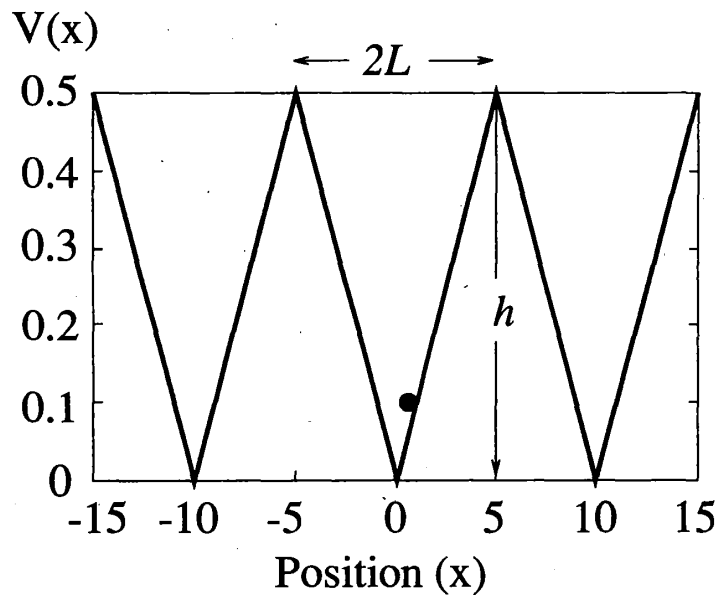


## 多重安定系におけるカオスの特異な動力学

東北大情報 本堂 毅

「パリティ対称性をもつ周期ポテンシャル中でカオスノイズを受ける粒子の運動は、それらと同じスペクトル、不変密度（パリティ不変）を持つランダムノイズを受ける場合と異なるのか？」

まず次のページを見る前に、この単純な問題を考えて頂けたらと思います。本稿は、この何の変哲も無い問いを考えるに至った経緯を報告します。



粒子の従う方程式は：

$$x_{n+1} = x_n - \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=x_n} + \eta_n \quad (n=0,1,2,\dots).$$

ここに、 $x_n$  は時刻  $n$  における粒子の座標、 $V(x)$  はポテンシャル、 $\eta_n$  は時刻  $n$  でのノイズである。ここで、3種類のノイズを考える。

$$\eta_{n+1} = f(\eta_n) = \begin{cases} \text{Uniform Random } [-0.5:0.5] \\ -2|\eta_n| + 1/2 \text{ (Tent map)} \\ 2\eta_n - 1/2 \text{sign}(\eta_n) \text{ (Bernoulli shift)} \end{cases}$$

この3種のノイズは、すべて区間 $[-0.5:0.5]$ で一様な不変密度を持ち、（コイン投げと等価と言われることから解るように）そのスペクトルは白色である。

以上

## 1. はじめに

"Edge of Chaos", "Chaotic Itinerancy", .....

複雑系に於いて、カオスは特別な役割を持っているとの報告が多くなされている。また、カオスには（知的？）情報処理能力がある、との指摘もある。筆者らは、カオスが"複雑系"で示す特異な動力学の理由の一つを明らかにした。その発見の過程には、現在この分野が抱える課題が図らずも現れているものと思われる。そこで、恥を忍んで、本研究を実行するに至った顛末をこの場を借りて報告することにする。読者の方々にも、本稿を考えることで、その過程を追体験して頂ければ幸いである。その中で、（少なくとも、以下に見られる現象の中で、）カオスのどのような性質が本質的であるか、或いはカオスである必要があるかどうかを考えて頂きたいと思います。

## 2. この研究を実行するに至った経緯

2-1) 神経回路網モデルによるカオス時系列の学習過程を研究していた。その過程で時系列がカオスであることが学習を加速する現象を発見する〔前回の研究会報告; 物性研究, 第61巻5号, p.540, 1994: 参考論文1〕（ここでは、バックプロパゲーションアルゴリズムによる逐次学習でテントマップを学習対象としていた）。テントマップのスペクトルはホワイトであり、その不変密度も一様である（一様乱数と同じ）。そのため、テントマップの関数関係を、一様乱数を入力として用いて学習させる比較実験が可能である。しかし、ここで収束性が大きく異なったことは全く意外であった。当然？、計算機実験のバグだと考え、プログラムを徹底的に見直し、様々な角度から比較実験を行った。確かに、加速現象が起こらない初期条件（荷重ベクトル）もあるが、特にバグも見つからず、謎は深まるばかりであった（この間、数カ月が過ぎている）。

この類の系は初期条件やパラメーターの違いによって驚く程多様な現象が起こるため、特定のシミュレーション結果にはユニバーサリティはない。従って、様々な角度、視点から徹底した比較実験をしなければいけないのだが、正直言って、この比較研究ほどやりたくないものはない。なぜなら、その結果、自分の描いているストーリーを自ら否定しかねないから。しかし

「カオスは魔法ではないのだから、学習過程で加速現象が起こるのには、それなりの訳があるはずだ。このまま分からないままにするのは、気持が悪い」。

2-2) 「スペクトルが白色であっても（例えば、テントマップ（ $r=2$ ））カオスは乱数とは異なった影響をシステムに与えている」と考えるようになる。

（ホワイトであっても、カオス時系列はランダムになり切れていないのではないか）

2-3) 多重安定系に於て初めて発現するカオスの非ランダム性があることに気づく

2-4) 考えてみれば、複雑系と呼ばれるシステムの多くは「多重安定」だ！

2-5) ニューラルネットワークの学習過程は特殊な系だから多くの人には分かりにくい → 系を抽象化(単純化)して議論したい。そして、神経回路網モデル以外の系にも適用出来る概念を抽出したい。

2-6) 一次元周期ポテンシャル中でカオスノイズを受ける散逸粒子を議論したら明瞭な結果(理解)を得ることが出来るのではないか? → 問題設定完了

本研究の95%は、ここまでの試行錯誤、膨大な比較実験に費やしています。一度定式化してしまえば、後は *straight-forward*

最初に定式化された問題は、特別の予備知識は不要ですので、誰でも考えることの出来るものだと思います。是非、ご自身でお考え下さい。また、本稿の物理的意味等、詳しくは参考論文[1-4]をご覧ください。

尚、学習過程がカオス時系列の入力で加速される現象は、この単純な問題を解いて得られる知見だけでは十分に説明されません(従って参考論文1も、収束性の違いに対する説明としては不十分です)。この残された問題は、複数の拘束条件が競合する系の動力学として興味深いものです(投稿中)。

#### 参考論文

1) T.Hondou and Y.Sawada, "Analysis of learning processes of chaotic time series by neural networks", Prog.Theor.Phys. **91**, 397-402 (1994).

2) T.Hondou, "Symmetry breaking by correlated noise in a multi-stable system", J.Phys.Soc.Jpn., **63**, 2014-2015 (1994).

3) T.Hondou and Y.Sawada, "Dynamics of multi-stable systems under chaotic noise", Proceeding of International Conference on Dynamical Systems and Chaos (World Scientific, Singapore), in press.

4) T.Hondou and Y.Sawada, "Broken symmetry dynamics of multi-stable systems under chaotic noise", Phys.Rev.Lett.(submitted).

#### 関連論文

Y.Hayakawa, A.Marumoto and Y. Sawada: Effect of the Chaotic Noise on the Performance of a Neural Network Model for Optimization Problems, (Submitted to Phys.Rev.E).

TSP問題について野沢氏がカオスニューラルネットワークを用いて示したパフォーマンス(解への滞在確率)が特別の構造を持たない通常のHopfieldモデル(無論、多重安定系)にカオスノイズを加えるだけで実現されることを示している。同時に、先のカオスノイズと同じ不変密度を持つランダムノイズ環境下では、高いパフォーマンスは実現されないことも示している。この比較実験により、カオスノイズの短時間相関がTSP問題での高いパフォーマンスを生む原因であることが証明された。