高次元の幾何学とダイナミックス

丹羽敏雄
津田塾大学数学科，e-mail: niwa@tsuda.ac.jp

1995 年 2 月 16 日

力学系の理論はこれまで低次元 (1 ~ 3 次元) 空間 (多様体) で展開されるか，あるいは一般次元の空間上で展開されることが多かった．いずれにしても，高次元 ($n \sim 10^{23}$) 性そのものの特性が活かされずに終わっているきらいがある．統計力学は本来，自由度の大きさを基礎にしているが，そこで問題となったエルゴード性などの基本的性質が低次元の場合にもすでに現れることが分かるに従い，いつのまにか多自由度性 (=高次元性) が脇に置かれてしまっているというのが実情であるようだ．

相空間の高次元性を積極的に活かした古典的な例にはヒンチン [1] がある．そこでは，重要なクラスの相関数 (物理量) の値の分布が相空間の高次元性のゆえに持つ著しい特性が，積極的に用いられている．この意味で，そこに展開される議論では，高次元空間の幾何学的特性が本質的である．しかし，彼の議論は本質的にいわゆる平衡状態に限られており，系のダイナミックスは積極的に関わっていない．

我々は [2] において，高次元の幾何学とダイナミックスを関連させることを試みた．残念ながらそこでは，ダイナミックスのジェネレータ，すなわちベクトル場の特性のみが本質的には用いられるだけであるが，それでもエントロピーの増大則に関して何がしかのことがいえるのである．すなわち，ごく僅かな (確率~ $10^{-10^{23}}$ の) 初期条件を除き，長時間 ($\sim 10^{10^{23}}$) ある簡単化されたボルツマン・エントロピーが非減少である，事が示される．

そのとき重要になることは，完全に一般の関数を問題にするのではなく，例えばエネルギーのように ‘加法性’ を持つような重要な関数のクラスに議論を限定し，その関数が高次元空間上の関数であるが故に持つ特性を積極的に利用することである．例えば，エントロピー Sの等位面 $\{S = c = const.\}$ の幾何学的特性，この場合，c の値の変化に伴う等位面の面積の変化がどのように変化するか，が重要になる．これは一種の ‘幾何学的大数の法則’ の認識の問題であるともいえる．

高次元性をある意味でさらに積極的に用いるには相空間を無限次元にすることである．例えば，[3,4,5] では，$\mathbf{Z}^d$ 上のセルオートマトンが考察され，あ

る自然なクラスの初期条件に対しては，ダイナミックスは可逆であるにも関わらず，エントロピーが単調に増大することが示される．

参考文献

1. Khinchin,A.I.: Mathematical Foundations of Statistical Mechanics, Dover,1963
2. Ito,S., Mizutani,M. and Niwa,T.: On the time evolution of the Boltzmann entropy, J.Math. Kyoto Univ.,**26**,1-11(1986)
3. Niwa,T.: On the law of entropy increasing of a one-dimensional infinite system, J. Math. Kyoto Univ.,**27**,621-633(1987)
4. Niwa,T.,Tanaka,S.,Mizutani,M.: On the law of entropy increasing of a one-dimensional infinite system II, to appear in J. Math. Kyoto Univ.
5. Niwa,T.: On the law of entropy increase of some cellular automata on $\mathbf{Z}^d$, unpublished