大域結合振動子系における neutral mode とその不安定化

京大理　中川 尚子

要素数が十分多い多体系において、要素同志が長距離相関を持つ場合や複雑な相互作用を及ぼす場合の理想的極限として、全要素が全要素と等しく結合している大域結合系が考えられる。筆者は大域結合系の集団運動を、単純かつ自然界に良く見られる動的な要素という理由により非線形振動子を用いて解析および数値計算により研究した。[1] 具体的には、大域結合 (global coupling) した complex Ginzburg-Landau 方程式 (非線形振動子)、

$$\begin{aligned}\dot{W}_j &= W_j - (1+ic_2)|W_j|^2 W_j + K(1+ic_1)(\overline{W} - W_j) \\ \overline{W} &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} W_j, \quad (j = 1, 2, \cdots, N)\end{aligned} \tag{1}$$

($W_j(\equiv r_j \exp(i\phi_j))$ は複素変数、Nは要素数) を用いた。ここでは、この系が示す多様な集団運動の中から特に大自由度の振る舞いに着目し、この集団運動の構造を理解することを目標としている。

この大域結合振動子系では図 1 のように各要素がバラバラのままでありながら (図 1 (a)〜(c))、集団として何らかの構造を保持しているような状態 (図 1 (d) を参照) が広いパラメーター範囲で存在する。この他にも幾つかの集団運動を観察することができるが、ここでは特に、(i) 大自由度性は保ってはいるが、マクロな量 (例えば$\overline{W}$) の時間変化が周期的や準周期的などのような低次元の運動になる場合と、(ii) 図 1 のような大自由度カオス (ほぼ N 個の Lyapunov exponent が正値を持つ) になる場合との関係について述べる。

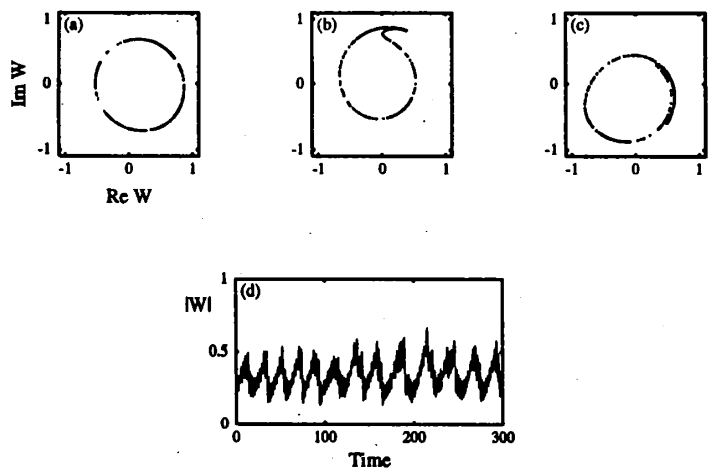

図 1: (a)〜(c): 複素平面上にある時刻における全要素の状態 W_jを打ったスナップショットの時間変化。$c_1 = -2.5, c_2 = 3.0, K = 0.465$。引き延ばし折り畳み運動 (a)〜(c) を繰り返す。(d): $|\overline{W}|$ の時間変化。かなり規則的で、偽周期は (a)〜(c) の繰り返しに対応している。

(i) 要素間の相互作用が弱い場合 (Kが比較的小さい場合) (1) はどのような初期条件の元でも、$\overline{W} = 0$ なる incoherent 状態: $W_j = \sqrt{1-K}\exp(-i(Kc_1 + (1-K)c_2)t + i\phi_j)$ に落ちつく。

この状態は $N^{-1}\sum_j e^{i\phi_j}=0$ のもとでの定数ϕ_jの任意性を反映して無限個の解があり、その各々は $N-2$ 個の 0-固有値を持つ中立安定な状態である。この無限個の解からなる $N-2$ 次元の中立安定な部分空間を neutral-space と呼ぶことにする。相互作用の強さ（K）が大きくなると、数多くの incoherent 状態の中で特にϕ_jが一様に分布した状態がまず不安定化して、$\overline{W}$が周期的に変化する状態に分岐する。この状態の Lyapunov Spectrum はその中に $N-2$ 個の 0 を保持しているので、先ほどと同様に $N-2$ 次元の中立安定な方向が広がっていることを意味し、マクロな量の運動形態が変化しても neutral-space が存在し続けていることがわかる。さらにKをあげると、$\overline{W}$のより複雑な運動を見ることができるが、その場合もやはり $O(N)$ 個の 0-Lyapunov 数を数値的に得ることができ、位相空間内に neutral-space が存在し続けながら、マクロな量は分岐を繰り返して複雑化することがわかる。具体的には、周期的 → 準周期的 (T2) → T3 → …?… → カオスという道筋を見ることができる。ただしここでは低次元のカオスであるということは、少数の正値の Lyapunov 数が存在するということから帰結した。（数値計算では 1 個の正値の Lyapunov 数と $O(N)$ 個の 0-Lyapunov 数が得られる。）これらの場合は先ほどの incoherent 状態の場合とは異なり、いかなる座標系をとってもマクロな量の運動を消去することはできない。つまり、例えばカオス的でない場合には $O(N)$ 個の 0 値はマクロな量の運動に対応する 0 値と incoherent 状態の時に見られたような解の中立安定性に基づく 0 値とが混在していることになる。このことは、位相空間には、マクロな量の振る舞いに関係する方向（部分空間）と大自由度に関係する方向（neutral 方向）が共存しているという結果へと導く。

（ii）さて、ここまで述べた状態と図 1 のような大自由度カオスの関係について考察する。大自由度カオスは（i）で述べた集団運動の領域からさらにKを大きくしたところで観察される。ここで述べる大自由度カオスとは、集団運動の様子を図 1 (a)～(c) のような時間をおったスナップショットの変遷で見たときに、振動子集団によって構成された閉じたループが折り畳み引き延ばし運動を繰り返し行なうものである。（i）の場合はどのような運動であっても、大自由度カオスの場合のような折り畳み引き延ばし運動を見い出すことはできず、閉じたループがほとんど形を変えずに運動しているのみにとどまるが、$|\overline{W}|$ の時間変化には（i）の場合との類似性が見られる。（i）から（ii）への集団運動の変化に伴う Lyapunov Spectrum の変化は、$O(N)$ 個の 0 値がほとんど全て正値に変わったということが顕著である。すでに（i）の範囲内で最大 Lyapunov 数は正になっていたが、neutral space の構造は保ち続けていたので、ここでの変化は neutral space があらゆる方向に向かって一度に不安定化することに相当することになる。一方、最大 Lyapunov 数は折り畳み引き延ばし運動がはじまっても定性的変化はないように見える。実際、(i) に述べた状態から連続的にKを変えていくと、ある転移点 K_C以降で図 1 のような折り畳み引き延ばし運動がはじまって、それとともに Lyapunov 数のパターンが上述のように変化するが、$|\overline{W}|$ の時間変化には大きな差異は認められない。つまり、引き延ばし折り畳み運動の発現（大自由度カオスへの転移）は neutral space の不安定化という観点で捉えることができ、それに先立つマクロな量の分岐に対応する集団運動の変化とは異なる力学的 event である。このことから、この大自由度カオスでは位相空間内において低次元の運動に関係する部分空間と大自由度に関係する部分空間に近似的に分離することが可能と考えられる。

参考文献

[1] N.Nakagawa and Y.Kuramoto, Prog.Theor.Phys. **89** (1993) 313.

[2] N.Nakagawa and Y.Kuramoto, Physica **D80** (1995) 307.