Nowhere-Differentiable Attractors in Differentiable (Neuro-) Dynamical Systems

津田一郎　北大理学部

昨年、基研第2回複雑系研究会での講演で、デーモンの科学について議論した(講演のまとめは書かなかったが)。計算機内にデーモンを構成することで、複雑系の秩序形成の機構と計算能力についての理解を得たいとの考えからであった。そこでは、いくつかの具体的な問題を指摘した。アクトミオシン系の相互作用と運動、神経細胞やその集団にみられる閾値の機構、カオスの中のデーモンの可能な一つの定義などであった。特にカオスにおいては、さまざまな形で現われるフラクタル的な構造や関数を厳密に再現できるものをデーモンとした。今回はこのような問題意識のなかで、微分可能力学系でアトラクターの表現が微分不可能になる例をひとつ構成したのでその報告をおこなった。

構成したのは、5次元フローの4次元ポアンカレ写像である(1)。 アトラクターの閉包は、カオス成分をみないようなすべての方向への射影がいたるところ微分不可能な曲線群で表現されるものとなる。このアトラクターのハウスドルフ次元とトポロジカル次元の差は1を越える。カオスとして知られているものは (ハイパーカオスも含めて)すべてこの次元の差は1以下である(その部分がフラクタル な次元をつくる)。これはヨークらによってその存在が予測されていたものである。さらに今回の例は公理A系であることが示せる。 また、モザーが微分不可能なアトラクターの存在を示しているが、モザーの系はトーラスの周期外力による摂動系である。今回の例は、それに対して縮小写像系のカオスでの摂動である。モザーの本質的な点は、摂動前と後の系が同相であるにもかかわらず、摂動前はなめらかなアトラクターが存在し、摂動後は連続でいたるところ微分不可能なアトラクターが存在することを示したことである。これは、構造安定性がひろすぎる概念であるという印象を与える。

以上が研究の内容であるが、今回は「内と外」というテーマの中での講演だったので、上の例を考慮し、内と外の問題を次のように考えてみた。まず、ひきあいにだしたのはアキレスとカメの問題(ゼノンのパラドックス)である。アキレスがカメがもといた場所にくるたびに、数列の項が生成される。 この無限級数を考えると、これは収束するが、この系の内の立場では、この収束概念は無意味で、ただ無限の

項の存在のみが意味をもつ。級数の収束は系の外の立場ではじめてわかることである。このとき、はじめて力学系が意識され、フローの時間パラメーターに対する推移律がなりたつ。推移律の成立は離散化された時間(内の立場での数列につけられた番号)ごとの数列の各項を無意味にする。このように、外の立場で連続体を仮定したときのみ、アキレスはカメにおいつける。このように考えると力学系は外の立場でのみ成立するが、一方で力学系は、上の例でみたように、必ずしもなめらかな多様体をもつとは限らず、フラクタル的になる(金子のトーラスのフラクタリゼーションとモザーのそれを思いだし、比較することは興味深い)。つまり、ちょうど今回の例のような力学系は、内と外のインターフェイスのモデルにならないか、というのが問題提起である。

(1) O.E.Roessler, J.L.Hudson, C.Knudsen and I.Tsuda, Int. J. of Intelligent Systems(to appear, 1995)