物性研究　64－5（1995－8）

Yang-Mills場の分岐について

高岡法科大学（非常勤）　荒井義則*

（1995年6月30日受理）

§1　序

Yang-Mills場のある種の古典解は非摂動論的研究において重要な役割りを果たしているので［1］－［2］，古典解についていろいろな研究がなされてきた。それらの研究の中には厳密解を求める研究［3］－［9］の他に，分岐［10］－［20］やカオス［21］－［35］に関する研究も存在した。本稿ではYang-Mills場の分岐について考察する。Yang-Mills場は，主として，素粒子物理学の分野で用いられてきたが，分岐やカオスを示すモデルとして応用数学の研究対象としても興味深いものであろう。

Yang-Mills場の分岐の研究対象のひとつにYang-Mills Mechanicsというものがある［10］－［11］。SU（2）Yang-Mills方程式は

$$\partial_\mu F^{a\mu\nu} + \varepsilon^{abc} A^b_\mu F^{c\mu\nu} = J^{a\nu}, \tag{1}$$

$$F^{a\mu\nu} = \partial^\mu A^{a\nu} - \partial^\nu A^{a\mu} + \varepsilon^{abc} A^{b\mu} A^{c\nu}, \tag{2}$$

$$(a,\ b,\ c = 1,\ 2,\ 3;\ \mu,\ \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

であるが，

$$A^a_0 = 0,\ A^3_i = A^a_3 = 0,\ (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{3.a}$$

$$A^1_1 = s(t),\ A^2_1 = z(t),\ A^1_2 = u(t),\ A^2_2 = w(t), \tag{3.b}$$

$$J^{30} = R,\ \text{その他の場合}\quad J^{a\nu} = 0,\ (R\text{は定数}); \tag{3.c}$$

---

* 〒182 東京都調布市柴崎２－13－３つつじヶ丘ハイムＡ棟609号

とすると，方程式（１）は

$$\ddot{s}=-w\,(s\,w-u\,z), \tag{4.a}$$

$$\ddot{u}=z\,(s\,w-u\,z), \tag{4.b}$$

$$\ddot{z}=u\,(s\,w-u\,z), \tag{4.c}$$

$$\ddot{w}=-s\,(s\,w-u\,z), \tag{4.d}$$

$$s\,\dot{z}-\dot{s}\,z+u\,\dot{w}-\dot{u}\,w=R, \tag{4.e}$$

となる。ここで「・」は t に関する微分を表わす。この（4.ａ）－（4.ｅ）がYang-Mills Mechanics を記述する方程式である。さらに，

$$z\,(t)=0,\quad u\,(t)=0,\quad R=0, \tag{5}$$

とすると，（4.ａ）－（4.ｅ）は

$$\ddot{s}+s\,w^2=0, \tag{6.a}$$

$$\ddot{w}+s^2\,w=0, \tag{6.b}$$

となるが，これらの方程式系もYang-Mills Mechanicsと呼ばれている。

また，

$$A_0^a=0, \tag{7.a}$$

$$A_i^a=O_i^a\,f_a\,(t), \tag{7.b}$$

$$J^{a\nu}=0, \tag{7.c}$$

とすると，方程式（１）は

$$\ddot{f}_1 + f_1 (f_2^2 + f_3^2) = 0, \tag{8.a}$$

$$\ddot{f}_2 + f_2 (f_3^2 + f_1^2) = 0, \tag{8.b}$$

$$\ddot{f}_3 + f_3 (f_1^2 + f_2^2) = 0, \tag{8.c}$$

となる。ただし，（7. b）においては a について和はとらず，また，O_i^a は一定の直交行列である。すなわち

$$O_i^a O_i^b = \delta^{ab}。 \tag{9}$$

方程式系（8. a）－（8. c）もYang-Mills Mechanicsと呼ばれている。ここで，

$$f_3 (t) = 0, \tag{10}$$

とすると，（8. a）－（8. c）は

$$\ddot{f}_1 + f_1 f_2^2 = 0, \tag{11.a}$$

$$\ddot{f}_2 + f_1^2 f_2 = 0, \tag{11.b}$$

となって，方程式系（6. a）－（6. b）と一致する。

なお，Yang-Mills Mechanics以外にもYang-Mills場の分岐についてはいろいろと調べられている [12] － [20] 。また，Chern-Simons項を含んだ（2＋1）－次元のYang-Mills場(Topologically massive Yang-Mills field)については，[36] において分岐の研究がなされているし，Yang-Mills-Higgs系や Abelian Higgs模型に関する分岐については前の論文 [37] － [38] で扱っている。

本稿では§ 3と§ 4で，（3. a）－（3. c）及び（5）とは少し異なる仮定を用いて分岐を調べることにするが，その前に§ 2において，分岐の証明に用いる定理を述べ，§ 3と§ 4で行なう証明と比較するために，この定理を用いてYang-Mills Mechanics（4. a）－（4. e）及び（6. a）－（6. b）の分岐解の存在の証明を確認しておく。ここで用いられる定理は物理ではあまり用いられることがないので，§ 2で簡単に紹介しておくことも無駄ではないであろう。

§2　Yang-Mills Mechanicsの分岐

Yang-Mills Mechanicsの分岐の証明［11］に用いられた分岐理論の定理は以下の定理（参考文献［39］の 188頁の定理5.1）である。

（定理） Let X, Z be real (or complex) Banach spaces, Λ be an open set in R(or C) and $M \in C^m(\Lambda \times X, Z)$, $m \geqq 2$. Suppose that

$$M(\lambda, x) = Bx - \lambda x + N(\lambda, x), \tag{12.a}$$

$$N(\lambda, 0) = 0, \ D_x N(\lambda, 0) = 0. \tag{12.b}$$

If λ_0 is a simple eigenvalue of B with eigenvector $y_0 \neq 0$, then $(\lambda, x) = (\lambda_0, 0)$ is a bifurcation point of $M(\lambda, x) = 0$. Moreover, there exist C^{m-1} functions

$$\lambda^*(u) = \lambda_0 + O(|u|), \tag{13.a}$$

$$x^*(u) = u y_0 + O(u^2), \tag{13.b}$$

for real u near zero such that

$$M(\lambda^*(u), x^*(u)) \equiv 0. \tag{14}$$

All zeros of M near $(\lambda_0, 0)$ are either the trivial solution $x=0$ or given by (13.a)-(13.b). Finally, if M is an analytic function of λ, x near $(\lambda_0, 0)$, then λ^*, x^* are analytic near zero. （終わり）

なお，この定理の中で$B: X \to Z$は有界線形作用素（bounded linear operator)である。

U. KursaweとE. Malecは周期的境界条件をかして，この定理を用いてYang-Mills Mechanics（4.a）－（4.e）と（6.a）－（6.b）の分岐を証明し，分岐解についていろいろな考察を行なった［11］（文献［11］では（8.a）－（8.c）は考察されていない。）。以下では，§3，§4の証明と比較するため，（6.a）－（6.b）の分岐の証明を確認しておく。

方程式系（6. a）－（6 b）は

$$s=0,\quad w=\alpha,\quad (\alpha\text{は定数}),\tag{15}$$

なる解をもつ。ここで

$$w(t)=v(t)+\alpha,\tag{16}$$

で $v(t)$ を定義して，（16）を（6. a）－（6. b）に代入すると，

$$\ddot{s}+\alpha^2 s+2\alpha s v+s v^2=0,\tag{17. a}$$

$$\ddot{v}+\alpha s^2+v s^2=0,\tag{17. b}$$

となる。ここでは　$0\leqq t\leqq T$（Tは任意の正数）　の範囲で考えることにし，周期的境界条件ではなく簡単のために両端固定型の境界条件

$$s(0)=v(0)=s(T)=v(T)=0,\tag{18}$$

を考えることにする。このとき，αを分岐のパラメーターにとると，次の定理１が成立する。

（定理１）方程式系(17. a）－(17. b）には

$$\alpha^2=\frac{n^2\pi^2}{T^2},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots),\tag{19}$$

のとき，自明解　$s=0$，$v=0$　から分岐し境界条件（18）を満たす非自明解が存在する。α^2 が$n^2\pi^2/T^2$ に十分近いとき，この分岐解は

$$s=\beta\sin\frac{n\pi}{T}t+O(\beta^2),\tag{20. a}$$

$$v=O(\beta^2),\tag{20. b}$$

と表わされる。ここで，βは0に十分近い実数で，α^2 とは

$$\alpha^2 = \frac{n^2 \pi^2}{T^2} + O(|\beta|), \tag{21}$$

の関係がある。また，（α^2，s，v）が（$n^2 \pi^2 / T^2$，0，0）に十分近いところでは方程式系(17. a）−(17. b）の解は自明解　$s=0$，$v=0$　と(20. a）−(20. b）で表わされる解のみである。

（証明）方程式系(17. a）−(17. b）の非線形部分

$$\begin{pmatrix} 2\alpha s v + s v^2 \\ \\ \alpha s^2 + v s^2 \end{pmatrix}, \tag{22}$$

とこの非線形部分のsとvに関する一次導関数が　$s=v=0$　のときに0になることは容易にわかる。

線形部分の固有値問題については，境界条件（18）のもとで次の方程式系を考察すればよい。

$$\ddot{s} + \alpha^2 s = 0, \tag{23. a}$$

$$\ddot{v} = 0。 \tag{23. b}$$

この方程式は　$\alpha^2 = n^2 \pi^2 / T^2$　のとき

$$\begin{pmatrix} s \\ \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \dfrac{n\pi}{T} t \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{24}$$

なる非自明解をもつ。このことより，固有値$n^2 \pi^2 / T^2$ が単純であり，また，この固有値に対する固有ベクトルが（24）であることがわかる。

以上の考察により，前に掲げた分岐の定理によって，本定理は証明されたことになる。

Yang-Mills Mechanics（4.a）－（4.e）の分岐を示すには，分岐の定理を用いる前に，ある程度方程式を変形する必要がある。以下では方程式系（4.a）－（4.d）のみを考察するものとする。まず，以下のように新しい変数 r_1，r_2，θ_1，θ_2 を導入する。

$$(1/\sqrt{2})\ (s+w)=r_1\cos\theta_1, \tag{25.a}$$

$$(1/\sqrt{2})\ (u-z)=r_1\sin\theta_1, \tag{25.b}$$

$$(1/\sqrt{2})\ (u+z)=r_2\sin\theta_2, \tag{25.c}$$

$$(1/\sqrt{2})\ (s-w)=r_2\cos\theta_2。 \tag{25.d}$$

(25.a)－(25.d) を用いると，（4.a）－（4.d）は L_1，L_2 を定数として，

$$r_1^2\dot{\theta}_1=L_1,\quad r_2^2\dot{\theta}_2=L_2, \tag{26.a}$$

$$\ddot{r}_1-\frac{L_1^2}{r_1^3}+\frac{r_1}{2}(r_1^2-r_2^2)=0, \tag{26.b}$$

$$\ddot{r}_2-\frac{L_2^2}{r_2^3}+\frac{r_2}{2}(r_2^2-r_1^2)=0。 \tag{26.c}$$

ここで $L_1=0$，$L_2\neq 0$ を仮定し，方程式系(26.b)－(26.c)のみを考察することにすると，

$$\ddot{r}_1+\frac{r_1}{2}(r_1^2-r_2^2)=0, \tag{27.a}$$

$$\ddot{r}_2-\frac{L_2^2}{r_2^3}-\frac{r_2}{2}(r_1^2-r_2^2)=0, \tag{27.b}$$

を得る。方程式系(27.a)－(27.b)は $r_1=0$，$r_2=2^{1/6}L_2^{1/3}$ なる解をもつので，

$$\alpha=2^{1/6}\ L_2^{1/3},\quad r_1=x,\quad r_2=\alpha+y, \tag{28}$$

とすると，方程式系(27. a）－(27. b）は

$$\ddot{x}+\frac{x}{2}\{x^2-(y+\alpha)^2\}=0, \tag{29. a}$$

$$\ddot{y}-\frac{\alpha^6}{2(y+\alpha)^3}-\frac{y+\alpha}{2}\{x^2-(y+\alpha)^2\}=0, \tag{29. b}$$

となる。$0\leqq t\leqq T$ で考察することにして，x，yに両端固定型の境界条件

$$x(0)=y(0)=x(T)=y(T)=0, \tag{30}$$

を考えることにすると，次のような定理2を得る。

（定理2）方程式系(29. a）－(29. b）には

$$\alpha^2=\frac{n^2\pi^2}{3T^2},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots), \tag{31}$$

のとき，自明解　$x=0$，$y=0$　から分岐し境界条件（30）を満たす非自明解が存在する。α^2 が$n^2\pi^2/3T^2$ に十分近いとき，この分岐解は，

$$x=O(\beta^2), \tag{32. a}$$

$$y=\beta\sin\frac{n\pi}{T}t+O(\beta^2), \tag{32. b}$$

と表わされる。ここで，βは0に十分近い実数で，α^2 とは

$$\alpha^2=\frac{n^2\pi^2}{3T^2}+O(|\beta|), \tag{33}$$

の関係がある。また，$(\alpha^2,\ x,\ y)$ が $(n^2\pi^2/3T^2,\ 0,\ 0)$ に十分近いところでは方程式系(29. a）－(29. b）の解は自明解 $x=0$，$y=0$ と(32. a）－(32. b）で表わされる解のみである。

定理 2 の証明は定理 1 と同様にしてできるが，ここでは省略しておく。

[11] では，Yang-Mills Mechanics（4. a）－（4. d）と（6. a）－（6. b）を本稿よりくわしく解析しており，たとえば，(33) も

$$\alpha^2 = \frac{n^2\pi^2}{3T^2} + \frac{2n\pi\beta}{3^{3/2}\,T} + O(\beta^2), \tag{34'}$$

とよりくわしく求めてあり，また，周期的境界条件を考えているが，本稿では分岐が生じることのみを示すために定理 1 およびその証明は簡単化されている。

§ 3 解の分岐

ここでは § 1 の仮定とはすこし異なる仮定をたてて，Yang-Mills方程式の解の分岐を考える。

$$A_1^1 = s(t),\ A_2^2 = w(t), \tag{35. a}$$

$$\text{その他の場合}\quad A_\nu^a = 0, \tag{35. b}$$

$$J_1^1 = \alpha^3,\ J_2^2 = \alpha^3,\ (\alpha \text{は定数}), \tag{35. c}$$

$$\text{その他の場合}\quad J_\nu^a = 0, \tag{35. d}$$

とすると，方程式（1）は

$$\ddot{s} + s\,w^2 = \alpha^3, \tag{36. a}$$

$$\ddot{w} + s^2\,w = \alpha^3, \tag{36. b}$$

となる。なお，(35. c）の右辺を α とはおかず，α^3 としたのは，あとの計算を簡単にするためである。 $\alpha\equiv 0$ とした場合がYang-Mills Mechanics（6. a）－（6. b）である。方程式系(36. a）－(36. b）に分岐が生じることを示すために，まず方程式を少し変形する。

方程式系(36. a) −(36. b) は

$$s=\alpha,\quad w=\alpha, \tag{37}$$

なる解を持つ。ここで，

$$s(t)=x(t)+\alpha, \tag{38. a}$$

$$w(t)=y(t)+\alpha, \tag{38. b}$$

で，$x(t)$，$y(t)$ を定義し，これらの式を(36. a) −(36. b) に代入すると

$$\ddot{x}+\alpha^2 x+2\alpha^2 y+xy^2+2\alpha xy+\alpha y^2=0, \tag{39. a}$$

$$\ddot{y}+\alpha^2 y+2\alpha^2 x+x^2 y+2\alpha xy+\alpha x^2=0, \tag{39. b}$$

を得る。さらに，(39. a) +(39. b) より

$$(\ddot{x}+\ddot{y})+3\alpha^2(x+y)+xy(x+y)+4\alpha xy+\alpha(x^2+y^2)=0, \tag{40. a}$$

また，(39. a) −(39. b) より

$$(\ddot{x}-\ddot{y})-\alpha^2(x-y)-xy(x-y)-\alpha(x^2-y^2)=0, \tag{40. b}$$

を得る。ここで再び

$$x(t)+y(t)=X(t), \tag{41. a}$$

$$x(t)-y(t)=Y(t), \tag{41. b}$$

により，$X(t)$，$Y(t)$ を定義し，$X(t)$，$Y(t)$ で方程式系(40. a) −(40. b) を表わすと，

$$\ddot{X}+3\alpha^2 X+\frac{3}{2}\alpha X^2-\frac{1}{2}\alpha Y^2+\frac{1}{4}X^3-\frac{1}{4}XY^2=0, \tag{42. a}$$

$$\ddot{Y}-\alpha^2 Y-\alpha XY-\frac{1}{4}X^2 Y+\frac{1}{4}Y^3=0, \tag{42. b}$$

となる。ここでは，　$0 \leqq t \leqq T$（Tは任意の正数）　の範囲で考えることにし，両端固定型の境界条件

$$X(0)=Y(0)=X(T)=Y(T)=0, \tag{43}$$

を考え，αを分岐のパラメーターにとると，次の定理3が成立する。

（定理3）方程式系(42. a）－(42. b）には

$$\alpha^2=\frac{n^2 \pi^2}{3T^2}, \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots), \tag{44}$$

のとき，自明解　$X=0$，$Y=0$　から分岐し境界条件（43）を満たす非自明解が存在する。α^2 が $n^2 \pi^2 / 3T^2$ に十分近いとき，この分岐解は

$$X=\beta \sin\frac{n\pi}{T} t+O(\beta^2), \tag{45. a}$$

$$Y=O(\beta^2), \tag{45. b}$$

と表わされる。ここで，βは0に十分近い実数で，α^2 とは

$$\alpha^2=\frac{n^2 \pi^2}{3T^2}+O(|\beta|), \tag{46}$$

の関係がある。また，（α^2，X，Y）が（$n^2 \pi^2 / 3T^2$，0，0）に十分近いところでは方程式系(42. a）－(42. b）の解は自明解　$X=0$，$Y=0$　と(45. a）－(45. b）で表わされる解のみである。

（証明）方程式系(42. a）－(42. b）の非線形部分

$$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{2}\alpha X^2 - \dfrac{1}{2}\alpha Y^2 + \dfrac{1}{4}X^3 - \dfrac{1}{4}XY^2 \\ \\ -\alpha XY - \dfrac{1}{4}X^2 Y + \dfrac{1}{4}Y^3 \end{pmatrix}, \tag{47}$$

とこの非線形部分のXとYに関する一次導関数が　$X=Y=0$　のときに0になることは容易にわかる。

線形部分の固有値問題については，境界条件（43）のもとで次の方程式系を考察すればよい。

$$\ddot{X}+3\alpha^2 X=0, \tag{48. a}$$

$$\ddot{Y}-\alpha^2 Y=0。 \tag{48. b}$$

この方程式は　$\alpha^2=n^2\pi^2/3T^2$　のとき，

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \dfrac{n\pi}{T} t \\ \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{49}$$

なる非自明解をもつ。このことより，固有値$n^2\pi^2/3T^2$が単純であり，また，この固有値に対する固有ベクトルが（49）であることがわかる。

以上の考察より，§２の分岐の定理によって，本定理は証明されたことになる。

§４　ユークリッド空間での解の分岐

§１－§３までの解析はすべてミンコフスキー空間で考察した。ここではユークリッド空間で考察することにする。すなわち，ユークリッド化されたYang-Mills方程式の解の分岐を考えることにする。

Yang-Mills場は本来ミンコフスキー空間で考察すべきものであるが，なぜユークリッド空間でも考察するのかというと，インスタントン解などのユークリッド化されたYang-Mills方程式の解が非摂動論的研究において重要な役割りを演じているので［１］－［２］，ユークリッド

化されたYang-Mills方程式の解の分岐がインスタントン解のように，非摂動論的研究において何らかの働きをする可能性があるからである。また，ユークリッド化されたYang-Mills場はインスタントン解というソリトンをもっているので，応用数学の研究対象としても興味深いと思われるからである。

ここで，§3で用いた仮定を再び用いてみる。

$$A_1^1 = s(t), \quad A_2^2 = w(t), \tag{50. a}$$

$$\text{その他の場合} \quad A_\nu^a = 0, \tag{50. b}$$

$$J_1^1 = \alpha^3, \quad J_2^2 = \alpha^3, \tag{50. c}$$

$$\text{その他の場合} \quad J_\nu^a = 0, \tag{50. d}$$

ただし，§4では，$\nu = 1, 2, 3, 4$ である。

(50. a) －(50. d) をユークリッド化されたYang-Mills方程式に代入すると，

$$\ddot{s} - s w^2 = \alpha^3, \tag{51. a}$$

$$\ddot{w} - s^2 w = \alpha^3, \tag{51. b}$$

を得る。方程式系(51. a) －(51. b) は

$$s = -\alpha, \quad w = -\alpha, \tag{52}$$

なる解を持つ。ここで，

$$s(t) = x(t) - \alpha, \tag{53. a}$$

$$w(t) = y(t) - \alpha, \tag{53. b}$$

で，$x(t)$，$y(t)$ を定義し，これらの式を(51. a) －(51. b) に代入すると

$$\ddot{x} - \alpha^2 x - 2\alpha^2 y - x y^2 + 2\alpha x y + \alpha y^2 = 0, \tag{54. a}$$

$$\ddot{y}-\alpha^2 y-2\alpha^2 x-x^2 y+2\alpha xy+\alpha x^2=0, \tag{54. b}$$

を得る。さらに，(54. a）＋(54. b）より

$$(\ddot{x}+\ddot{y})-3\alpha^2(x+y)-xy(x+y)+4\alpha xy+\alpha(x^2+y^2)=0, \tag{55. a}$$

また，(54. a）－(54. b）より

$$(\ddot{x}-\ddot{y})+\alpha^2(x-y)+xy(x-y)-\alpha(x^2-y^2)=0, \tag{55. b}$$

を得る。ここで再び

$$x(t)+y(t)=X(t), \tag{56. a}$$

$$x(t)-y(t)=Y(t), \tag{56. b}$$

により，$X(t)$，$Y(t)$ を定義し，$X(t)$，$Y(t)$ で方程式系(55. a）－(55. b）を表わすと，

$$\ddot{X}-3\alpha^2 X+\frac{3}{2}\alpha X^2-\frac{1}{2}\alpha Y^2-\frac{1}{4}X^3+\frac{1}{4}XY^2=0, \tag{57. a}$$

$$\ddot{Y}+\alpha^2 Y-\alpha XY+\frac{1}{4}X^2 Y-\frac{1}{4}Y^3=0, \tag{57. b}$$

となる。ここでは，$0\leqq t\leqq T$（Tは任意の正数）の範囲で考えることにし，両端固定型の境界条件（43）を考え，αを分岐のパラメーターにとると，次の定理4が成立する。

（定理4）方程式系(57. a）－(57. b）には

$$\alpha^2=\frac{n^2\pi^2}{T^2},\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots), \tag{58}$$

のとき，自明解　$X=0$，$Y=0$　から分岐し境界条件（43）を満たす非自明解が存在する。α^2 が $n^2\pi^2/T^2$ に十分近いとき，この分岐解は

$$X=O(\beta^2), \tag{59.a}$$

$$Y=\beta\sin\frac{n\pi}{T}t+O(\beta^2), \tag{59.b}$$

と表わされる。ここで，β は0に十分近い実数で，α^2 とは

$$\alpha^2=\frac{n^2\pi^2}{T^2}+O(|\beta|), \tag{60}$$

の関係がある。また，(α^2, X, Y) が $(n^2\pi^2/T^2, 0, 0)$ に十分近いところでは方程式系(57.a)－(57.b)の解は自明解　$X=0$，$Y=0$　と(59.a)－(59.b)で表わされる解のみである。

（証明）方程式系(57.a)－(57.b)の非線形部分

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2}\alpha X^2-\frac{1}{2}\alpha Y^2-\frac{1}{4}X^3+\frac{1}{4}XY^2 \\ -\alpha XY+\frac{1}{4}X^2Y-\frac{1}{4}Y^3 \end{pmatrix}, \tag{61}$$

とこの非線形部分の X と Y に関する一次導関数が　$X=Y=0$　のときに0になることは容易にわかる。

線形部分の固有値問題については，境界条件（43）のもとで次の方程式系を考察すればよい。

$$\ddot{X}-3\alpha^2X=0, \tag{62.a}$$

$$\ddot{Y}+\alpha^2Y=0。 \tag{62.b}$$

この方程式は　$\alpha^2=n^2\pi^2/T^2$　のとき，

$$\begin{pmatrix} X \\ \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \sin \dfrac{n\pi}{T} t \end{pmatrix}, \tag{63}$$

なる非自明解をもつ。このことより，固有値$n^2 \pi^2 / T^2$が単純であり，また，この固有値に対する固有ベクトルが（63）であることがわかる。

以上の考察より，§２の分岐の定理によって，本定理は証明されたことになる。

§５　結論

本稿では，§３において新しいタイプのYang-Mills場の分岐を示し，§４においては§３で用いた仮定をユークリッド化されたYang-Mills場に適用し，分岐が生じることを証明した。

定理１では分岐のパラメーターαは最初には与えられていず，方程式系（6.a）－（6.b）の解として，（16）により導入されているが，定理３，定理４ではすでに最初から与えてしまってある。しかしながら，その分岐現象はほぼ同じ構造をしており，定理１のYang-Mills Mechanics と同様，Hopf分岐をおこすものと思われる。また，定理２においては導出される方程式系の一部を扱っているが，定理３，定理４においては導出される方程式をすべて扱っている。

定理３，定理４で用いた仮定はミンコフスキー空間でひとつの空間変数（たとえばx^3）に依存する場合にも適用できる。

$$A^1_1 = s(x^3),\ A^2_2 = w(x^3), \tag{64.a}$$

$$\text{その他の場合}\quad A^a_\nu = 0, \tag{64.b}$$

$$J^{11} = \alpha^3,\ J^{22} = \alpha^3,\ (\alpha\text{は定数}), \tag{64.c}$$

$$\text{その他の場合}\quad J^{a\nu} = 0, \tag{64.d}$$

とすると，方程式（１）は，

$$\ddot{s} - s w^2 = \alpha^3, \tag{65.a}$$

$$\ddot{w} - s^2 w = \alpha^3, \tag{65.b}$$

となる。ただし，(65. a) −(65. b) では「・」は x^3 に関する微分を表わしている。方程式系(65. a) −(65. b) は§4の方程式系(51. a) −(51. b) と同じ型をしているので，同様の分岐を生じていると考えられる。すなわち，ユークリッド空間における分岐のみならず，ミンコフスキー空間において x^3 のみに依存するYang-Mills場の場合も分岐が生じることを示せたことになる。

参考文献

[1] G.'tHooft: Phys. Rev. Lett. **37**, 8 (1976); Phys. Rev. **D14**, 3432 (1976).

[2] C. Callan, R. Dashen and D. Gross: Phys. Lett. **63B**, 334 (1976); Phys. Lett. **66B**, 375 (1977); Phys. Rev. **D17**, 2717 (1978); Phys. Rev. **D19**, 1826 (1979).

[3] A. A. Belavin, A. M. Polyakov, A. S. Schwartz and Yu. S. Tyupkin; Phys. Lett. **59B**, 85 (1975).

[4] V. De Alfaro, S. Fubini and G. Furlan; Phys. Lett. **65B**, 163 (1976).

[5] E. Witten; Phys. Rev. Lett. **38**, 121 (1977).

[6] J. Cervero, L. Jacobs and C. R. Nohl; Phys. Lett. **69B**, 351 (1977).

[7] A. Actor; Ann. Phys. 121, 181 (1979).

[8] I. Khan; Phys. Rev. **D29**, 1168 (1984).

[9] Y. Arai; Phys. Rev. **D34**, 1884 (1986).

[10] I. Froyland; Phys. Rev. **D27**, 943 (1983).

[11] U. Kursawe and E. Malec; J. Msth. Phys. **26**, 2643 (1985). Yang-Mills Mechanics については [21] − [29] も参照。

[12] R. Jackiw, L. Jacobs and C. Rebbi; Phys. Rev. **D20**, 474 (1979).

[13] R. Jackiw and P. Rossi; Phys. Rev. **D21**, 426 (1980).

[14] L. Jacobs and J. Wudka; Phys. Rev. **D25**, 1114 (1982).

[15] C. H. ho; J. Math. Phys. **25**, 660 (1984).

[16] S. K. Paul and A. Khare; Phys. Lett. **138B**, 402 (1984); Phys. Rev. **D33**, 1181 (1986).

[17] C. H. Oh, S. N. Chow and C. H. Lai; Phys. Rev. **D30**, 1334 (1984).

[18] C. H. Oh and R. R. Parwani; J. Phys. **A23**, L871 (1990).

[19] D. Horvat and K. S. Viswanathan; Phys. Rev. **D23**, 937 (1981).

[20] D. Horvat; Phys. Rev. **D34**, 1197 (1986).

[21] S. G. Matinyan, G. K. Savvidi and N. G. Ter-Arutyunyan-Savvidi; Sov. Phys. JETP53, 421 (1981); JETP Lett. **34**, 590 (1981).

[22] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyanskii; JETP Lett. **34**, 163 (1981).

[23] E. S. Nikolaevskii and L. N. Shur; JETP Lett. **36**, 218 (1982).

[24] A. Groski; Act. Phys. Pol. **B15**, 465 (1984).

[25] S. J. Chang; Phys. Rev. **D29**, 259 (1984).

[26] W.-H. Steeb, J. A. Louw and C. M. Villet; Phys. Rev. **D33**, 1174 (1986).

[27] J. Villarroel; J. Math. Phys. **29**, 2132 (1988).

[28] S. Ichtiaroglou; J. Phys. **A22**, 3461 (1989).

[29] J. Karkowski; Act. Phys. Pol. **B21**, 529 (1990).

[30] A. R. Avakyan, S. G. Arutyunyan and G. Z. Baseyan; JETP Lett. **36**, 451 [1982].

[31] S. G. Matinyan, E. B. Prokhorenko and G. K. Savvidi; JEPT Lett. **44**, 138 (1986); Nucl. Phys. **B298**, 414 (1988).

[32] T. Furusawa; Nucl. Phys. **B290**, 469 (1987).

[33] M. P. Joy and M. Sabir; J. Phys. **A22**, 5153 (1989).

[34] T. Kawabe and S. Ohta; Phys. Rev. **D41**, 1983 (1990).

[35] W.-H. Steeb and N. Euler; Nuovo Cimento **106B**, 1059 (1991).

[36] K. K. Loh and C. H. Oh; J. Phys. **A24**, L605 (1991).

[37] Y. Arai; 物性研究**55**, 654 (1991).

[38] Y. Arai; 物性研究**59**, 10 (1992).

[39] S. N. Chow and J. K. Hale; *Methods of Bifurcation Theory* (Springer-Verlag, New York, 1982)