

トポロジカルな観点からの力学系の研究

上江洌 達也, 久保 博嗣*

奈良女子大学理学部物理、*京都大学理学部物理

目次

1. Introduction

周期解に関するトポロジカルな量 (torsion number, relative torsion number) の定義と分岐の際の関係式

2. 2^n 分岐の際の rewinding mechanism についての予備的考察

3. 高次元への拡張

4. マスロフ指数と relative torsion number との関係

1 Introduction

連続力学系におけるトポロジカルな観点からの研究は、Birman と Williams のローレンツモデルにおける周期軌道の結び目型の研究から本格的に始まったと考えられる [1]。問題は 3次元の自律常微分方程式の周期解が、どのような結び目を持つかということであり、彼らはローレンツノットなる結び目を定義している。この研究とは独立に、Aizawa and Uezu は、自明でない結び目を持つ周期解を数値的に見出し、分岐によって自明な結び目から非自明な結び目が生じる得ることを示した [2, 3]。そして、torsion number, relative torsion number 等の量を導入し、周期解のトポロジカルな特徴づけを行ない、一般的な分岐の際の、これらの量の変化則を見出した [3, 4, 5]。この章では、トポロジカルな量の定義と、分岐の際の変化則のレビューを行なう。文献 [5] 参照。

次の 3次元常微分方程式系を考察する。簡単のため自律系とする。

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{F}(\vec{x}, \mu), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3). \quad (1)$$

μ : バイファケーションパラメーター
 \vec{x}_0 のまわりの線形化方程式を考える。

\vec{x}_0 : 周期解

T : 周期次に周期解

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\delta\vec{x} &= d\vec{F}(\vec{x}_0(t), \mu)\delta\vec{x} \\ \delta\vec{x}(t) &= S(t)\delta\vec{x}(0) \\ S(t) &= \text{Exp}\left[\int_0^t d\vec{F}(\vec{x}_0(s), \mu)ds\right] \\ &; \text{ordered exponential}\end{aligned}$$

ここで、ストロボマップ $S(T)$ の固有値問題を考える。

$$\begin{aligned}S(T) &; \text{ストロボマップ} \\ S(T)\vec{e}_i &= \lambda_i\vec{e}_i, \quad i = 0, 1, 2 \\ \lambda_0 &= 1, \quad \|\lambda_1\| \geq \|\lambda_2\| \\ \vec{e}_0 &\propto \frac{d}{dt}\vec{x}_0(t)\end{aligned}$$

固有ベクトル \vec{e}_i のグローバルな捻れを、次のように定義する。

torsion number $n_i (i = 1, 2)$ の定義

$$\begin{aligned}\vec{e}_i(t) &= S(t)\vec{e}_i ; \text{固有ベクトルの時間発展} \\ \vec{w}_i(t) &= \vec{e}_i(t) / \|\vec{e}_i(t)\| \\ &; \vec{e}_i(t) \text{ を規格化したベクトル}\end{aligned}$$

以下で $L(C_1, C_2)$ は 閉曲線 C_1 と C_2 のリンク数を表す。
 $\lambda_i > 0$ の場合

$$\begin{aligned}n_i &\equiv L(C_0, C_{i,\zeta}) \\ C_0 &\equiv \{\vec{x}_0(t); 0 \leq t < T\} \\ C_{i,\zeta} &\equiv \{\vec{x}_0(t) + \zeta\vec{w}_i(t); 0 \leq t < T\}\end{aligned}$$

$\lambda_i < 0$ の場合

$$\begin{aligned}n_i &\equiv \frac{1}{2}L(C_0, C_{i,\zeta}) \\ C_{i,\zeta} &\equiv \{\vec{x}_0(t) + \zeta\vec{w}_i(t); 0 \leq t < 2T\}.\end{aligned}$$

更に、軌道のまわりの相対的な捻れを次のように定義する。

relative torsion number $r_i (i = 1, 2)$ の定義

動座標系を $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ とし、 $\vec{f}_1 \equiv \frac{d}{dt}\vec{x}_0 / \|\frac{d}{dt}\vec{x}_0\|$ とする。relative torsion number r_i は、 $\vec{w}_i(t)$ の \vec{f}_1 のまわりの周期当たりの回転数である。

$$\begin{aligned} \vec{w}_i(t) &= x(t)\vec{f}_1 + y(t)\vec{f}_2 + z(t)\vec{f}_3 \\ y &= \rho \cos \theta \\ z &= \rho \sin \theta \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{yz - zy}{y^2 + z^2} \\ r_i &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{\theta(T)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^T \frac{yz - zy}{y^2 + z^2} dt. \end{aligned}$$

torsion number n_i と relative torsion number r_i との関係

$$\begin{aligned} n_i &= r_i + L \\ L &= L(C_0, C_2) = L(C_0, C_3) \\ &\quad ; \text{ "self-linking number" } \\ C_j &\equiv \{\vec{x}_0(t) + \zeta' \vec{f}_j(t); 0 \leq t < T\}, j = 2, 3 \end{aligned}$$

generic な分岐の際のトポロジカルな量の変化則

- (a) $n'_i = n_i, r'_i = r_i, L' = L$; ピッチフォーク分岐,
 Rule I (b) $n'_i = 2(n_1 + n_i), r'_i = 2r_i$; 周期倍分岐,
 (c) $n' = m^2 n$; ホップ分岐

$\lambda = \exp [2\pi i l / m]$ で、 l と m は、たがいに素な整数。プライムのついた量は、分岐解。

周期倍分岐のカスケードの際のルール

まず、torsion number 等を以下のように定義する。
 $n_i^{(k)}(i)$; 2^k 周期解の固有値 λ_i が正のときの torsion number
 $n_i^{(k)}(f)$; 2^k 周期解の固有値 λ_i が負のときの torsion number
 etc.

2^n 分岐がカスケードするためには、rewinding が起こる必要がある。

rewinding

$$\Delta n_i^{(k)} \equiv n_i^{(k)}(f) - n_i^{(k)}(i) = (-1)^k \frac{\gamma}{2} \quad (A)$$

このルールを仮定すれば、全てのトポロジカルな量は、 $n_i^{(0)}(i), r_i^{(0)}(i)$ の2つの量によって、決定される [4]。

$$\begin{aligned} n_i^{(k)}(i) &= 2^{2k} \left[n_i^{(0)}(i) - \frac{2\gamma}{5} + \frac{2\gamma}{5} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right], \\ n_i^{(k)}(f) &= 2^{2k} \left[n_i^{(0)}(i) - \frac{2\gamma}{5} + \frac{\gamma}{10} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \right], \\ r_i^{(k)}(i) &= 2^k \left[r_i^{(0)}(i) - \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right], \\ r_i^{(k)}(f) &= 2^k \left[r_i^{(0)}(i) - \frac{\gamma}{3} + \frac{\gamma}{6} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right], \\ L_j^{(k)}(i) &= 2^k \left[2^k \left\{ n_i^{(0)}(i) - \frac{2\gamma}{5} \right\} - r_i^{(0)}(i) + \frac{\gamma}{3} \right] + \frac{(-1)^k}{15}, \end{aligned}$$

このルールの直観的説明は、O. E. Rössler によって導入された paper sheet model [6] を用いて行なうことができる [4]。また、G. Birman and R. Williams によって導入された template を仮定すれば、ルールそのものを導くことができる [7]。しかしながらいずれの説明も、あらかじめ paper sheet や template の存在を仮定しており、そのような構造がいかにして生じるのか、また相空間の中でどのようなメカニズムでカスケードが起こるのかについては不明である。次の章でこの問題について予備的考察を行なう。以上の議論は、2次元非自律系、3次元自律系に、及び一部分は3次元非自律系に適用できるが、一般の次元への拡張が可能か、またそのときどのようなことがいえるのか、という問題は、まだ明らかでない。これは極めて難しいテーマであるが、それに対する1つのアプローチについて3章で述べる。4章では、保存系におけるトポロジカルな量であるマスロフ指数と、relative torsion number が、同一のものである事を示す。 [8]

2 2^n 分岐の際の rewinding mechanism についての予備的考察

1次元写像においては、周期点の一つが臨界点を通ることによって、 2^n 階写像の傾きが正から負に変わり周期倍分岐が起こる。2次元以上の可逆写像

$$x_{n+1} = G(x_n) \quad (2)$$

においては、微分 $dG^{2^n}(\vec{x})$ の固有値が、正から複素数を経て、負になることによって、周期倍分岐が起こる。この現象が、繰り返し起こるメカニズムはどのようなものであろうか？これを、次のエノン写像を例にとりて考察する。

Hénon map

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= -By_n + 2Cx_n + 2x_n^2 \\ y_{n+1} &= x_n\end{aligned}$$

まず、一般の 2 行 2 列の実行列の固有値問題を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A の複素固有値を $\lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ ($\lambda_i > 0$)、A の固有値ベクトル $\vec{e} = \vec{e}_r + i\vec{e}_i$ とする。

$$A\vec{e} = \lambda\vec{e}.$$

このとき、A を任意のベクトルに作用させる。すると、回転方向は、

$$\begin{aligned}(\vec{e}_r, \vec{e}_i) &\text{ が右手系} \implies \text{時計まわり,} \\ (\vec{e}_r, \vec{e}_i) &\text{ が左手系} \implies \text{反時計まわり,}\end{aligned}$$

となり、この条件は、

$b > 0$ なら、時計まわり、 $b < 0$ なら反時計まわりと書き表せる。エノン写像の場合は次のようになる。

原点が安定な場合、

$$A = \begin{pmatrix} 2C & -B \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり、 $b = -B < 0$ なので反時計まわりとなる。

次に、2 周期解 (x^*, y^*) が安定な場合は、2 周期解のひとつを原点にする変数変換を行ない適当にスケールして、2 階写像をつくと、近似的にもとの写像と同型とすることができる。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x'_n \\ y'_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_1 & -B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n - x^* \\ y_n - y^* \end{pmatrix}, \\ x'_{n+2} &= -B'y'_n + 2C'x'_n + 2x'^2_n, \\ y'_{n+2} &= x'_n, \\ B' &= B^2, \\ C' &= -2C^2 + 2(1+B)C_2B^2 + 3B + 2 \equiv f(B, C), \\ c_1 &= 2(C + 2x^*), \quad c_2 = 2(C + 2y^*)\end{aligned}$$

$c_1 < 0$ であり、座標変換によって座標系が、右手系 \implies 左手系 となるので、固有ベクトルは反時計まわりに回転する。このように近似的な繰り込み変換を考えると、固有ベクトルの回転の向きが、1周期と2周期で逆になることが解る。大雑把には、以上の議論で rewinding メカニズムが理解される。我々は、実際の相空間ではどのようなことが起こっているのかに焦点を当てたい。

Hénon map の数値計算

$B = 0$ の一次元の場合は、周期 n の軌道が頂点 $(-\frac{c_2}{2}, -\frac{c_2}{2})$ を通過するときに、 n 階写像の傾きが正から負になる。 $B > 0$ のときには、どうなるかを調べるために、次の事に注目する。周期倍分岐のカスケードの後に現れるストレンジアトラクターは、原点の不安定多様体の閉包と考えられる。従って、原点の不安定多様体の構造は、周期が増すにしたがって複雑化していくと考えられる。これが、周期解とどう関係してくるのか？この様な観点から、我々は、周期解と原点の不安定多様体の関係を調べた。図に示されているように、不安定多様体は安定周期解に漸近する。当然、固有値が実数の場合 (図 (a)) には、一方向から近づき、複素数の場合 (図 (b),(d)) は回転的になる。回転的になったとき、多様体は折り畳み構造を有するようになり、負になると、折れ曲がりを生じる。そのとき、周期解は、折れ曲がりを通じた点に位置している (図 (c))。

勿論、多様体は複雑な微細構造を持つが、大まかには次のようにいうことができる。固有値が正 \implies 複素数 \implies 負になるとき、相平面での原点の不安定多様体と周期点との関係を調べると、不安定多様体の折れ曲がり点を解が通過するときが、行列のトレースが0になるときである。

厳密にいうと、複素数のときには多様体の折れ曲がり点を定義できない。固有値が正と負のときに、解が多様体の折れ曲がり点の反対側にいるというべきである。以上は、まだ、予備的考察の段階である。より詳細な解析は、現在遂行中である。

3 高次元への拡張

高次元系への拡張として、次のような方向が考えられる。

1. n 次元の方程式系で、 r 次元と s 次元の閉多様体のリンク数を考える ($n = r + s + 1$)。
2. 2つの閉軌道を考えて3次元部分空間への射影をとる。

ストレンジアトラクターは、不安定周期軌道の集合と考えることができるので、2.の方法を試みる。

簡単のため4次元自律系を考察する。

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4). \quad (3)$$

軌道を3次元部分空間に射影して、そこでのリンクを考える。例えば、 (x_2, x_3, x_4) 空間への射影を考え、そこでの torsion number を $n_i(1)$ とする。そのような射影は4種類考えられるので、4つの数の組、 $(n_i(1), n_i(2), n_i(3), n_i(4))$, を 'torsion vector'

\vec{n}_i とよぶ。同様にして、 \vec{r}_i, \vec{L} が定義できる。また、 $\vec{n}_i = \vec{r}_i + \vec{L}$ が成立し、分岐の連続性から次のことが示せる。

(a) $\vec{n}'_i = \vec{n}_i, \vec{r}'_i = \vec{r}_i, \vec{L}' = \vec{L}$; ピッチフォーク分岐,

rule II (b) $\vec{n}'_i = 2(\vec{n}_1 + \vec{n}_i), \vec{r}'_i = 2\vec{r}_i$; 周期倍分岐,

(c) $\vec{n}' = m^2 \vec{n}$; ホップ分岐.

これらをチェックするために以下の2つのモデルについて数値計算を行なった。

(1) modified Lorenz model (4次元自律系)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}x &= -\sigma(x-y), \\ \frac{d}{dt}y &= rx-y-x(z+w), \\ \frac{d}{dt}z &= xy-bz, \\ \frac{d}{dt}w &= kx^2-cw.\end{aligned}$$

ここで、 $\sigma = 16, b = 4, c = 1, k = 0.02$ 。 r はバイファケーションパラメーターである。

(2) coupled rotator model (4次元自律系)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}W_1 &= (r_1 - i\omega_1)W_1 - (c_1 - id_1)W_1 |W_1|^2 + D(W_2 - W_1) + R, \\ \frac{d}{dt}W_2 &= (r_2 - i\omega_2)W_2 - (c_2 - id_2)W_2 |W_2|^2 + D(W_1 - W_2)\end{aligned}$$

W_i は、複素数。 $r_1 = r_2 = 0.4, \omega_1 = \omega_2 = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1, D = 0.04$ とする。 R は、バイファケーションパラメーターである。

ピッチフォーク分岐については、modified Lorenz model において (Table I)、周期倍分岐については、coupled rotator model において (Table II) 計算を行ない、rule II を確認した。

一方、 2^n 分岐の際の rewinding rule (A) は、Table II からわかるように、高次元では成立していない。また、強制ローレンツ系 (3次元非自律系) での以前の数値計算においても、

$$\Delta n_1^{(1)} = -\frac{3}{2}, \Delta n_1^{(2)} = \frac{3}{2}, \Delta n_1^{(3)} = -\frac{1}{2},$$

となった [3]。これは、ルール (A) を満たしておらず、その結果、 r と n についてのルールも満たさない。これについては、P. Holmes により、疑義が呈されたが [7]、再計算の結果、正しいことが確認された [5]。したがって、高次元においてはルール

(A) が成立しないと考えられる。これは、テンプレート描像が実験系などの高次元系においては、妥当でないことを意味しているように思われる。このような描像が漸近領域で正しいのか否かについては、今後の明らかにする必要がある。

4 マスロフ指数と relative torsion number との関係

N 自由度ハミルトン系において、マスロフ指数 μ は次のように定義される。座標と運動量を \vec{q} 、 \vec{p} とする。 $\vec{z}_0(t)$ を双曲型固定点とする。

$$\vec{z}_0(t) = \begin{pmatrix} \vec{q}_0(t) \\ \vec{p}_0(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{q}_0(t) = \begin{pmatrix} q_{0,1}(t) \\ \vdots \\ q_{0,N}(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_0(t) = \begin{pmatrix} p_{0,1}(t) \\ \vdots \\ p_{0,N}(t) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

\vec{z}_0 のマスロフ指数 μ は、次式で与えられる [9]。

$$\mu = \frac{1}{\pi} \{ \arg(\det M(T)) - \arg(\det M(0)) \}, \quad (5)$$

$$M = (\delta \vec{q}_1 - i \delta \vec{p}_1, \dots, \delta \vec{q}_N - i \delta \vec{p}_N), \quad (6)$$

$$\delta \vec{z}_i = \begin{pmatrix} \delta \vec{q}_i \\ \delta \vec{p}_i \end{pmatrix}, \quad (7)$$

ここで、 T は、軌道の周期、 $\delta \vec{z}_i (i = 1, \dots, N)$ は、 $\vec{z}_0(t)$ の安定 (不安定) 多様体に接する N 個の独立なベクトル。 M は $N \times N$ の複素行列。ここで、

$$\det M(t) = x(t) + iy(t). \quad (8)$$

とおくと、

$$\mu = \frac{1}{\pi} \{ \theta(T) - \theta(0) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^T \frac{xy - y\dot{x}}{x^2 + y^2} dt, \quad (9)$$

となる。但し、 $x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta$ で、 \dot{x} は t での微分を意味する。

これを、relative torsion number の式と比較すると、 $\mu = 2r$ となることが期待されるが、実際、2自由度ハミルトン系において、これを証明できる。

証明

2自由度ハミルトン系を3次元力学系とみなす。

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2m} + V(q_1, q_2). \quad (10)$$

エネルギー積分、 $H = E$ は3次元超曲面 S となる。

座標変換

$\vec{q}, \vec{p} \Rightarrow \vec{x}, \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T, T$ 転置.

運動方程式

$$\frac{d}{dt} \vec{x} = C^{-1} \begin{pmatrix} p_1/m \\ p_2/m \\ -\frac{\partial V}{\partial q_1} \\ -\frac{\partial V}{\partial q_2} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial x_1} & \frac{\partial q_1}{\partial x_2} & \frac{\partial q_1}{\partial x_3} & \frac{\partial q_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial q_2}{\partial x_1} & \frac{\partial q_2}{\partial x_2} & \frac{\partial q_2}{\partial x_3} & \frac{\partial q_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial p_1}{\partial x_1} & \frac{\partial p_1}{\partial x_2} & \frac{\partial p_1}{\partial x_3} & \frac{\partial p_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial p_2}{\partial x_1} & \frac{\partial p_2}{\partial x_2} & \frac{\partial p_2}{\partial x_3} & \frac{\partial p_2}{\partial x_4} \end{pmatrix}.$$

周期解 \vec{z}_0 のまわりの線形化方程式

$$\frac{d}{dt} \delta \vec{x} = \left(\frac{d}{dt} C^{-1} \right) \begin{pmatrix} \delta \vec{q} \\ \delta \vec{p} \end{pmatrix} + C^{-1} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \delta \vec{q} \\ \delta \vec{p} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

$$\delta \vec{x} = C^{-1} \begin{pmatrix} \delta \vec{q} \\ \delta \vec{p} \end{pmatrix},$$

C ; は $\vec{z} = \vec{z}_0$ での値。 x_4 は E のみに依存すると仮定する。つまり $\{x_4 = \text{constant}\}$ が超曲面 S となる。3次元空間 (x_1, x_2, x_3) を考え、第4成分 x_4 を省略する。

(7) 式の接ベクトル $\delta \vec{z}_1$ と $\delta \vec{z}_2$ として速度ベクトル \vec{z}_0 とポアンカレ写像の固有ベクトルの時間発展 $\delta \vec{z}(t)$ をとる。従って、(8) 式の x と y は、次式で与えられる。

$$x = \begin{vmatrix} \delta q_1 & \dot{q}_{0,1} \\ \delta q_2 & \dot{q}_{0,2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta p_1 & \dot{p}_{0,1} \\ \delta p_2 & \dot{p}_{0,2} \end{vmatrix},$$

$$y = - \begin{vmatrix} \delta q_1 & \dot{p}_{0,1} \\ \delta q_2 & \dot{p}_{0,2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta p_1 & \dot{q}_{0,1} \\ \delta p_2 & \dot{q}_{0,2} \end{vmatrix}. \quad (13)$$

よって、関係式 $\delta \vec{x} = a \vec{f}_1 + x \vec{f}_2 + y \vec{f}_3$ が、式 (13) の x, y と $\delta \vec{x} = C^{-1} \delta \vec{z}$ に対して、成立するような動座標系 $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ を構成できればよい。これは、次のようにして構成できる。

\vec{x}_0 が \vec{z}_0 に対応させ、ベクトル \vec{a} と \vec{b} を次式で定義する。

$$\vec{a} = \dot{q}_2 \nabla q_1 - \dot{q}_1 \nabla q_2 - \dot{p}_2 \nabla p_1 + \dot{p}_1 \nabla p_2,$$

$$\vec{b} = \dot{p}_1 \nabla q_2 - \dot{p}_2 \nabla q_1 + \dot{q}_2 \nabla p_1 - \dot{q}_1 \nabla p_2, \quad (14)$$

ここで $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3})^T$. このとき次の関係式が成り立つ。

$$(\dot{\vec{x}}_0, \vec{a}) = 0, (\vec{a}, \delta \vec{x}) = x, (\vec{b}, \delta \vec{x}) = y. \quad (15)$$

ここで、直交基底 \hat{f}_1, \hat{f}_2 and \hat{f}_3 を次のように定義する。

$$\hat{f}_1 = \frac{\dot{\vec{x}}_0}{\|\dot{\vec{x}}_0\|}, \hat{f}_2 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \hat{f}_3 = \hat{f}_1 \times \hat{f}_2. \quad (16)$$

求める動座標系は、

$$\begin{aligned}\vec{f}_1 &= \frac{1}{\|\vec{x}_0\|} \left\{ \hat{f}_1 - \frac{(\vec{a}, \hat{f}_3 \times \vec{b})}{(\hat{f}_3, \vec{b})} \hat{f}_3 \right\}, \\ \vec{f}_2 &= \frac{1}{(\hat{f}_2, \vec{a})} \left\{ \hat{f}_2 - \frac{(\hat{f}_2, \vec{b})}{(\hat{f}_3, \vec{b})} \hat{f}_3 \right\}, \\ \vec{f}_3 &= \frac{1}{(\hat{f}_3, \vec{b})} \hat{f}_3.\end{aligned}\tag{17}$$

となる。次の関係式が、簡単に示せる。 $\delta\vec{x} = a\vec{f}_1 + x\vec{f}_2 + y\vec{f}_3$ 。従って、この系で $\mu = 2r$ となる。

この関係式は、 \vec{q} と \vec{p} のパラメトリゼーションによらないことも示される。 \vec{x} 空間での量を n_x 等と表すと、次式が成立する。

$$n_x = L_x + r_x, n_y = L_y + r_y.\tag{18}$$

$\mu = 2r_x = 2r_y$, $L = L_x = L_y$ であるから、

$$n_x = n_y = L + \frac{\mu}{2}.\tag{19}$$

となる。

References

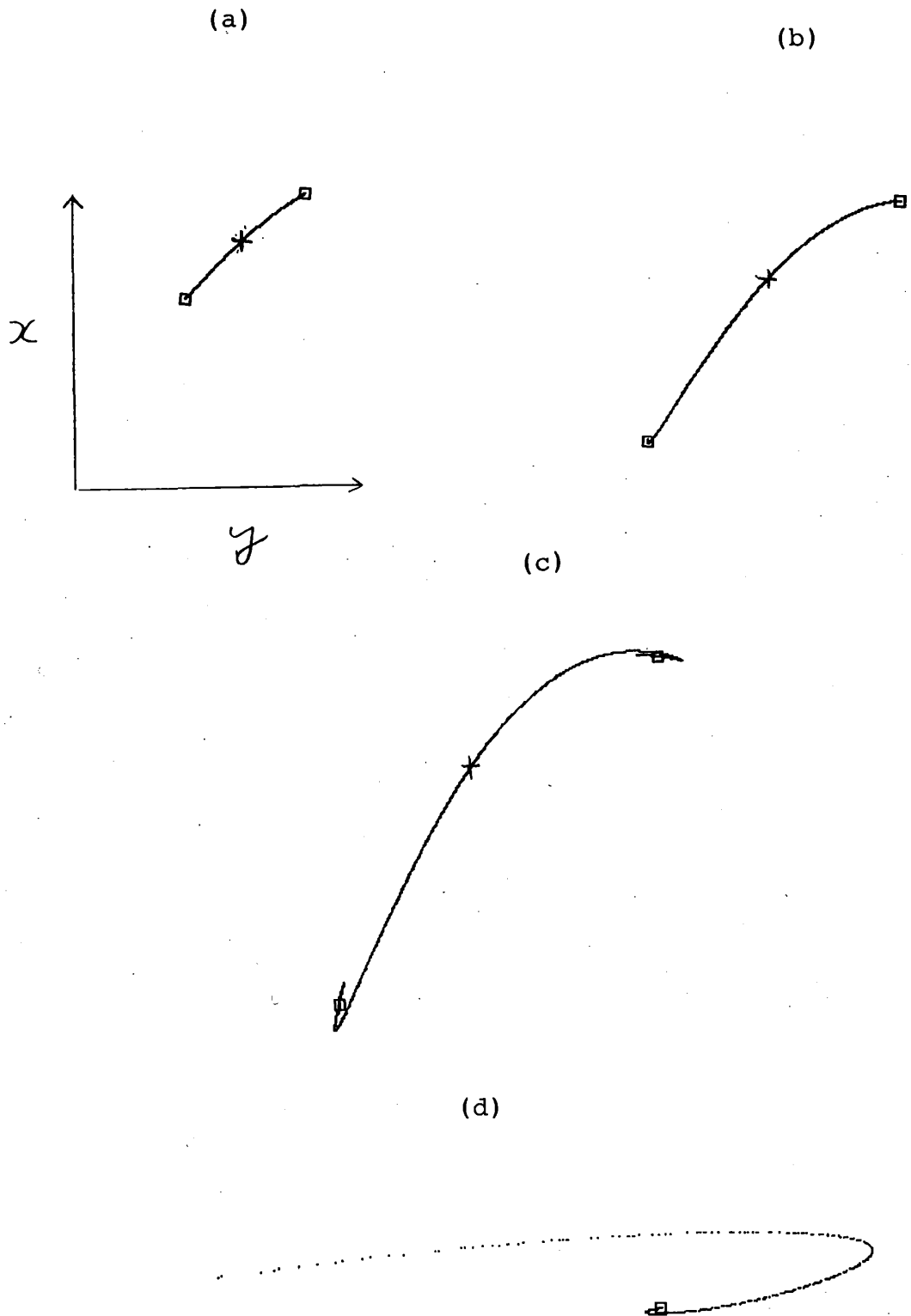
- [1] J. Birman and R. Williams, *Topology* 22 (1983),47 ; *Contemporary Mathematics* 20(1983),1.
- [2] Y. Aizawa and T. Uezu, *Prog. Theor. Phys. Lett.*67(1982),982.
- [3] T. Uezu and Y. Aizawa, *Prog. Theor. Phys.*68(1982),1907.
- [4] T. Uezu, *Phys.Lett.*93A(1983),161.
- [5] T. Uezu, *Prog. Theor. Phys.*83(1990),850 and references cited therein.
- [6] O. E. Rössler, *Bull. Math. Biol.*39(1977),275.
- [7] P. Holmes, *Physica* 21D(1986),7.
- [8] T. Uezu and H. Kubo, submitted to *Prog. Theor. Phys.*
- [9] J. M. Robbins, *Nonlinearity* 4(1991),343.

Table I. modified Lorenz model におけるピッチフォーク分岐

		1st	2nd	3rd
r=535.0	eigenvalue	0.967	0.761	$4.65 * 10^{-3}$
	\vec{r}	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, -1, 0)	(0, 0, 0, 1)
	\vec{L}	(1, -1, 1, 0)	(1, -1, 1, 0)	(1, -1, 1, 0)
	\vec{n}	(1, -1, 1, 1)	(1, -1, 0, 0)	(1, -1, 1, 1)
r=527.0	eigenvalue	0.994	0.759	$4.34 * 10^{-3}$
	\vec{r}	(0, 0, 0, 1)	(0, 0, -1, 0)	(0, 0, 0, 1)
	\vec{L}	(1, -1, 1, 0)	(1, -1, 1, 0)	(1, -1, 1, 0)
	\vec{n}	(1, -1, 1, 1)	(1, -1, 0, 0)	(1, -1, 1, 1)

Table II. coupled rotator model における周期倍分岐
 T は周期を表す。* は、計算精度の範囲内で決定できなかった箇所である。

		1st	2nd	3rd
R=0.28887 T=10.0533	eigenvalue	-0.974	$-4.87 * 10^{-2}$	$7.18 * 10^{-4}$
	\vec{r}	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(-1, 0, 1, 0)
	\vec{L}	(1, 0, -1, 0)	(1, 0, -1, 0)	(1, 0, -1, 0)
	\vec{n}	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(0, 0, 0, 0)
R=0.28900 T=20.1074	eigenvalue	0.975	$2.32 * 10^{-3}$	$5.38 * 10^{-7}$
	\vec{r}	(-3, -1, 3, -1)	(-3, 1, 1, -1)	(-2, 0, 2, 0)
	\vec{L}	(1, -1, -1, -1)	(1, -1, -1, -1)	(1, -1, -1, -1)
	\vec{n}	(-2, -2, 2, -2)	(-2, 0, 0, -2)	(-1, -1, 1, -1)
R=0.29885 T=20.0685	eigenvalue	-0.992	$-3.01 * 10^{-3}$	$2.99 * 10^{-7}$
	\vec{r}	$(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	(-1, 0, 1, 0)
	\vec{L}	(0, -1, 0, -1)	(0, -1, 0, -1)	(0, -1, 0, -1)
	\vec{n}	$(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	(-1, -1, 1, -1)
R=0.298885 T=40.1369	eigenvalue	0.998	$8.50 * 10^{-6}$	$-4.96 * 10^{-7}$
	\vec{r}	(-3, 1, 3, 1)	(-3, -1, 1, -1)	(-2, *, *, *)
	\vec{L}	(-3, -3, 3, -3)	(-3, -3, 3, -3)	(-3, -3, 3, -3)
	\vec{n}	(-6, -2, 6, -2)	(-6, -4, 4, -4)	(-5, *, *, *)
R=0.30086 T=40.1474	eigenvalue	-0.996	$-1.01 * 10^{-5}$	$5.39 * 10^{-7}$
	\vec{r}	$(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$	(-2, *, *, *)
	\vec{L}	(-4, -3, -1, -3)	(-4, -3, -1, -3)	(-4, -3, -1, -3)
	\vec{n}	$(-\frac{13}{2}, -\frac{9}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2})$	$(-\frac{13}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{9}{2})$	(-6, *, *, *)
R=0.300868 T=80.2948	eigenvalue	0.982	$4.11 * 10^{-7}$	$3.36 * 10^{-7}$
	\vec{r}	(-5, -3, 5, 1)	(-5, *, *, *)	(-4, *, *, *)
	\vec{L}	(-21, -15, 1, -11)	(-21, -15, 1, -11)	(-21, -15, 1, -11)
	\vec{n}	(-26, -18, 6, -10)	(-26, *, *, *)	(-25, *, *, *)



エノン写像の2周期解領域における原点の不安定多様体。B=0.3。+は原点、□は2周期解を表す。
 (a) $\lambda > 0$, (b) $\lambda = \text{complex}$, (c) $\lambda < 0$, (d) (b) の右側の部分の拡大図。