カオスになる多価積分とならない多価積分

Infiniteily multi-valued first integrals: chaotic ones and others

- 力学系の代数幾何学的考察に向けて -

（株）アルプス社・開発部　石井雅治
ALPS MAPPING Co., Ltd.　M. Ishii

0．はじめに

カオスを考察する際の幾何学的枠組みとして，主にトポロジーが用いられ，数多くの成果をあげてきた．これは基本的に力学系を離散時間系に還元する枠組みである．従って，解析的な特性を持つ連続時間系では，この特性を十分に活用することができず，定量的な議論や微細な性質の考察が困難であり，しばしば解析的な手法が併せて必要とされる．

ここでは複素解析性を持つ常微分方程式系を考察の対象とする．系の複素解析性を基本的な枠組として使い，トポロジーに加えて代数幾何学 (初等的な) を考察の道具に取り入れる．特異点の回りの性質を大域的に接続して，ある程度代数的な議論をおこなう．その結果，ホモクリニックカオスにおける，安定多様体と不安定多様体の分離が始まる際の臨界的挙動や，非等方ケプラー問題におけるカオスの発生機構等，トポロジー的手法だけでは扱えない不変集合の微細な構造をみることができる．

1．代数幾何学的手法

対象とする系は n 次元力学系

$$\frac{dx(t)}{dt} - \lambda(x(t)) = 0 \tag{1}$$

であり，$x : \mathrm{C} \to \mathrm{C}^n$，$\lambda : \mathrm{C}^n \to \mathrm{C}^n$ で，λ は C^n上ほとんどいたるところ解析的な関数とする．この系を対象にするのは，物理的にみてかなり一般的であり，系の複素解析性により取り扱い易い性質をもっているからである．この性質は例えば、力学的要素が解析接続できる，また，λ がパラメーターを解析的に含むときに各要素もこ

れに解析的に依存する，といったものである．さらに，時間 t が実数であれば実の初期値 x_0 に対し，系のフロー φ_t は，

$$\varphi_t(x_0) \in \mathbf{R}^n \cup \{\infty\}^n \tag{2}$$

を満足するものとする．

ここでは系の力学的な諸要素，例えば，解，不変集合等を，各要素上で 0 になる解析関数全体によって捕らえ，それらのつくる代数も利用し，系の振舞を解析する．

Ex.1: ある集合が和と積の演算に関して閉じているとき，これを環という．明らかに $\mathbf{C}^n$ の開集合 U 上の解析関数全体 O は通常の和と積の演算に関して環をなす．力学系の解 $x(t)$ を，

$$I = \{\, x(t) \text{ 上で } 0 \text{ になる } U \text{上解析関数の全体} \,\} \tag{3}$$

と同一視することができる．明らかに I は、

$$h \in O, \quad f, g \in I, \tag{4}$$

$$\Downarrow$$

$$hf \in I, \tag{5}$$

$$f + g \in I, \quad fg \in I, \tag{6}$$

という性質を満たす．一般に，環 O の部分集合 I がこの性質を満たすとき，I を O のイデアルとよぶ．また，このように多様体上で 0 になる適当な関数全体をその多様体の定義イデアルとよぶ．

こうした手法の導入により、

- 不変集合
- 多様体の特異点 (解，不変集合の)
- 局所的性質と大域的性質の関係
- 集合同士の代数演算 (掛け算，割り算)

の取り扱いが整理できる．続く章でこれらをカオスの解析に利用する．可積分系では，例えばこのうちの 2 つを整理することにより，次の定理を簡単に証明できる．

Th.1: 系が代数的に積分可能．$\Longleftrightarrow$ 系の標準形の解は代数的特異点のみを許す (Weak Painrevé 特性を持つ).

Proof: (out line) まず必要条件を示す. 解軌道の適当な連結成分を

$$S = \{\, x(t) \subset \mathrm{C}^n \cap U \mid t \in \mathrm{C} \,\} \tag{7}$$

とおく. ここで U は適当な開集合である. 仮定より解は多項式の零点として表せるから, その定義イデアルを

$$I(S) = \{\, S \text{ 上で } 0 \text{ になる多項式の全体} \,\}, \tag{8}$$

としたとき, 零点定理より $I(S)$ と代数多様体 S とは 1 対 1 に対応する. C^n 上の多項式全体の環を $\mathrm{C}[x]$ とおき, 環 $A(S)$ を

$$A(S) = \mathrm{C}[x] \,/\, I(S), \tag{9}$$

で定義してやれば, $I(S)$ は素イデアルであるから, $A(S)$ は整域となりその商環 $K(S)$, は体になる. 正規化定理より $K(S)$ は超越次数 1 の体 $\mathrm{C}(\tau)$ の代数拡大と同型である. ところで代数関数論から, この代数拡大体と, 無限遠点も含め局所的に, τ の Puiseux 級数 (有理形分岐ベキ級数) で表される Riemann 面上の複素関数の全体とは同型になる. 時間を適当に伸縮すれば新ためて τ を時間 t にとりなおす (系の標準形への変換) ことができるから, 標準形の解は Puiseux 級数で表される. 十分条件はここまでの証明の流れを逆に辿ればよい. **QED.**

2. 大域的積分と局所的積分

2. 章では, ここでの解析の最小単位である局所的積分の概念を整理する.

大域的 (有限多価) 積分 $\Phi(x)$ とは, C^n上有限多価でほとんどいたるところ解析的な系の保存量である. 局所的 (1 価) 積分 $\phi_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ とは, ある開集合 U $(\subset \mathrm{C}^n)$ 上のみで 1 価解析的な保存量である. 逆にいえば, 局所的積分は, その値に有限多価性が要請されたときにその定義域が局所的にしかとれないものを含む. 定義域の方に大域性が要請されたとき, もし自然境界が無いとすれば, 一般にこれは無限多価になる. この (大域的) 無限多価積分と局所的 (1 価) 積分は同じ積分の異なる定義域の上での表現である. ここでは, 必要に応じてこれらの表現を使い分けながら議論を進める.

大域的積分は極めて限られた系にしか存在しない. これが, $n-1$ 個完全に存在する系を可積分系とよび, 特にその全てが代数関数で表せるとき代数的可積分系とよぶ. 可積分系では, 解曲線は集積的な挙動を示さない粗で滑らかな曲線になり, 特にフローがコンパクトなときは単純な閉曲線になる. 局所的積分はどんな力学系にも, $\lambda(x)$ が 0 でなくかつ発散しない点の近傍であれば, $n-1$ 個存在し, 次の性質をもつ.

- 摂動に対しても存在. 摂動パラメーターに解析的に依存.
- 集積的に振舞う解曲線を定義しうる.
- U 上で $rank\,(\,\partial\phi_i(x)\,/\,\partial x_j\,) = n-1$ がなりたつように選べる.

局所的積分を U 上非退化になるように選んだ場合, $(\phi_1,\,\phi_2,\,\cdots,\,\phi_{n-1},\,t)$ がそこでの局所座標にとれる. 大域的積分は時間を含まないから $\phi(U)$ $(\subset \mathbf{C}^{n-1})$ を含む近傍上の解析関数として常に

$$\Phi = \Phi(\phi_1,\,\phi_2,\,\cdots,\,\phi_{n-1}) \tag{10}$$

と表せる. 一方, Φ は U 上で退化して特異点を持つ場合があり, 特定の近傍上では大域的積分をどのように選んでも局所座標にとれないことがあることに注意.

無限多価積分は必ずしもカオス的な運動を引き起こすわけではない. 例えば準周期運動を定める積分は無限多価である. 少なくとも, カオスが発生するためには, 解の構造に次の条件が必要である.

- フローがコンパクト.
- 解が空間の一部を稠密にうめつくす.
- 解が滑らかな低次元多様体上に束縛されない.

これを対応する積分の構造に翻訳すれば次のようになる.

- 積分面の実空間での断面がコンパクト.
- 実空間で積分が無限多価.
- 積分面が集積的にねじれる.

これらが実際にどのようにカオスと関係しているかについては, 4. 章, 5. 章の具体的な力学系で議論する.

3. 不変集合とその表式

この章では, 系の不変集合をその上で 0 になる解析関数の全体 (不変集合の定義イデアル), により定式化しその性質を調べる.

まず系のベクトル場を

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)\,\partial_i + \partial_t \quad (\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}) \tag{11}$$

とおく. もしあるベクトル場 $\mathbf{w}$ が通常の交換子積に関して $[\mathbf{v},\,\mathbf{w}] = 0$ を満たすなら, 解 $(x(t),\,t)$ は変換 $\exp(\theta\mathbf{w})\,(x(t),\,t)$ によって解に写される. このベクトル場は系のシンメトリーとよばれる.

多様体 M の定義イデアルを $I(M)$ とおく. 基底定理より $f_i(M)=0$ をみたす適当な解析関数 $f_1, f_2, \cdots, f_k$ をとれば,

$$I(M)=\{\, a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_k f_k \mid \forall a_i \in O,\ f_i \in O \} \tag{12}$$

と表現できる. この $f_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ をイデアル $I(M)$ の基底とよぶ. O は適当な領域上の解析関数の全体とした. このとき $\mathbf{v}$ が解析的である領域上で

$$\mathbf{v}\, I(M) \subset I(M) \tag{13}$$

がなたつことと, M が系の不変集合になっていて $I(M)$ が系の不変集合の定義イデアルになっていること, とは必要十分になっている.

Ex.2:

(1) Φ を積分, c を定数としたとき, 明らかに, $\Phi(x)-c=0$ は $n-1$ 次元不変集合を定める. イデアル

$$I(c)=\{\ a\cdot(\Phi-c) \mid a \in O\ \} \tag{14}$$

の任意の元 $m\ (= a_m\,(\Phi-c))$ に対し

$$\begin{aligned} \mathbf{v}\, m &= (\mathbf{v}a_m)\cdot(\Phi-c)\ +\ a_m\cdot\mathbf{v}(\Phi-c) && (15)\\ &= (\mathbf{v}a_m)\cdot(\Phi-c) && (16) \end{aligned}$$

がなりたち, $\mathbf{v}$ が解析的な領域上で $\mathbf{v}\, a_m$ も解析的であるから, $\mathbf{v}\, m$ は $I(c)$ の元になる. つまり $\mathbf{v}\, I(c) \subset I(c)$ である.

(2) $f_1, f_2, \cdots, f_{n-1}\ (\in O)$ が適当な領域上で独立で,

$$\mathbf{v}\, f_i = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij} f_j \ \ (i=1,2,\cdots,n-1,\ \ a_{ij} \in O) \tag{17}$$

がなりたつなら, $f_1=f_2=\cdots=f_{n-1}=0$ は解軌道を定める.

不変集合は局所的積分により表示できる. 局所的積分による U 上の局所座標を $(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1}, t)$ としたとき, 不変集合の定義イデアルの基底として, t を含まず ϕ_i だけに依存する $f_1(\hat{\phi}),\ f_2(\hat{\phi}), \cdots,\ f_k(\hat{\phi})$ がとれるのである. ここで $\hat{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_{n-1})$ とおいた.

Proof: ($k=1$ のときのみ) この局所座標では, $\mathbf{v}=\partial_t$ であるから,

$$\mathbf{v}\, f = \partial_t f = af\ (a \in O) \tag{18}$$

がなりたつ. これを f に関する偏微分方程式とみなして解くと,

$$f(\hat{\phi}, t) = \exp(\int^t a(\hat{\phi}, t)\, dt) \cdot \hat{f}(\hat{\phi}) \tag{19}$$

でなくてはならない. $|a(U)| \ll \infty$ なので最初の因子は U 上で 0 にならなず不変集合の定義には関与しない (このような因子は単元とよばれる). 従って $\hat{\phi}$ だけに依る因子 $\hat{f}$ を基底に選ぶことができる. **QED.**

イデアルの定める不変集合の大域的性質はその基底の性質に支配される. というのも, 開集合 U 上で基底 f に対して $\mathbf{v}f = af$ がなりたつとしても, f が $\mathbf{C}^n$ 上では無限多価に解析接続される場合があり, 不変集合も閉じた多様体にならない, といったことがありえるからだ. このような事態は, 例えばポアンカレマップの双曲型特異点をなす周期解の回りで発生する. またこの場合, 基底の無限多価性は不変集合の多様体としての特異点と関係している.

Ex.3: 実質的に 3 次元であり, 周期解 $p(t)$ が双曲的特異点をなし, その回りに大域的積分 Φ が存在する力学系を考える.

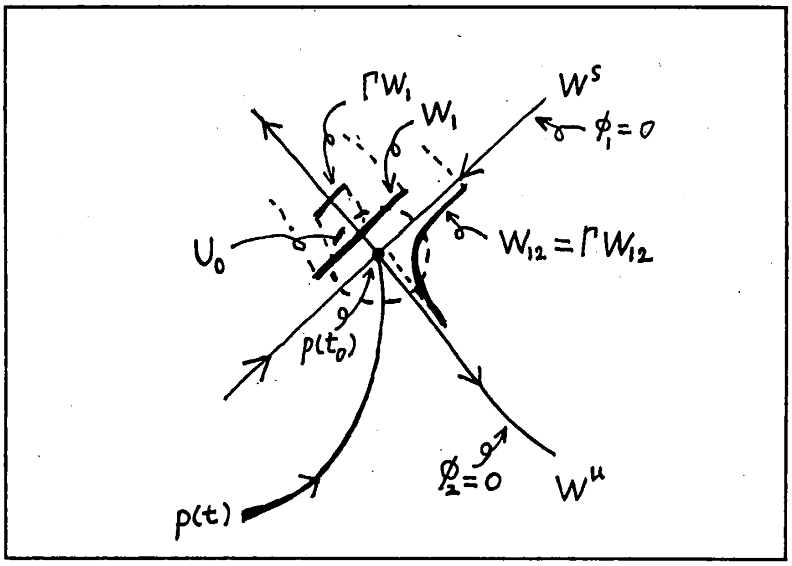

図 1.

Φ は安定多様体や不安定多様体上で 0 になるようにとっておく. 周期解の点 $p(t_0)$ の小さい近傍 U_0 をとると, この近傍で明らかに $\mathbf{v}$ は 0 でなく正則になる. 従って, 局所的積分 ϕ_1, ϕ_2 を, $\Phi = \phi_1\phi_2$ が成立し, U_0 上非退化であるように, さらに, $\phi_1(x) = 0$ が安定多様体 W^s を, $\phi_2(x) = 0$ が不安定多様体 W^u を定義するように選ぶことができる. U_0 上の不変

集合 W_i で, その定義イデアルの基底が $f_i = \phi_i - c_i$ $(c_i \neq 0,\ i = 1,2)$ であるものを考える. W_i を周期解に沿って 1 周期程度時間発展させ, 再び U_0 上に至ったものを ΓW_i とおく.

ΓW_i は周期解を中心に W_i をずらしたものになっているので, 食い違いが発生する. 従って, この不変集合は閉じておらず, 局所的な意味しか持たない. この局所性は定義イデアルの基底の局所性あるいは多価性によりもたらされる. f_i を周期解に沿って解析接続すると無限多価になる. 逆にいえば, 非退化で 1 価の解析関数では, この不変集合を局所的にしか定義できないのである.

ところで $\phi_1\phi_2$ は大域的積分 Φ になり, $f_{12}(x) = \phi_1\phi_2 - c_1c_2$ は周期解に沿って解析接続しても 1 価である.

従って $f_{12} = 0$ の定める多様体 W_{12}は大域的不変集合になる. W_i と W_{12} の形状の違いに注意. また, Φ は明らかに $\{x|\phi_1(x) = 0\}\cap\{x|\phi_2(x) = 0\}$ 上, つまり周期解上で退化する. この場合, 積分の非退化性が失われ, 不変集合が多様体としての特異点を持つ代わりに, 積分の 1 価性が成立していることに注意. このことが, ホモクリニックカオスの発生と深い関わりを持つことを 5. 章でみる.

4. 非等方 Kepler 問題

この章では, 非等方 Kepler 問題を取り扱い, 系がカオス的な挙動を示すとき, その不変集合が集積的挙動を示すことをみる.

非等方 Kepler 問題はパラメター μ により Kepler 問題を歪ませた 2 自由度 Hamilton 系であり, そのハミルトニアンは

$$H = \frac{1}{2}(\mu p^2 + q^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{20}$$

である. 運動方程式は, $z = (x, y, p, q)$ とおくと,

$$\frac{d}{dt}z = \begin{pmatrix} \mu p \\ q \\ -x\,(x^2+y^2)^{-3/2} \\ -y\,(x^2+y^2)^{-3/2} \end{pmatrix} =: \lambda(z) \tag{21}$$

で与えられる. 系は相似変換 $g(\theta)(z,t) = (\,\theta^{2/3}x,\ \theta^{2/3}y,\ \theta^{-1/3}p,\ \theta^{-1/3}q,\ \theta t\,)$ で不変であり, この無限小変換

$$\mathbf{v}_s = \frac{2}{3}\,x\,\partial_x + \frac{2}{3}\,y\,\partial_y - \frac{1}{3}\,p\,\partial_p - \frac{1}{3}\,q\,\partial_q + \partial_t \tag{22}$$

はシンメトリーになる. 明らかに $[\mathbf{v}, \mathbf{v}_s]=0$ がなりたつ.

この系には, 相似変換で変化しない, 相似不変解

$$L_1(t) = (\ 0,\ a_1 t^{2/3},\ 0,\ a_2 t^{-3/1}\ ) \tag{23}$$

$$L_2(t) = (\ b_1 t^{2/3},\ 0,\ b_2 t^{-3/1},\ 0\ ) \tag{24}$$

が存在する. ここで a_i, b_i は定数である. この解の近傍では相似変換を利用して, 局所的積分が解析接続されていく様子がよくわかる. ここでの不変集合の振舞を通してカオスの生成状況を解析することができる.

各相似不変解の構造は同じであるから, 点 $L_1(1)$ の近傍 U 上で考察を進める. U 上で非退化な局所的積分で解軌道 $L_1(t)$ 上で 0 になるものを ϕ_1, ϕ_2 とおく. 相似変換は解を解に変換するから, 積分を積分に変換し,

$$g(\theta)\,\phi_i \ = \ \phi_i(\,g(\theta)\,x\,) \tag{25}$$

$$= \ F_i(\,\theta,\,\phi_1,\,\phi_2,\,H\,) \quad (\,i=1,2\,) \tag{26}$$

がなりたつ. この変換は, 局所的積分の定義域を $g(\theta)U$ にまで拡張するから, この上への局所的積分の解析接続を与える. その無限小変換をとり,

$$\mathbf{v}_s \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\,\phi_1,\,\phi_2,\,H\,) \\ f_2(\,\phi_1,\,\phi_2,\,H\,) \end{pmatrix} \tag{27}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + o(\phi^2) \tag{28}$$

がなりたつことを示すことができる. ここで λ_+, λ_- は, 解 L_1 の回りでの特異点解析によって得られる局所的積分の Kovalevskaja 指数であり,

$$\lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{\,1-8(\mu-1)\,}}{6} \tag{29}$$

である. $9/8 < \mu$ のとき $\mathrm{Im}\,\lambda_\pm \neq 0$ となり, $\hat{\phi}_1 = \phi_1 + \phi_2$, $\hat{\phi}_2 = \sqrt{-1}(\phi_1 - \phi_2\,)$, $\lambda_R = \mathrm{Re}\,\lambda_+$, $\lambda_I = \mathrm{Im}\,\lambda_+$, とおけば,

$$\exp(\theta\mathbf{v_s}) \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} = \theta^{\lambda_R} \begin{pmatrix} \cos(\lambda_I \cdot \log\theta) & \sin(\lambda_I \cdot \log\theta) \\ -\sin(\lambda_I \cdot \log\theta) & \cos(\lambda_I \cdot \log\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{pmatrix} + o(\phi^2) \tag{30}$$

であることがわかる.

従ってこの場合, この解析接続は無限多価になり, これから作られるイデアルは $\lim_{\theta\to 0} g(\theta)\,U$ の領域に, 回転が集積する不変集合を定義する.

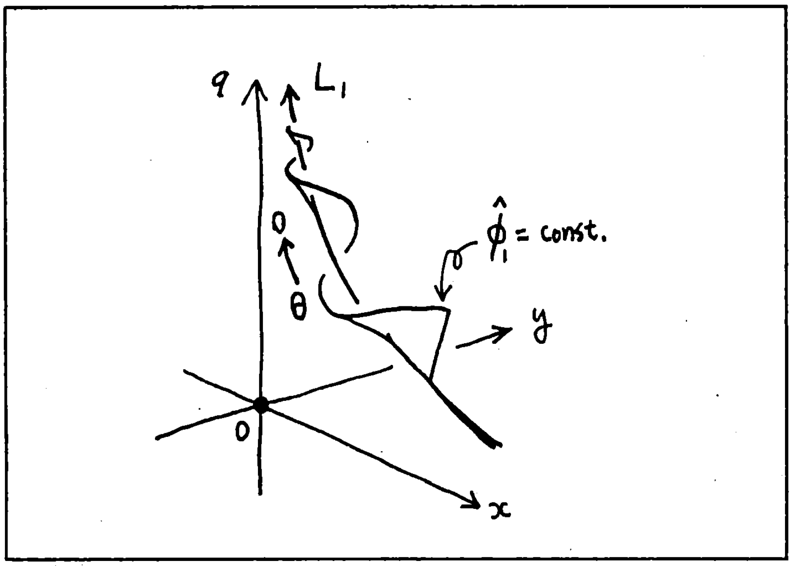

図 2.

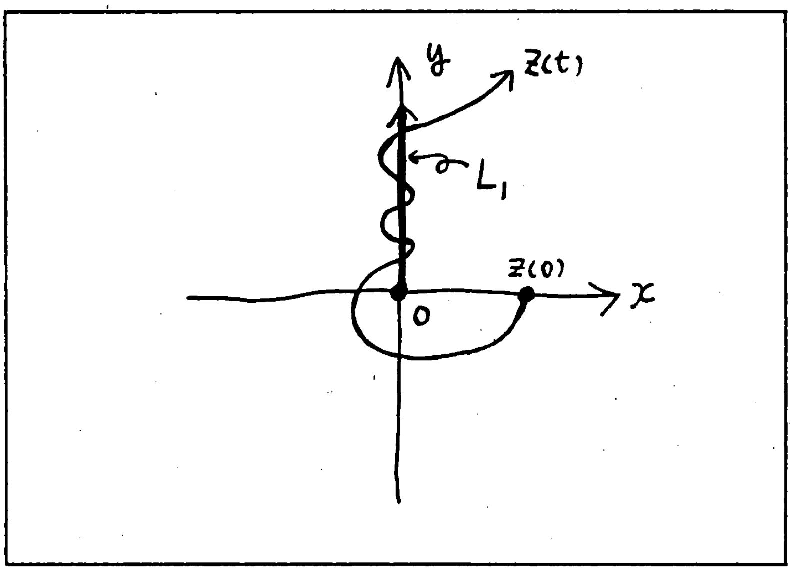

図 3.

実際, 数値計算 [1] によっても, このような解の挙動が示されている. またこの集積的構造が存在する場合のパラメーター値に対して, カオスが観測されている. 解が一時的にこの不変集合に囚われた後, 回転の集積部分で振り放され, 過去の記憶を失うことがこの系のカオス発生の機構であると考えられる.

$\mu < 9/8$ のときでも特殊な値を除き, 積分は無限多価になる. しかしこの場合は, 不変集合は集積的な振舞を示さないので, (少なくとも激しい) カオスは発生しない. 数値計算でもこのことは確かめられている.

5. ホモクリニックカオス

この章では, 不変集合を定めるイデアルの代数的構造を利用して, 3. 章の Ex.2 の系に摂動を加えたものを考察する. これから, 摂動によって安定多様体と不安定多様体の最初に分離の始まる点 (PIP) をみる.

3. 章の記号等はそのまま流用する. まず, 必要な記号と概念を定義しておく. 無摂動時のホモクリニック構造を持つ不変集合を $W_0 \subset \{ x \in \mathbf{C}^n \mid \Phi(x) = 0 \}$ とおき, これを含む適当な $\mathbf{C}^n$ の領域を D とする. D は内部を含むトーラス状の形をしている.

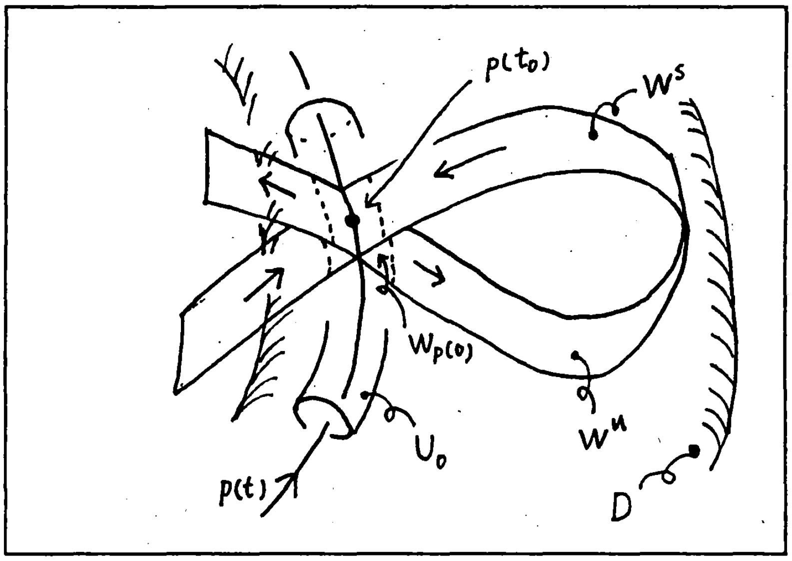

図 4.

積分 $\Phi(x)$ は, D 上全体で 1 価解析的とし, W_0 は D 上で既約とする. W_0 が D 上で既約とは, Φ が U 上の解析関数 f_1, f_2 により, $\Phi = f_1 f_2$ と積に因子分解できないことをいい, 分解できることを可約という. ここで考える摂動項は, D 上で解析的なものだけにする. 摂動パラメーターを ϵ とおき, $\epsilon = 0$ を無摂動系にとる. 双曲型特異点をなす周期解を取り巻く適当な近傍を U_p とおき, U_p 上の双曲的不変集合を $W_p(0)$ $(\subset W_0)$ とおく. 十分小さい摂動に対して, 周期解が存在し, $W_p(\epsilon)$ が解析的多様体として存在し続けることを仮定する.

系の解析性により, 十分小さい摂動に対して, U_0 上で ϵ に解析的に依存する局所的積分が存在することを示すことができる. この積分 $\varphi_1(\epsilon, x)$, $\varphi_2(\epsilon, x)$ が,

$$\phi_1(x) = \varphi_1(0, x), \quad \phi_2(x) = \varphi_2(0, x) \tag{31}$$

$$W_p(\epsilon) \cap U_0 = \{ x \in U_0 \mid \varphi_1(\epsilon, x) = 0 \} \cup \{ x \in U_0 \mid \varphi_2(\epsilon, x) = 0 \} \tag{32}$$

を満足するようにとっておく.

3. 章で W_0 の多様体としての特異点が周期解軌道になっていること，また局所的積分は無限多価性を持つ代わりに，特異点の無い 2 枚の多様体を定義しそれらの交点が W_0 の特異点になっていることをみた．これは代数的にみれば，Φ は U_0 大域的な D 上では既約であるが，局所的な U_0 上では $\Phi(x) = \varphi_1(0,x)\,\varphi_2(0,x)$ と因子分解され可約になってしまうことに対応する．

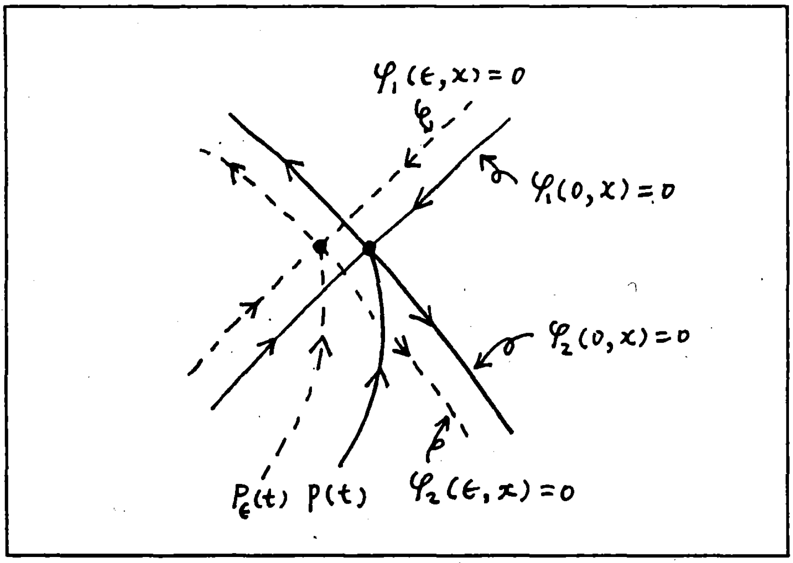

図 5.

以上の準備の下で次の定理をいうことができる．

Th.2: Φ は周期解軌道を除いて D 上非退化とする．このとき，非摂動系で，U_0 上で W_0 を定義する非退化なイデアルの基底（ここでは $\phi_1(x)$, $\phi_2(x)$）をそれぞれ安定多様体，不安定多様体に沿って解析接続すると，どんな基底をとっても，どちらも W_0 上に特異点集合をもつ．この特異点集合が同一のときは，安定多様体，不安定多様体を定義するイデアルの基底は，それぞれ，この特異点集合の所で入れ換わる．

この特異点集合を入れ換わり特異点 r_p とよぶ．入れ換わり特異点は安定多様体，不安定多様体をくっつけると同時に入れ換えることにより，大域的に可積分な状態をつくりだしているのである．

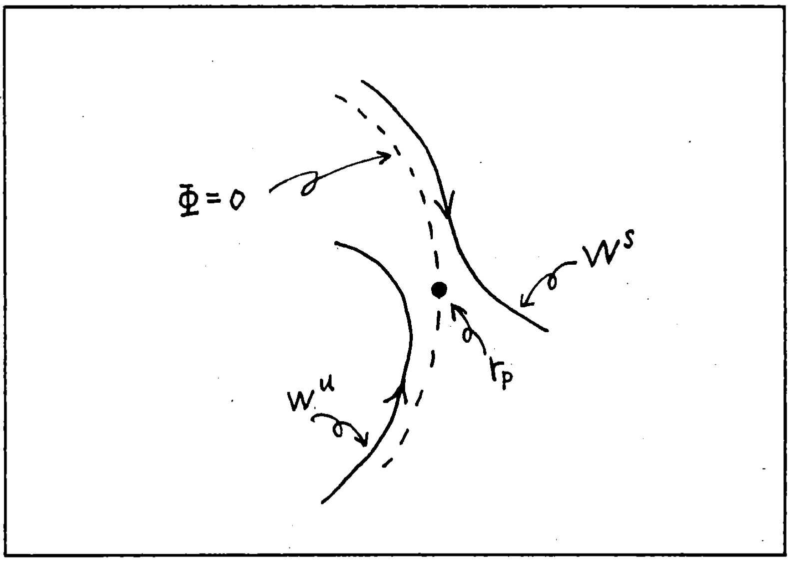

図 6.

特異点集合が唯一の場合，明かに，その位置は一意的であるが，複数ある場合でも，最も遠くまで解析接続できる基底をとることにより，一意的に決まる．また，これは非摂動系に存在するので，具体的に位置が計算できる．定理の証明には代数的手法を使う．この証明は長いので，残念だが結果を認めて先へすすむ．(必要な方はご連絡下さい．プレプリントが出来上がりしだいお送りします.)

摂動が加わっても，双曲型特異点付近の構造は，局所的積分が存在し続けることにより，ほとんど変化しない．しかし，大域的な可積分状態は一般にただちに失われる．これは入れ換わり特異点が摂動により消滅し，安定多様体と不安定多様体が入れ換わることなく，剥がれたり，交差することによると考えられる．

十分小さい摂動に対してまずこの消滅が起こるから，ホモクリニックカオスにおける PIP は，もし出現するとすれば，入れ換わり特異点の近くに出現することが主張できる．このようにして 2 つの多様体の横断的交差さえ生じてしまえば，あとは，よく知られた手続きにより，不変集合に無限回の交差の集積が発生し，系はカオス的挙動をみせることが示せる．

5. まとめ

これまでの手法に加え代数幾何学的手法を取り入れ，複素解析性を持つ力学系を考察した．この結果をまとめておく．

1　代数幾何学的手法を準備し，それにより，代数的可積分系が Weak Painlevé 特性を持つことを簡潔に証明できるのをみた．

2 局所的積分の解析接続を考察し, 系がカオスになるためには, 単にその積分が無限多価になるだけでは不十分であり, さらに, 積分面が集積的な振舞を示すことが必要であると推察した.

3 非等方 Kepler 問題では, 系がカオスになるために, 2 が満たされており, 無限多価積分の作る不変集合の回転の集積がカオスの原因であるのをみた.

4 ホモクリニックカオスでも, 2 が満たされていることを確かめた. 代数幾何学的手法を通じて, 安定多様体と不安定多様体の定義イデアルを入れ換える特異点の消滅により, これらが交差等を生じることをみた. また, この交差による不変集合の集積がカオスの原因であることをみた.

参照文献

[1] M.Gutzwiller, J.Math Phys., 14(1973) 139-152.,
R.Devaney, Amer. Math. Monthly, Oct. (1982) 535-552