非有基的集合論の紹介

—自己言及的状況の表現法として—

北海道大学理学部
辻下　徹

１９９４年9月5日

Aczel[1] により整備された非有基的集合論を紹介する。それに基づいて、知識の論理がどのよう解釈できるかを解説し、それを通して、非有基的集合論における基本的な道具（集合方程式系の解の存在と一意性・余帰納法）の使い方を例示する。

1　知識パズル

Muddy Children's Puzzle　(cf.[3])

11 人の子供が外から教室に戻ってきました。一人を除いて、どの子の顔にも泥がついています。どの子もほかの子の顔が汚れているかどうかは見てわかるのですが、自分の顔がきれいかどうかはわかりません。そこに先生がやって来てみんなを見ると言いました：

(1)「顔に泥が付いたやつがいるぞ。」

そして、「よし、これから頭の体操をしよう。まず、みんな目をつぶって。」といってから

(2)「自分の顔が汚れているかどうかわかるものは手を挙げて！」

と言いました。そのあと、次のように問を繰り返しました：

- 手を挙げる子がいたら、「わかったやつがいるぞ！」と言ってから、質問（２）をする。
- 手を挙げる子がいなかったら、「なんだ、わかる者は居ないのか。」と言ってから、質問（２）をする。

さて、子どもたちの応答はどのような経過を辿るでしょうか？

知識論理式を用いたパズルの表現　次のような記号列（知識論理式と呼ぶ）を用いる（$n=11$）：

- $h_i \in \{0,1\}$:　$h_i=1$ は子ども P_i の顔に泥がついていること。
- $h=(h_1,\cdots,h_n)\in E:=\{0,1\}^n$。
- $K_i\varphi$: P_i は情報 φ を知っている。
- $K_i f$: P_i は関数 f の値を知っている。

- $C\varphi$: P_i はみんなの共通知識。

このとき教室内で起こった知識の変化は次のように記述できる。まず初期共通知識は $C\varphi_0$ である、ただし

$$\varphi_0 := \wedge_{i\neq j} K_i h_j \ \wedge \ \wedge_i \neg K_i h_i.$$

先生の最初の発言により、情報 $\varphi_1 := \exists_i[h_i = 1]$ が公開される。そのあと $\psi := \vee_{i=1}^{n} K_i h_i$ が成り立つかどうかを公開することを続ける。

2 非有基的集合論

$G = (V, E)$ をグラフとする、すなわち $E \subset V \times V$. 写像 $d : V \to \mathbf{V}$ （$\mathbf{V}$ は集合全体のクラス）が G の飾りであるとは

$$d(v) = \{ \ d(w) \mid (v, w) \in E \ \}.$$

非有基性公理（Aczel） 任意のグラフは唯一つの飾りを持つ。

この公理と、任意の集合方程式系が解を持つこととは同値である。

無矛盾性定理（Aczel 1988） Zermero-Fraenkel の公理系が無矛盾ならば、正則性公理を非有基性公理に替えた公理系も無矛盾である。

クラス作用素の最大固定点定理 クラスにクラスを対応させる作用素 $\mathbf{X} \mapsto \Phi\mathbf{X}$ が集合的クラス作用素であるとは、$\Phi\mathbf{X} = \bigcup_{x\subset X} \Phi x$ が成り立つことをいう（x は集合を動く）。集合的なクラス作用素Φ に対して、$J_\Phi := \bigcup\{ \ x \mid x \subset \Phi x \ \}$ とおく。

定理：最大固定点定理

(i) $$J_\Phi = \Phi J_\Phi,$$
(ii) $$\mathbf{X} \subset \Phi\mathbf{X} \Longrightarrow \mathbf{X} \subset J_\Phi.$$

余帰納法によるクラスの定義 上の定理により、クラス $J = J_\Phi$ を次のような言い回しで定義することができる：J は $x \in \mathbf{X} \implies x \in \Phi\mathbf{X}$ を満たすクラス $\mathbf{X}$ の中で最大のものである。これを余帰納的定義という。

注意：非有基的集合論との関係 最大固定点の存在定理に非有基性公理は不要だが、最大固定点が空でないことを示すのに非有基性公理が必要なことが多い。

非有基的集合論の意義 技術的には、初期条件のない（循環する）再帰式により集合を定義できることと、クラスを余帰納的に定義できることが、非有基性公理の大きな効用である。

応用的な意義の中で顕著なのは、循環する種々の状況を直接的に簡明に表現できるようになったことである。たとえば、ゲーデルの不完全性定理を非有基的集合論について示すときは、容易にゲーデル論理式を構成することができる。また、Barwise 達 [2] は「この文は正しくない」というパラドックスを非有基的集合論に基づいて新しい角度から分析している。

また、プロセス理論にも非有基的集合論は簡明な基礎付けを与えた。プロセスの持つ種々の再起性が、従来、その数学的意味付けを込み入っていたものにしていたのだが、非有基的集合論により、プロセス理論全体が数学的に理解しやすくなったと言うことができる。

3　知識論理のモデル理論

知識状態空間　$S \in \bigcap_i (S$ の第 i-成分$)$ を満たすような集合 $S \in \mathbf{V}^n \times E$ のなすクラスを $\mathcal{U}$ とし、クラス作用素 $\mathbf{X} \mapsto \mathbf{K}_{n,E}\mathbf{X}$ を次のように定義する：

$$\mathbf{K}_{n,E}\mathbf{X} := ((\mathbf{pow}\,\mathbf{X})^n \ \times \ E) \cap \mathcal{U}.$$

これは集合的であり、最大固定点クラス $\mathbf{W}_{n,E}$ を持つ。

知識論理式の解釈　知識論理式 φ 対して $\mathbf{W}_{n,E}$ の部分クラス $[\varphi]$ を帰納的に定義できる。たとえば

$$\begin{aligned}[K_i f] &= \bigcup_{v \in \mathrm{Range}(f)} \pi_i^{-1}\mathbf{pow}\,(f^{-1}v),\\ [K_i\varphi] &:= \pi_i^{-1}\mathbf{pow}\,[\varphi],\end{aligned}$$

とおき、また、共通知識論理式 $C\varphi$ に対しては、部分クラス $[C\varphi] \subset \mathbf{W}_{n,E}$ を集合的クラス作用素

$$\mathbf{X} \mapsto [\varphi] \ \cap \ \pi_1^{-1}(\mathbf{X} \cap \mathbf{W}_{n,E}) \cap \cdots \cap \pi_n^{-1}(\mathbf{X} \cap \mathbf{W}_{n,E})$$

の最大固定点クラスとして定義する。$S \in [\varphi]$ のとき $S \models \varphi$ と書く。

公開化作用素　情報 φ に対して、これが公開されることによりもたらされる世界状態の変化を表現する公開作用素 $\kappa_\varphi : [\varphi] \to \mathbf{W}$ を次の性質で定義する：

$$\kappa_\varphi S = \langle \kappa_\varphi(\pi_1 S \cap [\varphi]), \cdots, \kappa_\varphi(\pi_n S \cap [\varphi]), \pi_E S \rangle$$

ただし、$\alpha \subset \mathbf{W}$ に対して$\kappa_\varphi \alpha := \{ \kappa_\varphi S \mid S \in \alpha \}$ とおく。出発点のないこのような再帰的定義が可能なのは、集合方程式系の解の存在と一意性が 非有基的集合論により保証されているからである。

注意すべきことは、$\kappa_\varphi[\varphi] \subset [\varphi]$ とは限らないことである。すなわち、正しい情報 φ が公開されることにより、それが偽りとなることが有り得る。

パズルの問題の解釈　パズルは $\mathbf{W}_{n,E}$ の次のような初期条件と遷移写像の下での軌道を問うものと解釈できる：初期条件は $S_0 \in [C\varphi_0 \wedge \varphi_1]$ である。先生の最初の発言 (1) は、知識状態を $S_1 := \kappa_{\varphi_1} S_0 \in \mathbf{W}_{n,E}$ に変える。そのあと、$\lambda : \mathbf{W}_{n,E} \to \mathbf{W}_{n,E}$ により、状態が遷移する、ただし

$$\lambda(S) := \begin{cases} \kappa_\psi S & \text{if } S \models \psi \\ \kappa_{\neg\psi} S & \text{if } S \models \neg\psi. \end{cases}$$

パズルの解答　$\lambda^k(S_1)$ を決定することができるが、ここでは次のことだけ述べておこう： **定理** ([4])

$$\lambda^k(S_1) \models \begin{cases} \neg\psi & \text{if } k \le 8 \\ \psi & \text{if } k = 9 \\ C(h = (1,1,\cdots,1,0)) & \text{if } k \ge 10 \end{cases}$$

すなわち、8回目まではだれも自分の顔が汚れているかどうかわからないが、9回目にそれがわかる子どもがおり、１０回目以降は、全員自分の顔の状態を知っていることが共通知識となる。(実際には、9回目の時点で、顔が汚れている子どもは皆、自分がそうであることがわかる。そして１０回目に、顔がきれいな子どもが、自分がそうであることがわかる)

参考文献

[1] P.Aczel, *Non-well-founded Sets* CSLI Lecture Notes No. 14, Center for the Study of Language and Information, Leland Stanford Junior University, 1988.

[2] J.Barwise and J.Etchemendy, *The Liar, An Essay on Truth and Circularity*, Oxford Univ. Press, 1987.

[3] J.Y.Halpern and M.Y.Vardi, Model Checking vs. Theorem Proving: A Manifesto, p.151–176 in *Artificial Intelligence and Mathematical Theory of Computation*, Academic Press,1991.

[4] S.Tanaka and T.Tsujishita, Hypersets and dynamics of knowledge (preprint).