

相空間の解剖と不安定性、generating function

小西 哲郎 (名古屋大) tkonishi@allegro.phys.nagoya-u.ac.jp

1 はじめに

自由度の大きな力学系の運動を理解するにはどのような方法があるだろうか。リヤプノフ数、エントロピー及びその拡張、パワースペクトル、アトラクタの次元等、力学系を特徴付けるための特性量としては様々な物が考案されている。

が、いくつかの量を定義して計った後で、その力学系を数値シミュレーションし、実際の時系列を計算機のモニター上に表示してじーっと眺めるのが一番分かりやすい、と感じた事がある人は多いのではないだろうか。上に上げた様な特性量では系の情報が大幅に落ちている事と感ぜられるのがその原因であろう。

しかし、「実際に見てみるのが一番」とは言ってもやはり限界はある。第一、「どのように動いているのか、は分かる(ような気がする)」としても、時系列を実空間へ射影して眺めているだけでは「なぜその様に動いているのか」は直接見るだけでは分からない。

「理解する」と言った時に、どのように理解したいのかを少し考えてみよう。我々は、ある系がカオスであるか、カオスでないか、という事にはほとんど関心がない。カオスである、という事は力学系のごく普通の性質であるために、「ある系がカオスである」という事を主張しても、その系について何か分かった事はならない。知りたいのは、「カオスであるか/ないか」ではなく、「どのようなカオスであるのか」という事である。

この場合、上で述べた様な特性量についても再考が必要である。というのは、多くの特性量は「カオスであるか否か」の判定には有効であるが、「どの様なカオスであるか」を見るには不適切な事が多い。例えばある系のリヤプノフ数を系のパラメタを変えて計ったとして、リヤプノフ数が 0.1 の場合と -0.1 の場合とでは振る舞いが全く違う事は良く分かるが、0.1 の場合と 0.2 の場合とで系の振る舞いが違うかどうかは分からない。それよりも、リヤプノフ数の揺らぎを見てみた方が、例えばハミルトン系の場合には、トラスへ張り付いたり離れたりする運動の有無等、良く分かる事が多い。おおむね、平均値よりはその揺らぎの方が、漸近的な値よりは局所的な値とその分布の方が、その系のダイナミクスをつかんでいる事は確かであろう。が、それだけでは多自由度の運動を理解するにはまだまだ不足している物が多い。

この小報告では、多自由度の力学系のダイナミクスを理解するための古くて新しい方法を2つ、具体例とともに紹介したい。一つは「相空間の解剖」という直接的なアプローチであり、もう一つはハミルトン系や symplectic dynamical systems に対して generating function の持っている情報を活用する事である。

2 相空間の解剖

相空間の解剖、それは、端的に言えば、運動の多様さ(非定常さ)を相空間の中の多様さ(非一様さ)と見直し、相空間の内部の構造をつぶさに調べる事で運動の複雑さを理解すると言うアプローチである。つぶさに調べるに当たっては、可視化が重要である。

相空間の点を指定すれば時間発展が一意に定まっているので、このアプローチにより、「どこはこなポテンシャル面+熱揺らぎによるダイナミクス」を超える事を期待している。弱点は、相

空間を始めから規定してしまうために、系の自由度が変化してしまう様な open ended evolution system には適用できない事である。

相空間の解剖の例として、globally coupled symplectic map におけるクラスターの形成と崩壊現象を挙げよう。[2] これは、次の様な大域結合型の保存系の coupled map において自発的に構造を形成する物である。系は単位円上に N 個の粒子があり、粒子 i の角度 (を 2π で割った物) を座標 x_i 、それに共役な運動量を p_i とし、 $(x_i, p_i) \mapsto (x'_i, p'_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ として、時間発展法則は以下の様に書かれる。

$$p'_i = p_i + \frac{K}{2\pi\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^N \sin 2\pi(x_j - x_i), \quad K : \text{real}, x'_i = x_i + p'_i \pmod{1}. \quad (1)$$

初期条件の違いにより、この系は次の2種類の時間発展を示す。一つは“クラスター状態”、即ち、order N の粒子がからまって運動する相であり、もう一つは“一様乱雑状態”、即ち、単位円全体に粒子が分散してばらばらに運動している相である。

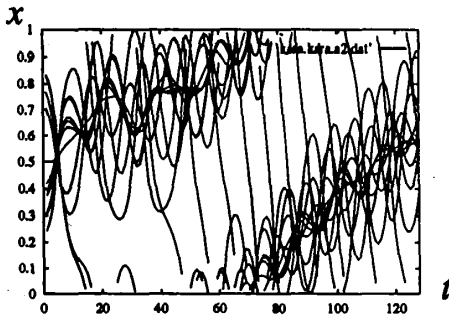


Fig.1 : Clustered motion.
 $N = 12, K = 0.1.$
 Initial momenta are all 0.

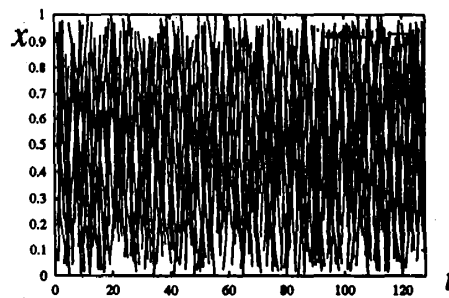


Fig.2: Non-clustered motion.
 $N = 12, K = 0.1.$
 Initial momenta are random over $[0, 1]$.

これらの図は系のパラメタが全く同一の物で得られている。唯一異なるのは、クラスターを作る場合は初期条件の運動量が小さく、一様乱雑状態では、初期条件の運動量が大きい、という事である。

この系は離散時間上で定義されているので、エネルギーは保存しない。時間発展は symplectic $\sum_{i=1}^N dx_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^N dx'_i \wedge dp'_i$, なので、相空間の体積要素は保存する。

この2種類の運動を理解するために、以下の解析を試みた。詳細は文献 [2, 1] を参照されたい。

- リヤブノフ・スペクトルおよびベクトル
- 各状態の滞在時間分布
- 各状態の相空間内での分布
- 各状態におけるリヤブノフ数の揺らぎ

まず、クラスター状態でのリヤブノフスペクトルが、みな正であった事から、クラスター状態もカオスである、即ち、クラスター自体の運動も、クラスターを構成する粒子の内部運動もカオスである事が分かった。そこで、クラスター状態と一様乱雑状態という、2種類のカオス状態が相空間内に共存している事がわかる。すると、この2種類のカオス状態は相空間内で連結している事がわかる。(連結していないとすると、トーラスで分割されている事になるが、いま系は多自

由度なので、 N 次元のトーラスは $2N$ 次元の相空間を分割することはできない。) このため、系はクラスター状態と一様乱雑状態の間を時間的に移り変わる事が予想される。その結果、各状態での滞在時間は、図の様に、

distribution of lifetime of clustered state : $Z > 1.05$ ($N=8, K=0.2$)

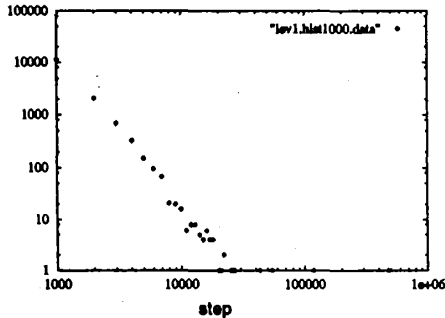


Fig.3: lifetime distribution of clustered state : log-log

distribution of lifetime of non-clustered state : $Z < 1.05$ ($N=8, K=0.2$)

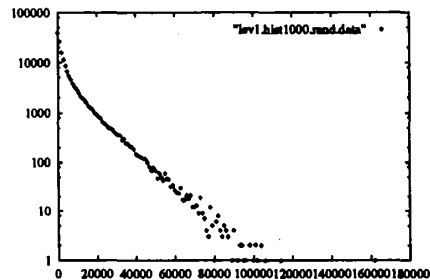


Fig.4: lifetime distribution of non-clustered state : semi-log

$$P(t) \propto \begin{cases} t^{-c} & \text{for clustered state} \\ \exp(-\alpha t) & \text{for non-clustered state} \end{cases} \quad (2)$$

とまとめられる。このような時系列の特徴の違いはリヤプノフ数の揺らぎにも共通にみられる。
[2]

また、クラスターを形成する様な初期条件が相空間内のどこに分布するか (Fig.5) を見てみると、それは、系の (短時間で見た) 軌道不安定性が小さい領域 (Fig.6) と極めて良く一致し、運動量空間の原点の回りに自己相似的構造を作っている。

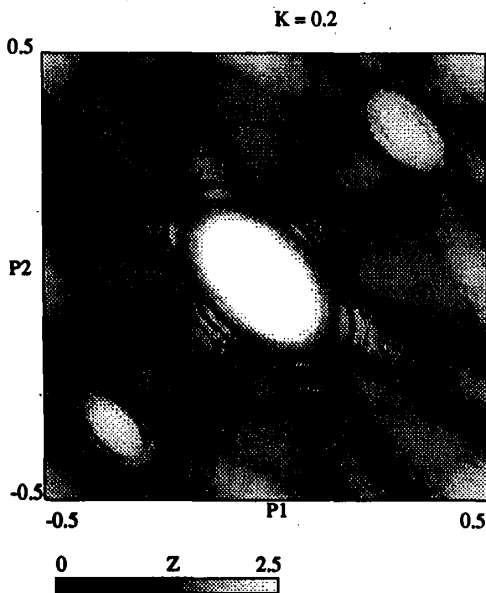


Fig.5: (P_1, P_2) 平面上でのクラスター領域の分布。白い領域がクラスターを作るような初期条件。詳細は [1] 参照。 $N = 4, K = 0.2$ 。

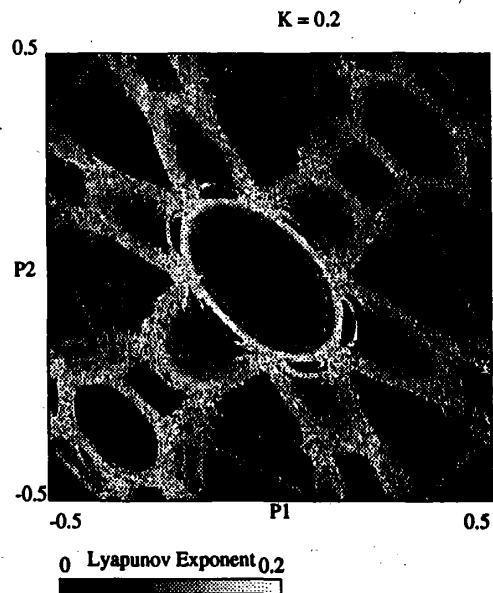


Fig.6: Fig.5 と同一平面での、短時間リヤプノフ数の分布。黒い領域がトーラス的な振る舞いを示す部分を表わしている。

こうして、様々な物理量を援用しながら、相空間を切り開いてその構造を直接調べる事で、この系の理解が深まった。

以上から、この系でのクラスター形成と崩壊は、

- 相空間内に、クラスター状態を作るカオス領域と、クラスターがないカオス領域が共存していて、系はその両者の間を行き来する。
- クラスターを作るカオス領域は、ハミルトン系カオスの相空間に基本的なトーラスや周期解の残骸のつくる自己相似的階層構造のなかにトラップされた物と理解できる。即ち、カオスである事に依ってクラスター構造が形成され、維持されている。

と理解できる。

3 generating function とその応用

ここではこれまでトーラスの判定存在に使われていた action principle を、相空間の構造を調べるために使って見る。基本的な計算の方法は [3] と同様である。

カオスの性質を数値的に調べる場合、リヤプノフ数を見るのは基本とされている。が、本当にリヤプノフ数を知りたくてリヤプノフ数を計算している場合は少ない。むしろ、本当は系の不安定性（とその時間軸上での不安定性・安定性の混じり具合）が知りたいのだが、便宜上リヤプノフ数を計算している事が多い。リヤプノフ数が好んで計算されるのは、カオスである事を確認出来るためと、数値計算が容易であるためであると思われる。実際にリヤプノフ数から分かる事がそれほど多く無いのは前に述べた通りである。また、リヤプノフ数は無限時間で定義される量だが、短時間で量をうまく定義するのは難しい。

系の不安定性を見る指標については、(I) Lyapunov exponent, (II) 測地線の曲率、(III) 作用あるいは（正準変換の）母関数の2階変分 が知られている。ここでは3番目の、generating function の2階変分 d^2G について考えてみよう。これは、量子カオスで van Vleck determinant と呼ばれている物と同じ量である。

Symplectic mapping に対しても generating function $G(x, x')$ 、 $n p_i = -\frac{\partial G}{\partial x}$ 、 $p'_i = \frac{\partial G}{\partial x'}$ を導入する事で時間発展は連続時間系同様に変分

$$\delta G(x, x') = 0 \quad (3)$$

の形に書かれる。以下では symplectic mapping について述べる。以下では generating function の事を action と呼ぶこともある。

3.1 minimal action と regular orbit

解析力学では、作用積分の変分から運動が規定される事を「最小作用の原理」と呼ぶ事が多いが、実際に使うのは作用が停留値を取るべしという要請である。実際に実軌道に対して作用が極小になっているかどうかは軌道に依存する。次の定理は、多くのカオス的な軌道では作用は最小にならない事を示唆している；

定理 Symplectic twist map においては、Lagrange graph 上の全ての軌道は minimal action を持つ。ここで、Lagrange graph とは、ある函数 S があって、 $p = \frac{\partial S}{\partial x}$ の形に大域的にかけられる不変集合を言う。

系 action が最小にならないような軌道の segment がある場合、その軌道は Lagrange graph 上には無い。

Lagrange graph は上記のように regular orbit の一種である。

運動量が座標の関数として2価になってしまう様な場合 (運動の転回点を含んで、 $p = \pm\sqrt{2(E - V(x))}$ という記述が避けられない場合) には、regular orbit であっても generating function の2階変分が正定値で無く、 $d^2G < 0$ となってしまう事があり得る。(これはたとえば調和振動子で作用積分を計算して見ればわかる。) このため、 d^2G の正定値性は、orbit が regular である事と同値ではない。が、rotational invariant circle 等、多くの重要な regular orbit がこのクラスに含まれている。

MacKay ら [3] は、これを KAM torus の存在判定に援用した。ここでは、「トーラスがあるか否か」即ち「カオスであるか否か」では無く、「どのようなカオスであるか」についてこの方法を拡張してみる。

例えば、二階変分 d^2G の値を見ながら系の時間発展を数値的に追うとする。ある軌道はある時間の後に2階変分が負となるであろうし、また、たまたま初期条件が Lagrange graph 上に置かれたため、2階変分の値は正定値となることもあるであろう。そこで、各初期条件に、 d^2G の値が負となるまでの時間を対応させることが出来る。¹これを相空間上に図示して見ると、安定多様体が自動的に浮かび上がってくる。これを standard map $p' = p + \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x$, $x' = x + p'$, mod 1 に対して図示したのが次の Fig.7 である。

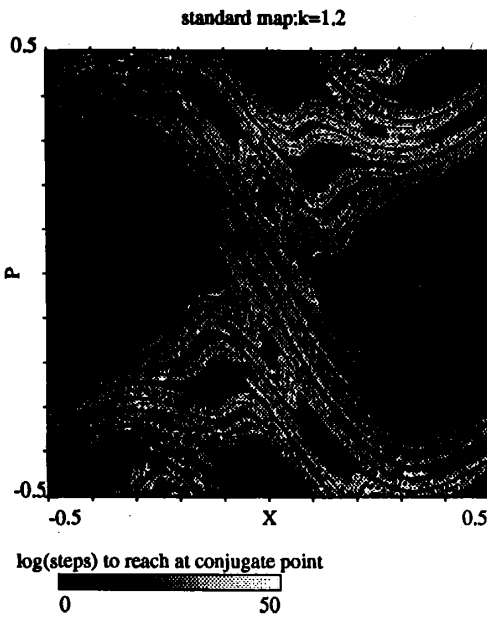


Fig.7: Standard map での初期条件と、 $d^2G < 0$ となるまでの時間。白い部分が安定多様体にあたる。

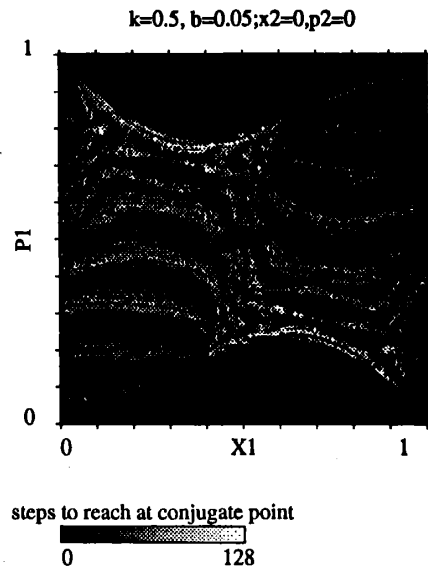


Fig.8: Coupled standard map での初期条件と $d^2G < 0$ となるまでの時間。

¹ $d^2G < 0$ となる点は、連続時間の系で 共役点 conjugate point と呼んでいる物と本質的に同じである。

この様にして安定多様体が見えてくる理由は簡単である。系が安定多様体の近くにあると、そこからほぼ安定多様体に添って運動する。この時、安定多様体はその不動点（あるいは周期点）に近くなるにつれて運動は極めてゆっくりとなる。こうして、安定多様体の近くの点は極めて長時間の間あたかも Lagrange graph 上にあるかの様に振る舞う。

この方法は系の次元によらずに定義されているので、多自由度の系の相空間を調べる方法としても有効であると思われる。たとえば coupled standard map

$$p'_i = p_i + \frac{k}{2\pi} \sin 2\pi x_i + \frac{B}{2\pi} \sin(x_j - x_i), \quad x'_i = x_i + p'_i, \quad i = 1, 2, j \neq i, \text{ mod } 1 \quad (4)$$

の (p_1, x_1) 平面で行なうと Fig.8 の様になる。4次元の相空間の中で安定多様体がうねっている様子が描かれている。

高次元への拡張は straight forward であり、安定・不安定多様体の相互関係、特に、低次元系の直積としては表わせない物を調べるのに有効であろうと思われる。

一方、 $d^2G < 0$ となる点（初めてとは限らない）は相空間上でどの様に分布しているのだろうか？この点は、いわば、系が regular orbit から外れる点、であるから、chaotic sea の中で重要な役割を持っている可能性がある。定義上はこの点は初期条件に依存するが、長い時系列の中でその様な点の集合を取ってみると、その集合は初期条件にはあまり依らない様である。Fig.9,10 は、standard map のある 1本の軌道に対して $d^2G < 0$ となる点を描いた物である。

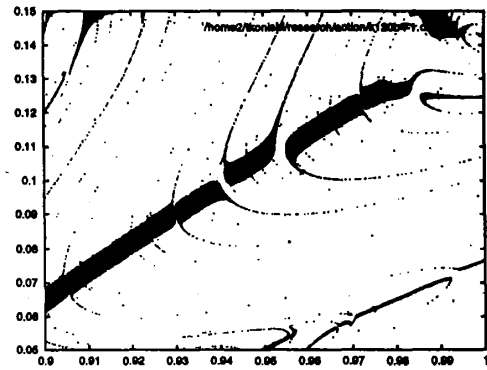
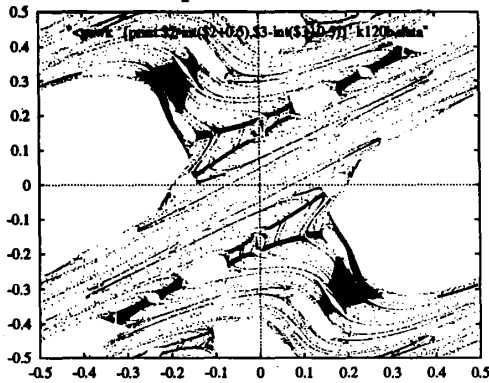


Fig.9: Standard map の 1つの軌道上で $d^2G < 0$

Fig.10: Fig.9 の拡大図。

となる点。 $K = 1.2$

これを見ると、chaotic sea の中は一様では無く、 $d^2G < 0$ となる点、即ち、系が regular orbit から外れると見られる点は、相空間の中の限られた領域に局在する。この領域は一見、引き延ばし・折りたたみの構造の様にも見える。 $d^2G < 0$ となる点が集積している部分を拡大して見ると、葉状の積層構造に見えるが、これが何を意味しているのかは今後の研究を待たねばならない。

参考文献

- [1] K. Kaneko and T. Konishi, *Peeling the onion of order and chaos in a high-dimensional Hamiltonian dynamical systems*, Physica D 71 (1994), 146-167.
- [2] T. Konishi and K. Kaneko, *Clustered motion in symplectic coupled map systems*, J. Phys. A 25 (1992), 6283 - 6296.
- [3] R. S. MacKay, *Converse KAM theory for symplectic twist maps*, Nonlinearity 2 (1989), 555-570.