}_S$で、

$$\theta_\kappa = \cos^{-1}[\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{k_0^4}{\sqrt{k_0^2 - \Gamma}})}]. \tag{8}$$

他方、Earthworm 構造の胴体部分の形状は、$D = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + k_0^2$として求めることができ、$r \gg 1$ では

$$\tilde{w}_{EW}(r) \simeq B' e^{-r/\xi} \cos[Q(r - r_0')] \tag{9}$$

となる。この Earthworm は時間に対して線形に縮んでいくことが、次のようにして簡単に示すことができる。$\Lambda(t)$ を時間 t での EW の長さとする。その時の EW が存在する時のエネルギーは、

$$H = H_{unif} + H_{h,t} + \Lambda \tilde{h}_{EW} \tag{10}$$

として与えられる。ここで、H_{unif}は EW がない時のエネルギー、$H_{h,t}$は EW の head と tail があることによるエネルギー差、そして h_{EW}は単位長さ当たりの EW のエネルギー差である。この時、$\int d\mathbf{r}(\frac{\delta H}{\delta w})^2$は

$$\int d\mathbf{r}(\frac{\delta H}{\delta w})^2 = \int_{h,t} d\mathbf{r}(\frac{\delta H}{\delta w})^2 + \int_B d\mathbf{r}(\frac{\delta H}{\delta w})^2$$

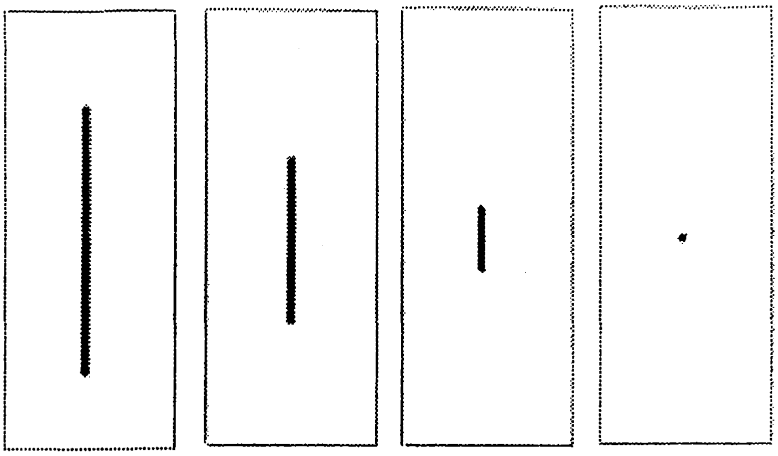

図 3: Earthworm の時間発展

$$= \int_{h,t} d\mathbf{r} (\frac{\delta H}{\delta w})^2, \tag{11}$$

のように近似できる。ただし $\int_{h,t} d\mathbf{r}$ は head と tail 領域での積分を表し、$\int_B d\mathbf{r}$ は body 部分の積分を表していて、$w = w_{\mathrm{EW}}$ の時 0 となる。H には

$$\dot{H} = -\int (\frac{\delta H}{\delta w})^2 d\mathbf{r} \tag{12}$$

の関係があるので、式 (10) と式 (11) より

$$\dot{\Lambda}(t) = -v_{\mathrm{EW}} \tag{13}$$

、ただし v_{EW} は shrinking velocity で、

$$v_{\mathrm{EW}} \simeq \frac{1}{\tilde{h}_{\mathrm{EW}}} \int_{h,t} d\mathbf{r} (\frac{\delta H}{\delta w})^2 \tag{14}$$

と表され、Λ と独立である。このことから、Earthworm は時間とともに線形に縮んでいくことが分かる。図 3 は、$\Lambda(t)$ の時間依存性を数値シミュレーションで示したものであり、上述の結果を保証している。このようにして初期の段階で形成された EW 構造は、head と tail を不変に保ったまま時間とともに線形に縮んでいき、最後に head と tail がお互いに合わさって spot を形成する。その結果、初期に形成された EW と spot の総数は時間に対して不変となり、その総数は純粋に初期条件に依存する。

最後に、spot が形成された後でのシステムのダイナミクスについて述べる。上で述べた結果から、充分時間が経過した後のダイナミクスは spot 間の相互作用で決まる。ここでは spot 間の相互作用の形及びその特徴について述べる。まず最初に spot 間の相互作用を求めるため、$w(\mathbf{r}, t)$ は spot 解の重ね合わせで書けるものと仮定する。すなわち

$$w(\mathbf{r}, t) = f_0 \sum_{j=0}^{N} \eta(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)|) + w_0^{(+)} \tag{15}$$

ここで $f_0\eta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j(t)|) = w_S(\mathbf{r}-\mathbf{r}_j) - w_0^{(+)}$。$|\mathbf{r}-\mathbf{r}_j| \gg 1$ での $w_S(\mathbf{r})$ は spot 解 (7) で表される。今、位置 $\mathbf{r}_1$、$\mathbf{r}_2$、...、$\mathbf{r}_N$に N個の spot が存在するとし、その spot 間の距離が十分離れているとする。式 (15) を方程式 (1) に代入し、いくつかの式変形を行なうと、spot の運動方程式

$$\dot{\mathbf{r}}_j = -\frac{\partial U\{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \cdots \mathbf{r}_N\}}{\partial \mathbf{r}_j} \tag{16}$$

を得る。ここで、Uは、全ポテンシャル

$$U = \frac{1}{2}\sum\sum_{j\neq l}\eta(|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_l|). \tag{17}$$

で、$\eta(r)$ は spot の概形 (7) から決定される。今、2つの spot が存在する場合を考えると、その間の距離 rは

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -2\eta'(r) \\ &= \frac{2e^{-\frac{r}{\xi}}}{\sqrt{r}}[(\frac{1}{2r}+Q)\cos\{Q(r-r_0)\} + Q\sin\{Q(r-r_0)\}]. \end{aligned} \tag{18}$$

に従う。その平衡条件は、

$$Q\tan\{Q(r_{\mathrm{eq}} - r_0)\} = -(\frac{1}{2r_{\mathrm{eq}}} + \frac{1}{\xi}), \tag{19}$$

で与えられ、それは非常に多くの平衡解を持つ。式 (18) で表される短距離相互作用のため、spot 間に長距離秩序は形成されない。これが図 3 等に見られるような空間的な乱雑さの原因であろう。更に、短距離相互作用に加えて、このシステムに特有な空間的な振動要素があるため、多くの局所平衡状態が存在する。このことから、spot が安定に存在する領域では、Lyapunov 関数が無限に多くの local mimima を持つことが容易に予想される。

非対称 Swift-Hohenberg 方程式は、対称 Swift-Hohenberg 方程式と異なり roll、triangular pattern、bistability 等様々な空間パターンを示すことが分かっている。ここでは特に spot pattern に着目し、その形状、形成過程、形成後のダイナミクス等を調べた。このシステムの特徴は、相分離系等と異なりある波数を持った振動項が存在し、そのための無限の局所平衡状態を形成することである。

参考文献

[1] K. Ouchi, T. Horita, K. Egami and H. Fujisaka, Physica D **71** (1994), 367.

[2] H. Fujisaka, K. Ouchi and K. Egami, 'Domain kinetics, earthworm structure and spotty pattern in the asymmetric Swift-Hohenberg model' to be submitted