カオスの縁, 窓でのノイズに対する安定性

慶大理工　岩崎 唯史

最近, 生命における自律的自己組織化現象に関する研究がさかんにされている. このような研究におけるキーワードの一つが "カオスの縁への進化 (Evolution to the edge of chaos)" という考え方である. 例えば, カオスの持つ多様なパターンを記憶に利用し, 計算能力を議論しようとしたとき,

- 秩序系では, その周期で規定される以上の記憶を持つことが出来ないために, 高度な計算処理は不可能.
- カオス系では, 厳密な規定を必要とする高度な計算はその軌道不安定性の為に困難.

であると思われる. このように, 秩序系だけでも, カオス系だけでも複雑で高度な計算処理能力は期待できず, カオスの縁 (秩序とカオスの境界) でこそ双方の欠点を補い, 長所を持ち合わせることができる可能性があると期待するのである. 進化現象においては, カオスの縁こそが有用な変異を蓄積して迅速に環境の変化に適応する柔軟性をもちうるのではないかということである. (カオスの縁への進化を具体的に示した一つのモデルとしては, 鈴木らのマネゲーム [1] がある.)

このような分野の研究では, カオスの縁でのカオス的側面である状態の多様性に着目しがちである. しかしここでは, 周期的側面である情報の蓄積, 固定化に視点を置き, カオスの縁でのノイズに対する安定性をモデル化による予測法 (まねしやすさ) の立場から議論する.

モデル化による予測法とは, まず最初に観測時系列 x_n に対してモデル運動式 ($x_{n+1} = f(x_n, a)$) をたてる. ただし, a は関数型 f における係数 (パラメータ) ある. 次になんらかの "予測誤差" $Q(a)$ を定義し, 最後に $Q(a)$ を最小にするものを a の推測値 a_g とする [2].

ここでは x_n がロジスティク写像

$$x_{n+1} = 1 - a_{\mathrm{ex}}\, x_n^2 + \delta_n, \quad (n = 1, 2, \ldots, N), \tag{1}$$

で生成されるとする. δ_n はノイズであり, 以下では分散 σ_{NS}^2 のガウス分布から生成される乱数とする. したがって, σ_{NS}^2 はノイズの大きさを表す目安となる.

$Q(a)$ としてはシングルステップに対する平均自乗誤差

$$Q(N,a) = \sum_{n=1}^{N}(x_{n+1} - f(x_n, a))^2, \tag{2}$$

を用いることにする．その理由は，シングルステップのみの予測誤差 $x_{n+1} - f(x_n, a)$ は，ダイナミクスが周期的であろうとカオス的であろうと同程度の予測誤差しか与えないからである [3]．もし (2) 式に可能なすべてのステップ対する予測誤差を含めてしまうと，カオス軌道の長ステップ予測に対して誤った予測値を与えるという自明な問題点が生じてしまう [4]．平均自乗誤差は短ステップ予測に対しては有効であるが，カオス軌道に対する長ステップ予測にはむかず，その有効さはリアプノフ数に大きく依存するのである．

以下では，ノイズの存在下での自己認識能力をノイズに対する安定性と考え，(1) 式中の $a_{\rm ex}$ ノイズの加わった N 個のデータ列を用いた推測値 a_g との差 ($\sqrt{(a_g - a_{\rm ex})^2}$)，すなわち予測誤差によって議論する．

下図に，ノイズに対する安定性 (予測誤差) のロジスティク・パラメータ $a_{\rm ex}$ 依存性を示す．

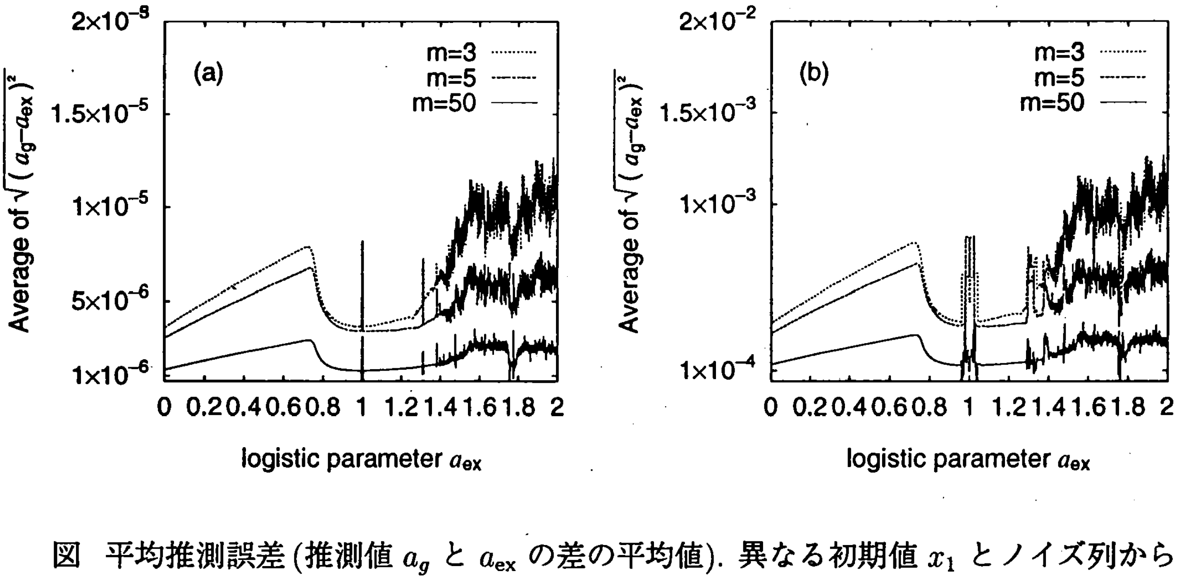

図　平均推測誤差 (推測値 a_g と $a_{\rm ex}$ の差の平均値)．異なる初期値 x_1 とノイズ列から生成した 100 組のデータ列 $\{x_n\}(n = 1, 2, \ldots, N)$ 各々に対して $Q(N, a)$ を最小にする a_g を求めた．$a_{\rm ex}$ のきざみ幅は 4×10^{-4}．(a) $\sigma_{\rm NS} = 1 \times 10^{-5}$．(b) $\sigma_{\rm NS} = 1 \times 10^{-3}$．

図 (a),(b) から，データ列の個数 N が多くなるにつれて，カオスの現われる領域 ($a_{\rm ex} > 1.38$) の予測誤差が減っていくのが分かる．これはおおまかにいうと，シングルステップの

みに基づく限り, N が多ければカオス軌道も周期軌道の予測と同程度の誤差で予測できることを示している. しかし, その減り具合は周期的な軌道の領域 ($a_{\mathrm{ex}} < 1.38$) のそれより大きく, 特に N の増加と共に $1.75 < a_{\mathrm{ex}} < 1.79$ の最も大きな "窓"がはっきりと現われ, そこでの予測誤差は一部の周期的な部分の予測誤差より小さくなっている. このように, カオスの縁や "窓"のノイズに対する安定性は, N が大きくなって初めて現われるものと思われる. また, ノイズの大きさを大きくすると "窓"の現われ方はその鮮明さを失う (図 (b)).

容易に想像できたことだが, 図 (a),(b) は (1) 式のロジスティク写像のリアプノフ数のグラフとよく似たものとなっている. これは, リアプノフ数が軌道の広がり方を $|\partial f/\partial x|$ の平均値 (無限個のサンプル数) で定義しのに対し, ここではノイズを加えて実際に軌道を広げ, それを予測誤差に反映させていることとの違いしかないからであろう. しかし, リアプノフ数を定義するときのサンプル数を増減させたときの様子と, 図の N を増減させたときの様子は異なり, 単なる軌道の広がり方の定義の違い以上のものがあると思われる.

以上, カオスの縁, 窓でのノイズに対する安定性をモデル化による予測法の立場から考えると, カオスの縁, 窓での "予測誤差" は周期的, カオス的なところでのそれらより小さくなり, N が長くなるにつれ顕著になる.

ノイズに対する自己認識能力の高さ ("予測誤差"の小ささ) は情報の蓄積, 固定化につながり, その能力は記憶の長さが長いときに初めて得られるもので, 長くなるにつれ顕著になると思われる.

参考文献

[1] J. Suzuki and K. Kaneko, Physica D **75**, 328 (1994).

[2] A. Hübler and E. Lüscher, Naturwissenschaften **76**, 67 (1986); J. Cremers and A. Hübler, Z. Naturforsch **42**a, 797 (1986).

[3] D. Pierre, A. Hübler and D. Pines, preprint (1993).

[4] 本研究会報告『遷移確率に基づいたカオス軌道の予測』を参照.