

計算物理学および統計力学的手法をもちいた
 一次元交通流の研究
 —交通渋滞の統計力学—

湯川 諭

大阪大学大学院理学研究科物理学専攻

目次

1	序論	119
1.1	はじめに	119
1.2	交通流でよくもちいられる言葉	120
1.3	実際の交通流	121
1.3.1	基本図	121
1.3.2	軌跡	126
1.3.3	追従挙動	129
1.3.4	その他	129
2	従来の交通流モデル	130
2.1	マクロなアプローチ	130
2.1.1	流体モデル	130
2.2	ミクロなアプローチ	133
2.2.1	追従モデル	133
2.2.2	セルオートマトンモデル	137
2.3	確率論的なアプローチ	139
3	連続空間、離散時間におけるモデル	142
3.1	結合写像をもちいたモデル化	142
3.1.1	一台の車の運動のモデル化	142
3.1.2	車が他数集まった時のモデル化	143
3.1.3	パラメーターの決定	147

3.2	シミュレーションによる基本的な量の計算	149
3.2.1	シミュレーション	149
3.2.2	基本図と時空間と相空間でのトラジェクトリ	150
3.3	モデルの詳細な研究	157
3.3.1	パラメーターによるちがい	157
3.3.2	初期速度、初期配置にランダムネスがない系	159
3.4	まとめ	162
4	まとめ	164
4.1	まとめ	164

関連文献

この論文を書くにあたり、すでに出版されている関連した文献を次にあげておく。

S. Yukawa, M. Kikuchi, and S. Tadaki:

“Dynamical Phase Transition in One Dimensional Traffic Flow with Blockage”

Journal of the Physical Society of Japan, **63** (1994) 3609-3618.

S. Yukawa and M. Kikuchi:

“Coupled-Map Modeling of One-Dimensional Traffic Flow”

Journal of the Physical Society of Japan, **64** (1995) 35-38.

序の序

物性研究に投稿するにあたり、オリジナルの修士論文の第3章とまとめの章の第3章に関連した部分をすべて削除しました。また、交通流のモデルの歴史に関する章を短く書き直しました。ただし参考文献に関しては削らずに残しています。第3章にまとめられていたのはセルオートマトンをもちいた一次元交通流に関する研究についてです。この部分に関しては参考文献⁸⁵⁾や日本物理学会講演概要集 1994 年秋の分科会 第3分冊 p487 を参考にしてください。

第 1 章

序論

1.1 はじめに

近年の物理学のキーワードの一つに「複雑性」というものがある。しかし複雑性とは何であるかということに答えることは大変難しく、そのため物理を研究している人、一人一人その「複雑性」というものとの考え方がことなっている。ある人が複雑であると思っていることは、他の人からみれば必ずしも複雑でなかったりすることがよくある。ただ、今、物理学で「複雑性」と呼ばれるものを相手にしている人たちに共通にある認識としては、「複雑性」の研究とは複雑な振舞いをするシステムに対する研究である、ということであろう。そのようなシステムは「複雑系」とよばれる。近年の著名な物理学者の一人である Murray Gell-Mann はその著書のなかで²⁴⁾、物事の表面に現れている複雑性はその奥に存在している複雑な振舞いをする可能性を秘めた単純な要素から生まれる、ということをいろいろな例を通じて示している。「複雑性」に対する考え方には、このような Gell-Mann 流の考え方以外にもいろいろある。それは対象とするシステムが膨大にあるためであって、いろいろあるのは当然である。本研究では Gell-Mann 流の考え方を複雑な振舞いをする系に対する基本的な立場としよう。

さて「複雑性」というものを、Gell-Mann 流の考えをもう一步進めてとらえることにしよう。このために、

「非線形な局所的相互作用を行う簡単な要素が集まったときの非自明な集団のダイナミクス」

をとすることを考えよう。これは Gell-Mann の考え方をもう少し具体的にしたものである。Gell-Mann の考えの物事の表面に現れている複雑性を非自明な集団のダイナミクスと捉え、複雑な振舞いをする要素をする可能性を秘めた単純な要素を非線形な相互作用をする簡単な要素とみなせば上のダイナミクスは Gell-Mann の考え方と同じものである。このようなダイナミクスを本研究の対象とする。

物理学においては自然の階層性ということがよく知られている。物理法則というものは、その階層毎に組み立てられるべきであり、各階層の物理法則はその一つ下の階層の物理法則のリダクションとして得られる。ここでは社会的な階層における複雑系としての交通流を考えよう。交通流はまさしく「非線形な局所的相互作用を行う簡単な要素が集まったときの非自明な集団のダイナミクス」であるとみなすことができる。このようなダイナミクスを持つ他の物理系には、例えば、脳の記憶の問題に関連するニューラルネットワーク³⁰⁾ や、化学反応系の時空カオスの問題から発生した結合写像格子のダイナミクス³⁰⁾、粉体流の問題²⁸⁾ などがあり、複雑系として非常に面白い現象が数多く見られる。また、交通流の物理的本質は「個性のある粉体流」であるとも考えることができる。したがって、交通流には「非線形な局所的相互作用を行う簡単な要素が集まったときの非自明な集団のダイナミクス」や「個性のある粉体流」であることを反映した数多くの物理的に興味を持たれる現象や問題がある。たとえば統計力学的な現象では、渋滞-非渋滞相転移があり、これは非平衡系の動的相転移と考えることができる。またこの相転移は工学への応用を

考える上でも重要な現象である。実際の交通流でも相転移に起因すると考えられる渋滞相と非渋滞相の性質の違いが観測されている。^{9, 20, 21, 46, 45, 71} 動力学的なものでは、交通流における $1/f$ 揺らぎ^{57, 58}、カオス^{17, 19, 36, 48}、渋滞相に走るショックウェーブ^{50, 56} やソリトンなどの研究がある。そして最近では、渋滞相や非渋滞相における自己組織化現象^{5, 12} やパターン形成⁵⁰ に関する研究もある。このように交通流には物理的に興味を持たれる現象が多くあり、歴史的にもかなり以前から多くの人によって研究が行なわれている。

このように多くの興味深い物理的な現象を含んでいる交通流であるが、まだはっきりと解明されていない現象が数多くある。これは取り扱うべき対象の自由度が非常に大きく、なかなか解析的なアプローチを寄せつけなかったためである。ところが近年、計算機の技術が発達し計算物理学という新たな手法が交通流の研究に対して可能になった。このためここ数年は大規模な数値シミュレーションや数値計算による研究が盛んになっている。最近、こういう事情から交通流の新しいモデル化が行なわれた。⁵⁾ これはセルオートマトン^{83, 84} をもちいたモデル化であり、計算機でシミュレーションしやすいという事情がある。また、このセルオートマトンをもちいた交通流のモデルは強制拡散系などの他の物理系と考えることもでき多くの物理学者によって研究がなされている。^{5, 12, 59, 60, 61, 63, 64, 62, 77, 80, 81, 85} この新しい動きとは別に、伝統的な交通流に対する理論的なアプローチも計算機が発達してきた事情により変わりつつある。以前は非線形で解析的に解けなかったような方程式も計算機によって数値的に解くことが容易になり、交通流を非線形な方程式で記述しようという動きがあり、従来のモデルを改良した新しいモデル化も提唱されている。³⁾ さらに、一般的なモデル化の概念にも計算物理学の発達とともに構成的モデル化という新しい概念が生まれてきた。³⁸⁾ これはミクロな立場からのモデル化が難しいものにたいして有効な概念であり、物事の物理的本質を一つ一つ構成的にモデルに組み込んでいくというものである。

このようなことをふまえ、この研究では社会的な階層における交通流というものを対象にし、具体的には隘路が原因となる渋滞-非渋滞相転移や、⁸⁵⁾ 非渋滞相における自己組織化現象で起きる物理的現象をセルオートマトンモデルやその拡張で考える。また構成論的なモデル化を交通流に対して試み、このモデルにより交通流での物理現象や渋滞の発生を考える。⁸⁶⁾ この論文の構成は次の通りである。まずこの章の残りで交通流を記述するのに良くもちいられる言葉を整理する。また、実際の交通流で観測されている現象を観測データをもとに紹介する。次の章では代表的な一次元の交通流のモデルに関する解説を行なう。そして、本論に入り第3章で構成論的な交通流のモデルを構成し、そのモデルによる研究成果をまとめる。

1.2 交通流でよくもちいられる言葉

具体的な話に入る前に、ここで交通流の現象でよくもちいられる言葉を整理しよう。^{31, 51)} 交通流の状態を表すのにもちいられるもっとも基本的な量は三つあり、それぞれ交通量、密度、平均速度である。交通量 (volume) はある時間内に道路の観測点を通過する車の数で定義される。すなわち観測点 A で T 時間通過する車の数を計測した結果を m 台とすれば、 T 時間交通量 Q は、

$$Q = m \quad (1.1)$$

とかける。この交通量とよく似ているが区別される量に交通流率 (flow) がある。交通流率とは、単位時間当たりに換算された交通量のことである。したがって、交通流率 q は、交通流で観測した交通量の結果から

$$q = \frac{m}{T} \quad (1.2)$$

とかける。次に基本的な量は密度 (density, concentration) である。これは道路上の単位距離あたりの車の数で定義される。交通流率と密度の関係を表した図を基本図 (fundamental Diagram) と呼ぶ。平均速度に関しては、二つの平均の取り方が考えられる。時間に関する平均速度を時間平均速度、空間に関する

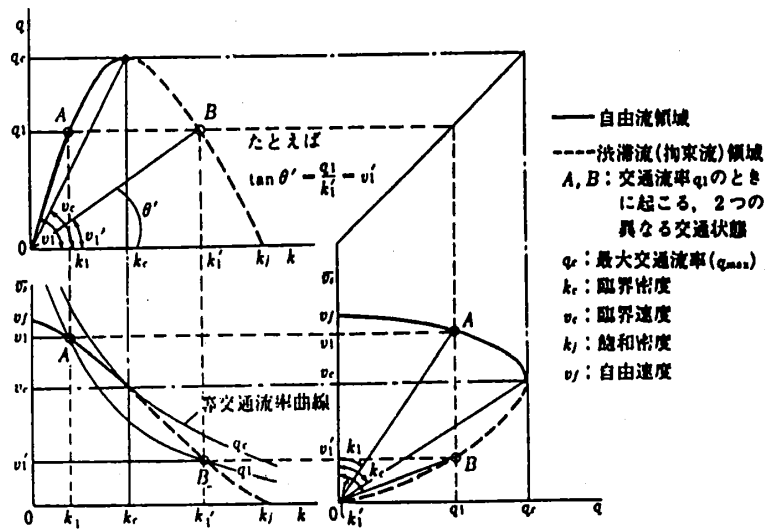


図 1.1: 交通流率 q 、密度 k 、平均速度 v の関係の概念図。参考文献³¹⁾より抜粋。図中の記号や補助線は本文とは関係がない。

平均速度を空間平均速度としよう。時間平均速度 $\langle v \rangle_t$ はある観測点を一定時間内に通過した車の速度の平均であり、空間平均速度 $\langle v \rangle_s$ はある一定区間内に存在する車の平均速度である。この空間平均速度 $\langle v \rangle$ と密度 ρ 、交通流率 q の間には、次のような関係がある。

$$q = \rho \langle v \rangle. \tag{1.3}$$

これらの間の関係を概念図 1.1 に示しておく。また閉じた道路で交通流が定常状態にある時は、時間平均は空間平均で置き換えられることに注意しておく。

これ以外にも車間距離 (headway distance) や交通容量 (capacity)、占有率 (occupancy) などがある。まず車間距離は日常生活でよくもちいられるように車の先頭とその前の車の後ろとの距離で定義される。これに関係した量に車頭距離がある。これは車の先頭から前の車の先頭までの距離で定義される。車の大きさを無視するときは、車間距離と車頭距離は一致する。交通容量は密度と交通流率の関係を表す基本図 (図 1.1 を参照) でピークにあたる点での交通流率である。このピークは道路の状況や交通流に含まれる車の性質、交通流の特徴を一番良く表している。このために密度-交通流率図は実際の観測やシミュレーションでよく測定される。交通流の密度は通常の交通の監視システムにとっては測定するのが難しい量である。このために密度のかわりをする量として占有率がよく測定される。これには時間的な占有率と空間的な占有率がある。時間的な占有率はある地点で一定時間 T の間に車が占有していた時間 t とその測定時間 T との比で定義される。空間的な占有率はある地点での一定区間 X である瞬間に車が占めていた道路の長さ x とその測定区間との比で定義される。今後、曖昧さがないところではこれらの言葉を定義なしにもちいる。

1.3 実際の交通流

1.3.1 基本図

ここでは実際に観測されている交通流の性質を紹介しよう。まずはもっともよく観測されている基本図から始める。基本図はこの前の節でも説明した通り、車の密度と交通流率の関係である。この基本図という量は実際に観測される時は、ある道路上の一点である日時にある時間測定される。そのためデータには場所による違いや測定日時による違い、測定時間による違いなどの多くのばらつきがある。このため現象

論的な基本図のモデルは図 1.2 のようにいろいろな種類が考えられている。これらは流体力学的なモデルから計算されたものや、車一台一台を取り扱うモデルによって計算されたものである。このようにいろいろな種類のモデルがあるが、どのモデルも傾向は大体同じである。実際の交通流では密度が 0 で平均速度が有限、また密度が 1 で平均速度が 0 でなければならないので対数型のモデルや指数型のモデルは適用できない密度領域がある。そして実際の交通流のデータにはこれらのモデルのようにある一つの関数で記述することができないことが多い。このようなときは密度領域を適当に分けていろいろなモデルを回帰分析に基づいてそのデータごとに適用しているのが現状である。^{9, 20)}

越らによる実際の交通流率と密度の関係の典型的な観測の結果を図 1.3 に示す。^{45, 46)} このデータは 1 号線上り方面浜崎橋合流部の上流約 5.7km での 1 分間ごとのデータを一時間あたりに換算したプロットである。二つあるのは走行車線 (outer lane) と追い越し車線 (inner lane) のデータである。このように同じ道路のデータであっても車線によって基本図は大きくかわる。

このデータからわかるのが低密度では交通流率がほぼ時速 45km の直線に並行であり、高密度ではなにか別の曲線にのって小さくなっていくようすが見られる。また、高密度ではデータのばらつきが大きく低密度ではばらつきが小さいことが見てとれる。この図から低密度と高密度では明らかに交通流の特性が違ってくる。もっとも特徴的なのが低密度から高密度に移り変わる場所である。このような交通流率が低密度と高密度では特性が違ってくるということは以前から知られていた。^{9, 20, 21)} この違いをはじめて指摘したのは Edie である。²¹⁾ Edie は Greenberg の交通流に対する流体力学的なモデル²⁵⁾ で得られていた密度と交通流率の関係の解析的な式をもちいて、観測されたデータのフィッティングをおこなった。この結果、低密度と高密度では別々のパラメーターをもちいてフィッティングする必要があることを指摘し、基本図で交通流率が不連続になることをしめした。またこれ以降の研究もモデルこそ違ってもやっていることは密度領域を二つに分け別々にフィッティングするということである。^{9, 20, 71)} このように二つの領域に分けるという考え方では基本図を何か不連続な関数で記述することになる。これはある密度で突然移りかわると解釈されているものもあればある密度幅をもって徐々に移りかわると解釈されているものもある。ここで示した越らの観測のデータはある密度を境にして、突然別の曲線にのるといような不連続な振舞いではなく、むしろある密度の幅があってその間で徐々に移りかわっている振舞い (走行車線) や、全く違う密度-交通流率の関数が、ある密度領域で共存して双安定な構造をつくり移りかわっているような振舞い (追い越し車線) をしている。越らはこの結果から交通流率はギリシャ文字の λ を鏡に写したような形の不連続性を示すといっている。^{45, 46)}

Hall らはこのような観測でえられている低密度と高密度での交通流率の特性の違いを調べるために、オンタリオの高速道路での長期のデータをもちいて解析を行なった。^{7, 26)} この時に Hall らは、いままでもちいられてきた方法とは違う解析方法をもちいた。いままで使われていた解析方法は交通流のモデルの計算からの関数形の仮定や、密度領域の分割にどうしても解析する側の意志が入ってしまうためである。Hall らはこのような不確定性をなくすために、ただ一つの「交通流率は密度 (occupancy) が決まれば一意に決まる。」という仮定をおいて一つの密度に対して得られている交通流率の平均をとるとい解析を行なった。この結果、図 1.4 のような不連続性を持った基本図が図 1.5 のような平均の基本図になる。図 1.5 では平均をとった交通流率に自由流と渋滞流の区別がはっきりと見えている。またデータの標準偏差 (図中では実線で書かれている) は自由流よりは渋滞流の方が大きい。そしてもっとも標準偏差が大きくなっているのはちょうど臨界的な占有率のあたりである。この解析の結果、交通流率は V の上下を入れ換えたような形をしており、低密度から高密度の自由流から渋滞流に移りかわるところは連続であるが微分はできないような関数で表されていると Hall は主張している。²⁶⁾

また、図 1.4 を見ればわかるように臨界的な占有率のところでのデータがあまりない。このため観測時間が短かったりすると、このあたりのデータを十分にとることができなくなる。Hall はこのような臨界的な占有率のところでのデータの欠落によって、実際に観測される基本図は図 1.6 のような 4 種類のパターンに分類できるとしている。²⁶⁾ 図 1.6 で A は「人」の字の形をしていて、ある密度領域では交通流率が二価

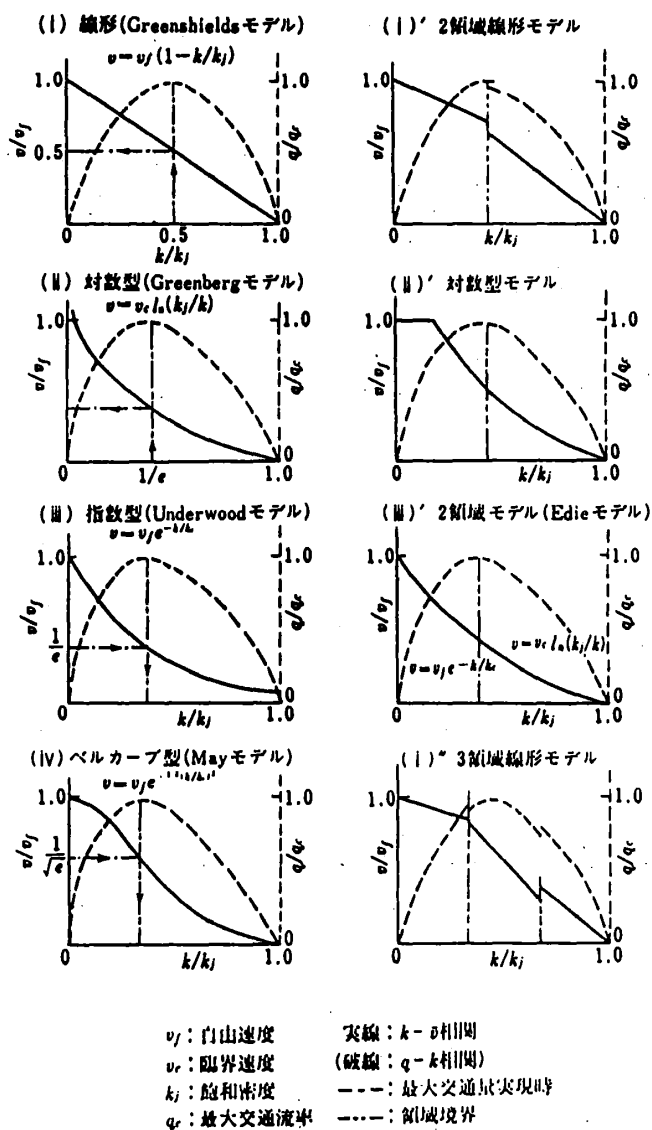


図 1.2: 基本図のモデルの例。参考文献³¹⁾より抜粋。

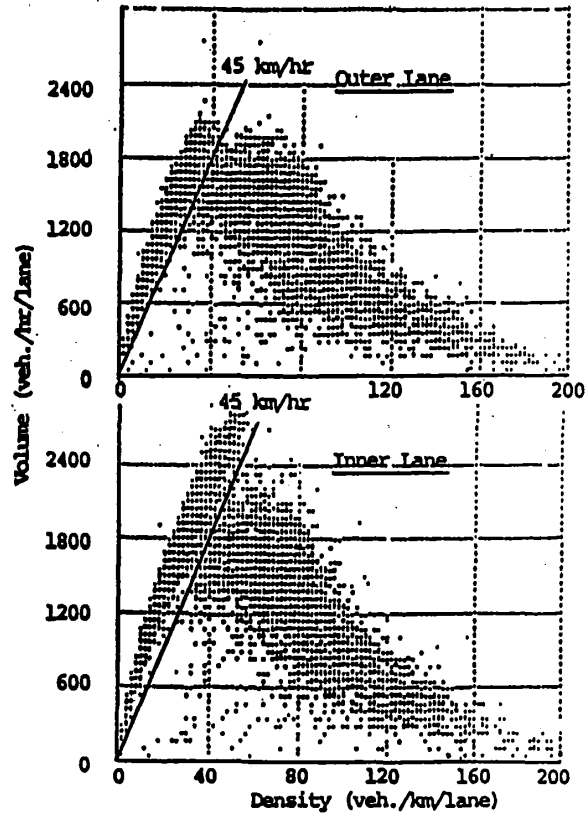


図 1.3: 典型的な基本図の観測例。データは1号線上り方向浜崎橋合流部の上流約5.7kmの地点。1分間のデータのプロットを168時間とったものである。参考文献⁽⁴⁶⁾より抜粋。

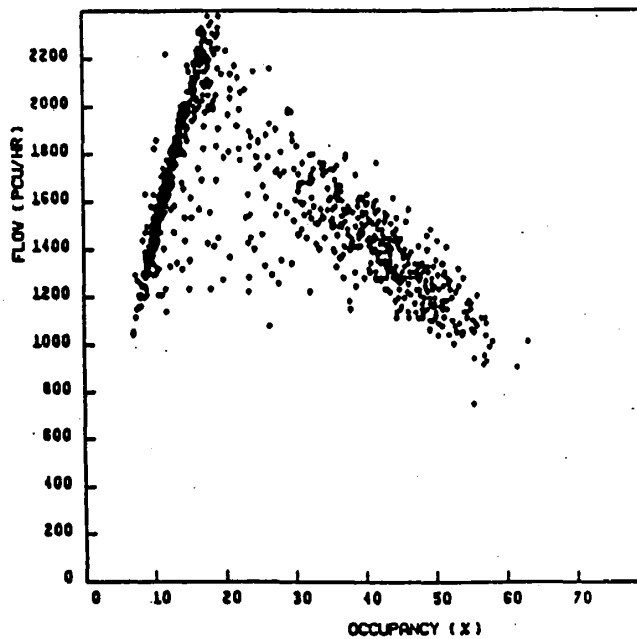


図 1.4: 典型的な基本図の観測例。OntarioのQueen Elizabeth Way Freewayの71日の測定のうち理想的な41日のデータのプロット。点は5分間の平均。密度ではなく占有率でプロットしている。参考文献⁽²⁶⁾より抜粋。

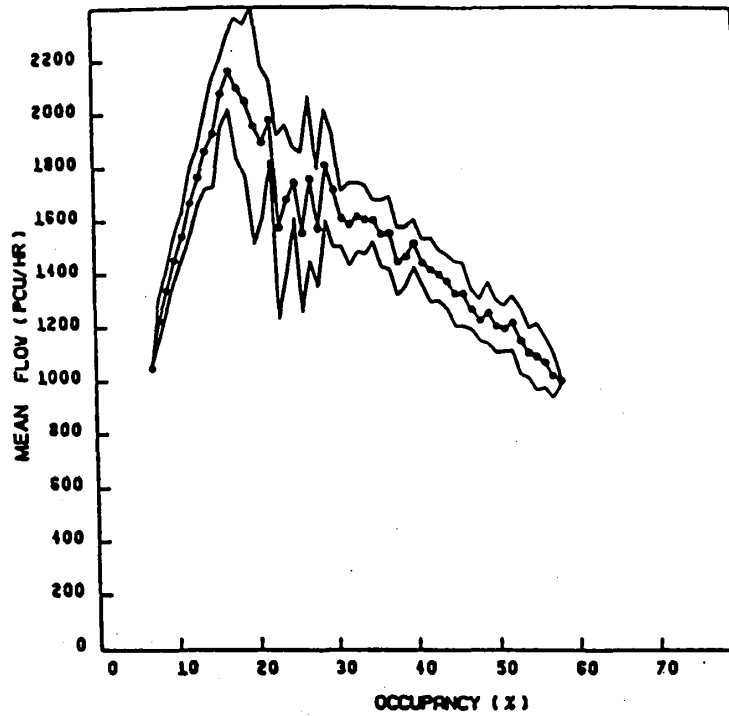


図 1.5: 図 1.4の解析の結果。図 1.4で同じ占有率のデータに対して平均をとったものである。参考文献²⁶⁾より抜粋。

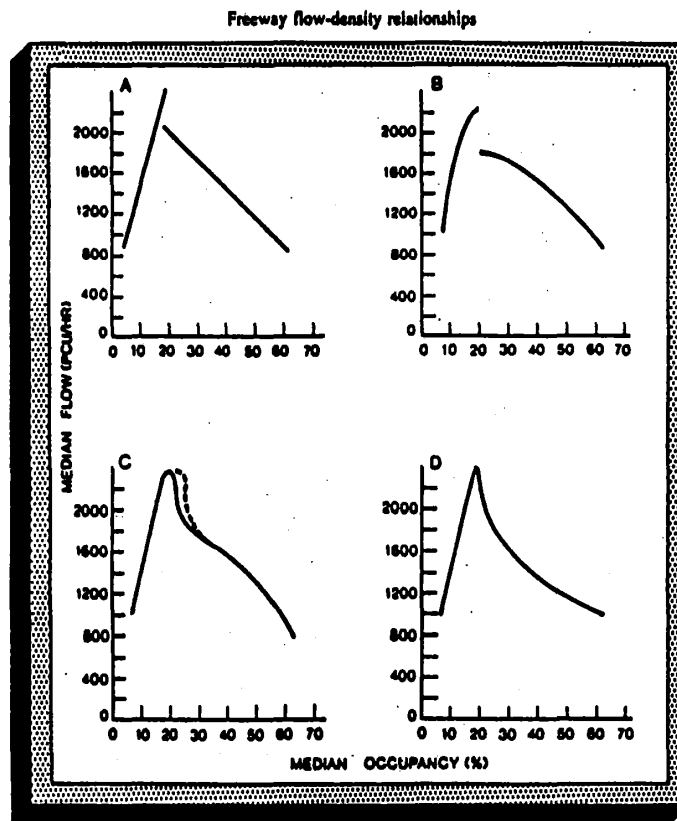


図 1.6: 典型的な基本図の四つのパターン。A は「人」の形。これはある密度領域では交通流率が二価になっているようなものである。B は不連続型、すなわち二価ではない。C は連続で微分可能のタイプ。D は連続で微分不可能のタイプ。参考文献²⁶⁾より抜粋。

になっていることが A の特徴である。B は不連続型で A と違い二価ではない。C は連続で微分可能型。D は連続で微分不可能型である。

それでは、連続で微分不可能な交通流率の振舞いはどのように理解できるのであろうか。Hall らはこの問題にも Catastrophe Theory Model^{27, 65)} という回答を下している。catastrophe 理論を交通に応用したのは Hall が初めてではなくその前に Dendrinos が 1978 年に、¹⁸⁾ Navin が 1986 年に⁶⁶⁾ それぞれ catastrophe 理論を交通流に応用している。Hall の Catastrophe Theory Model の本質は、交通流の特性を表す密度-交通流率の関係を catastrophe 理論⁸²⁾ のなかでも cusp catastrophe をもちいて理解しようというものである。

cusp catastrophe は状態を表す変数 x と二つのコントロールパラメータ u, v であらわされ、 x は時間に対し時々離散的な振舞いをし、 u, v は時間に対して連続な振舞いをするような量である。この cusp catastrophe をしめすような系はポテンシャル $V(x)$

$$V(x) = x^4 + ux^2 + vx \quad (1.4)$$

を最小にする状態で記述される。すなわちこのポテンシャルの平衡曲面 $dV/dx = 0$ 上に変数の値をとる。この平衡曲面が x, u, v で張られる三次元空間に埋め込まれた cusp catastrophe 多様体

$$4x^3 + 2ux + v = 0 \quad (1.5)$$

を定義する。この多様体を決める三次方程式が一つの実根を持つためには三次方程式の判別式

$$D = 8u^3 + 27v^2 \quad (1.6)$$

が正でなければならないことはすぐにわかる。Hall らはこの状態をあらわす変数 x として平均速度をとり、二つのコントロールパラメータとして交通流率を u 、占有率を v ととった。この三つの量が cusp catastrophe 多様体上にあると仮定すれば、このとき平均速度がコントロールパラメータに対し一意に決まるためには、コントロールパラメータの空間にとり得ない領域ができ、それが基本図での連続ではあるが微分不可能な関数という振舞いにつながるとしている。(概念図 1.7) また、観測されたデータを実際にプロットしたのが図 1.8 である。これは交通流率と占有率、平均速度の三次元プロットでありオンタリオの高速道路のデータである。またこのデータのそれぞれの平面への写像がどのようになるか示したのが図 1.3.1 である。これは図 1.8 の直接の射影ではないが外形は同じである。

1.3.2 軌跡

ここでは交通流の時空間の軌跡の観測について紹介しよう。このような観測は渋滞流で発生する粗密波の伝播を調べたり、直接渋滞相の発生を調べたりするのにもちいられる。また、シミュレーションや交通流のモデルでの車の振舞いと実際の交通流の振舞いを調べるのにももちいられる。このような時空間の車の軌跡の観測例を一つ紹介しよう。図 1.10 はアメリカの高速道路で空中からとられたものである。この図で横軸が時間、縦軸が空間である。黒い線の一本一本が車一台一台の軌跡を表す。この図では車の粗密波の一つの密の波が発生し、それが車の進行方向とは逆に進んでいく様子が観測されている。このような粗密波が車の進行方向とは逆に進む現象は一般的なものであり、この観測結果だけのものではない。^{45, 46)} また、この粗密波の中でも車の速度がいろいろあることが見てとれ、粗密波が発生して消えるまでの間に車が動いているものや止まっているものがあるのがわかる。また粗密波の内部に車が入る前には、ある速度で走っていた車がその速度をおとしている領域がみられ、その領域を抜けた後で粗密波のさらに速度が遅い領域に入っているという二段階の減速過程が見られる。粗密波から抜け出るところではこのような段階を踏んだ加速は見られずいきなり車が抜け出しているのがわかる。

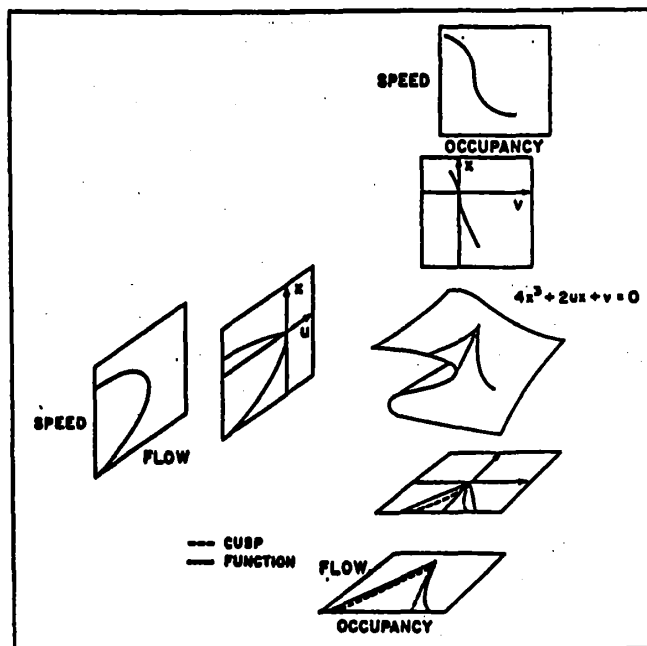


図 1.7: カタストロフ理論モデルによる概念図。折れ畳まれた曲面がカタストロフ多様体。占有率-交通流率、占有率-平均速度、平均速度-交通流率のそれぞれの曲線はこの曲面上にあると考えられるデータの射影で表される。これは参考文献⁹⁵⁾からの抜粋である。

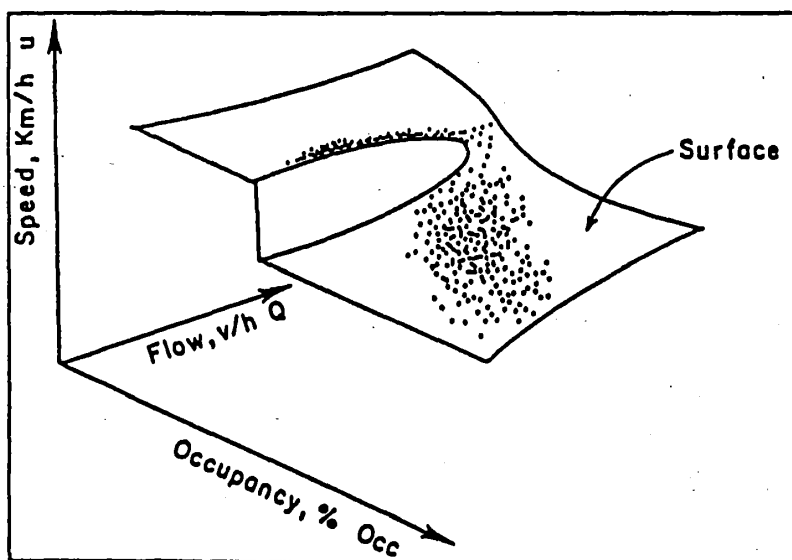


図 1.8: 交通流率と占有率、平均速度の三次元プロット。これはオンタリオの高速道路のデータのプロット。参考文献⁹⁵⁾からの抜粋。

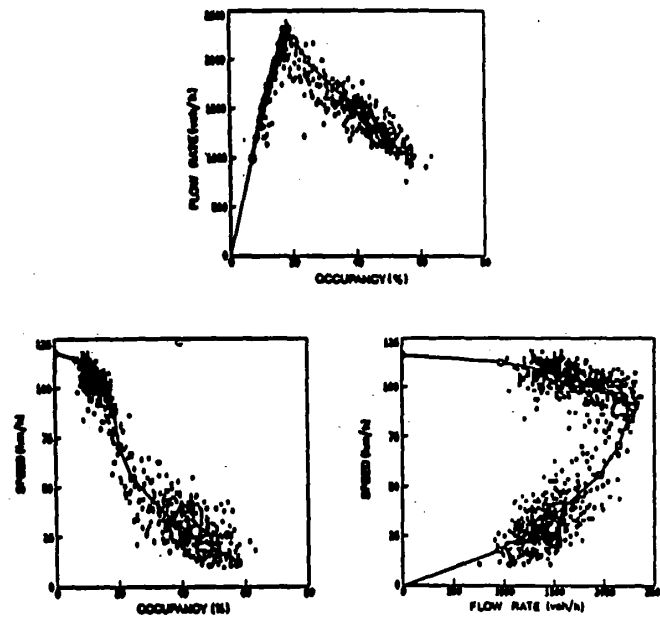


図 1.9: 交通流率と占有率、平均速度のそれぞれの関係。参考文献²⁷⁾より抜粋。

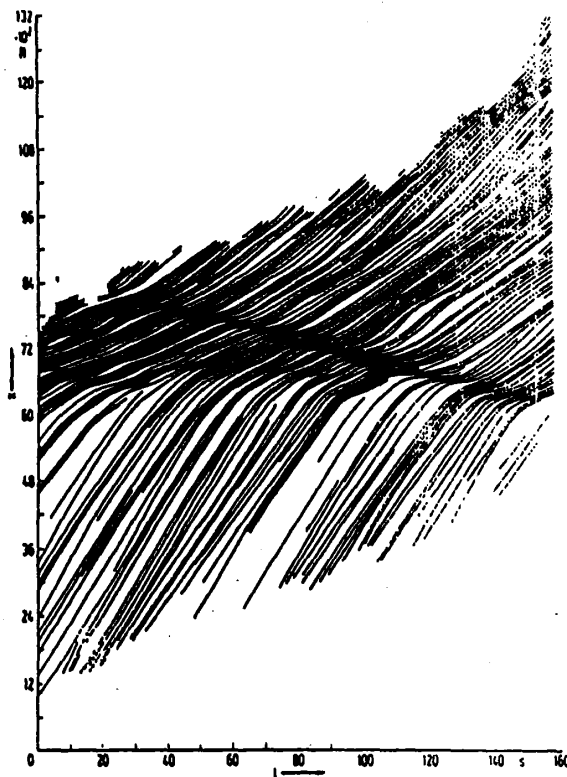


図 1.10: 空中からとった交通流の軌跡。黒い線が一台の車の軌跡を表す。横軸が時間、縦が空間である。渋滞が発生しその渋滞相が後ろに進んでいく様子がみられる。参考文献⁵¹⁾の中の参考文献より抜粋。

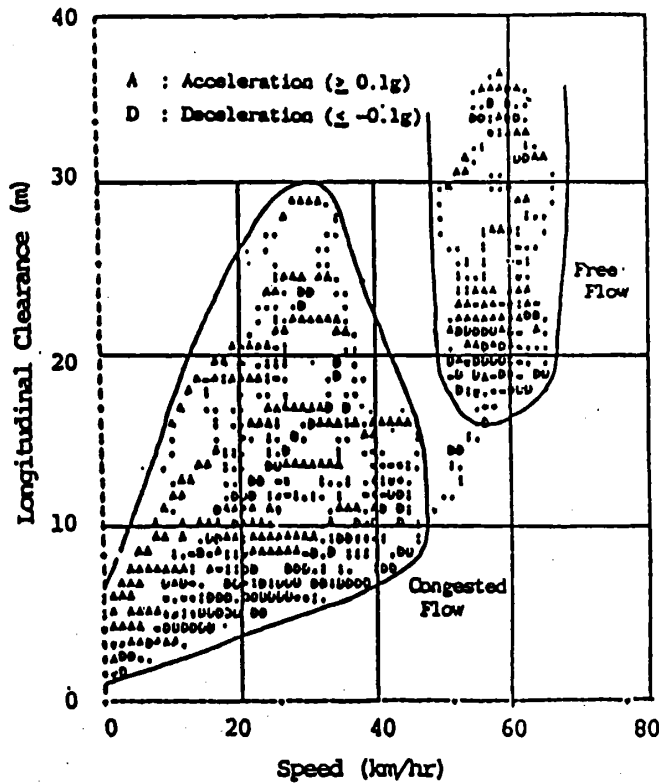


図 1.11: 車の追従挙動を調べた実験のデータ。横軸は速度、縦軸は車間距離である。参考文献⁴⁶⁾より抜粋。

1.3.3 追従挙動

また、車を運転する時、前の車の位置によってどのような振舞いをするかという追従挙動が越らによって調べられている。追従挙動はマイクロな車の運動を直接表し、このマイクロな追従挙動がマクロな現象に大きく影響する。このような追従挙動は注目している車の車間距離とその速度で張られる相空間上の一点で表すことができる。このような相空間における追従挙動の実験データを図 1.11 に示した。これは越らが行なった追従挙動を調べる実験の結果である。^{45, 46)} この図では加速した時の車の相空間での位置を A、減速したときの相空間での位置を D と書いている。この図では渋滞流と自由流の区別がはっきりとしており、ここでも渋滞流と自由流の交通流の特性の違いが現れている。また減速は相空間の車間距離が小さいところに多く集まっており、加速は車間距離の大きいところにあつまっている。これは加速時の方が減速する時よりも車間距離を多くとる傾向があることを示している。⁶⁸⁾

1.3.4 その他

実際の交通流ではこれら以外にもいろいろな量が観測されている。その中でももっとも有名なのが交通流に存在する $1/f$ 揺らぎに関する問題であろう。これは 1976 年に武者らによって最初に発表された。^{57, 58)} この結果だけまとめておくと、高速道路のある地点で観測時間を等分しその区切られた時間内に通過した車の数の揺らぎのパワースペクトルが、高い周波数ではホワイトノイズ的な振舞いをして、低周波数では $1/f$ 的な振舞いをするという結果が得られている。武者らはこの結果を車の局所的な密度がみたす Burgers 方程式⁶⁾を導き解析している。

またこれと関連して交通流のカオス的な振舞いに関する研究もある。しかし、それらは構成したモデルがカオス的な振舞いをするというものや、^{19, 36, 48)} 実際に観測したがはっきりしないという結果におわっているもの¹⁷⁾が多くあり、実際にカオス的な振舞いをしているかどうかはまだ明らかでない。

第 2 章

従来の交通流モデル

交通流に対する理論的なアプローチには、主に三つのものがある。それは、交通流を連続なものとしてあつかうマクロなアプローチ、交通流を構成している車一台一台を個別に取り扱うミクロなアプローチ、それと確率論的な手法をもちいたアプローチである。この章ではそれぞれのアプローチを解説する。

2.1 マクロなアプローチ

2.1.1 流体モデル

交通流に対する理論的取り扱いの一つにマクロな立場から交通流をとらえる流体力学的なものがある。このマクロな立場の流体力学的取り扱いの中でも二つの主要なものがあり、一つは kinematic wave の理論、^{50, 55, 56, 75)} もう一つは kinematic wave よりもさらに高次の項を採り入れた交通流を圧縮性の流体として扱う理論である。^{8, 25, 42, 43, 48)}

kinematic wave の理論は Lighthill と Whitham によって 1955 年に確立された。^{55, 56)} またそれとは独立に Richards によって 1956 年に交通流のモデルとして考えられた。⁷⁵⁾ これは流量 q と密度 k がそれぞれの場所 x で関数関係 $q = f(k(x))$ として与えられていれば、どのような次元の流れの問題にも適用できる理論である。したがって Lighthill と Whitham は kinematic wave の理論を洪水の流れと隘路における交通の流れに対して応用している。また Richards は kinematic wave とは呼ばなかったが、交通のモデルとしておなじものを提案している。kinematic wave の理論の基礎となるのは流量 q と密度 k に関する連続の方程式のみであり、kinematic wave の性質は連続の方程式から決まってしまう。この波が “kinematic” と呼ばれる理由は、通常の古典的な波と違い Newton の運動方程式を使わないところにある。Newton の運動方程式をもちいる波は “dynamic” であり、この次に考える交通流を圧縮性の流体としてとり扱うモデルは “dynamic” wave の理論であるといえる。また kinematic wave の理論はその理論的な取り扱いの方法からショックフロントの運動を記述する理論として知られている。

kinematic wave の理論は次のような方程式が基本となる。もちいるのは局所的な密度と交通流率、連続の方程式である。局所的な車の密度を $k(x, t)$ 、定常状態の局所的な交通流率を $q(x, k)$ とすると連続の方程式

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

から、

$$\frac{\partial k}{\partial t} + c(x, k) \frac{\partial k}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

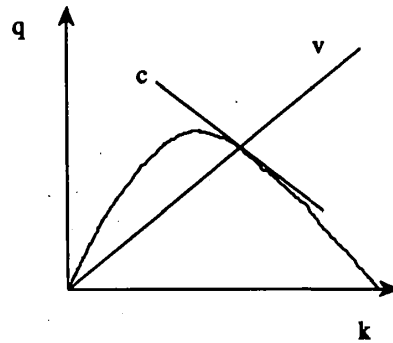


図 2.1: 基本図での kinematic wave の速度と交通流の平均速度の関係。ここに示した基本図は概念的なものである。kinematic wave の速度を c 、平均速度を v とかいた。

となる。ただし $c(x, k) = (\partial q / \partial k)_{x \text{ const.}}$ とした。さらに局所的な交通流率は定常状態では局所的な平均速度 $v(k)$ をもちいて $q = vk$ とかくことができる。この時

$$c(x, k) = v + k \frac{dv}{dk} \quad (2.3)$$

である。ここまでで非線型な波動方程式 (2.2) とその移動速度の関係式 (2.3) が得られた。この波動方程式を満たす波動を kinematic wave と呼ぶ。kinematic wave の理論では流量 q と、密度 k がそれぞれの場所 x で関数関係として与えられていなければならない。したがって実際に交通流に適応するには観測によって知られている基本図の外形をもちいて dv/dk を評価する。基本図で kinematic wave の速度と平均速度がどのように表されるか図 2.1 にしめしておく。また Kinematic Wave の理論から二つの局所的な密度が違う領域 (密度 k_1 と密度 k_2) の境界にできるショックフロントの速度 v_f が、ショックフロントを通りすぎる車の数の保存 $q_2 - (k_2 - k_1)v_f = q_1$ からつぎのように決まる。

$$v_f = \frac{q(k_1) - q(k_2)}{k_1 - k_2} \quad (2.4)$$

最近、この速度の式をもちいた相互作用をするショックフロントの多体系がシミュレーションによって研究されている。⁵⁰⁾

いま見てきたように kinematic wave の議論には流量 q と、密度 k がそれぞれの場所 x で関数関係として与えられていなければならない。このため kinematic wave の理論はマクロな立場から交通流の基本図などを再現しようというものにはなり得ない。したがって交通の種々の現象を再現しようとするには kinematic wave の理論以外の別の理論が必要となる。

いままで考えてきた kinematic wave は比較的簡単なモデルである。これに高次の項を取り入れたのが圧縮性の流体で交通を記述するモデルでありよく知られているのが Payne モデルである。⁷⁰⁾ また Payne のモデル以前にも次のような方程式で表される流体力学的モデルが Greenberg によって提案されている。²⁵⁾

$$\text{連続の方程式} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial (vk)}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{c^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (2.6)$$

c は平均速度の分布の幅を表すような正のパラメーターである。このモデルでは車の密度、平均速度との

関係を厳密に計算することができる。運動方程式と連続の方程式から、最大の車の密度を k_j とすれば

$$v = c \ln \frac{k_j}{k} \quad (2.7)$$

が平均速度の表式として得られる。この平均速度の解析的な表式をもちいて実際の交通流との比較がなされている。^{21, 22)} またこの Greenberg の流体力学的なモデルから計算された平均速度はあとで紹介するミクロな追従モデルから計算される平均速度と一致することが知られており、そのミクロなモデルからパラメーター c の意味などが研究されている。²²⁾

これは kinematic wave の議論とは違い、Newton の運動方程式をもちいるので dynamic wave の理論である。この理論よりすこし後で提案された Payne モデルは次のような方程式で記述される。局所的な密度を $k(x, t)$ 、局所的な速度を $v(x, t)$ 、平衡状態の速度を $\tilde{v}(k)$ とすると

$$\text{連続の方程式} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(vk)}{\partial x} = 0 \quad (2.8)$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tilde{v} - v}{T} - \frac{\nu}{T} \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial x} \quad (2.9)$$

が基本となる。ここで T は速度の緩和時間を表し、右辺の第二項は交通流の局所的な圧力を示す項である。これは一次元の圧縮性流体に対する Navier-Stokes 方程式

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial p}{\partial x} + X \quad (2.10)$$

で粘性を表す右辺第一項をおとし、内力の効果を表す X を速度の緩和の項に置き換え、局所的な圧力 p を局所的な密度で表されたものに置き換えたものである。Payne は交通流の圧力を表す項の係数 ν を次のようにとった。

$$\nu = -\frac{1}{2} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial k} \quad (2.11)$$

式 (2.8)、(2.9)、(2.11) を連立させたものが Payne の交通流のモデルである。

また Navier-Stokes 方程式にあつて Payne のもので考慮しなかった粘性の項を採り入れた交通流のモデルもある。Payne のモデルでは速度の二階の空間微分が入っていなかったために、隘路のある状況化のシミュレーションなどでは相転移と高密度での交通流とを記述することが困難であった。⁴⁸⁾ この困難は速度の二階の空間微分の項を方程式に入れることで解決された。この二階の空間微分を含んだモデルは次のような方程式で表される。^{42, 43, 48)}

$$\text{連続の式} \quad \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(vk)}{\partial x} = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{運動方程式} \quad \frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tilde{v} - v}{T} - \frac{c_0^2}{k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{1}{k} \eta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad (2.13)$$

ここでは局所的な車の密度 $k(x, t)$ と局所的な平均速度 $v(x, t)$ 、局所的な平衡に達した時の平均速度 $\tilde{v}(\rho)$ 、速度の緩和時間 T を使って書いた。これは Payne のモデルによく似ているが、大きく違うのは Navier-Stokes 方程式の粘性項をそのまま残しているところである。また圧力の項が Payne のものと少し形が違い、パラメーター c_0^2 を持ちいている。これはいわゆる交通流の温度を表すパラメータであり、車の速度の分布の幅の二乗平均を表す。このモデルに対しては安定性が調べられていて、低密度で安定であった平衡解が高密度で不安定になることが示されている。⁴⁸⁾ また不安定化した後では車が一樣な交通流から密度の低い領域と密度の高い領域にわかれ、高密度の方が負の群速度を持って移動する、つまり渋滞相が負の群速度で移動するというような実際の交通流で観測されているような渋滞ができるという数値計算の結果もある。^{42, 43)} しかし、このモデルでも実際の交通流をマクロなレベルで再現するという目的はなく、観測で知られている基本図から平均速度の平衡形 $\tilde{v}(\rho)$ の関数形を仮定して調べられている。

また武者らは、交通流に存在している $1/f$ 揺らぎを解析するのに、流量と速度にある関数の仮定において連続の方程式から Burgers 方程式に変形して、その Burgers 方程式をもちいて交通流の解析を行なっている。^{57, 58)}

これらの例からわかるように流体力学的な交通流のモデルは、一般に基本図というマクロで定常な量からダイナミックな記述を行なうというモデルである。このとき観測されているマクロな基本図から平均速度が密度によってどのように表されるかという関数形を仮定して解析される。したがってマクロな流体力学的モデルは実際に観測されている基本図をもちいた現象論であるといえることができる。この現象論でもいろいろな交通流の現象を研究することができるが、実際の交通流を基本図も含めて再現するようなモデルとしては不適當である。このような実際の交通流を基本図も含めて再現するようなモデル化には車を個別に取り扱いその間の相互差用を考えることが重要である。つぎの節ではそのようなモデルの解説を行なう。

2.2 ミクロなアプローチ

2.2.1 追従モデル

ここで、もう一つの交通流のモデルの主流である追従モデルを考えよう。^{11, 22, 23, 29, 44, 67, 68, 72, 74)} 追従モデルは、典型的なミクロな立場からの交通流のモデルであり、車を一台一台取り扱いその運動を連立微分方程式で取り扱うところに特徴がある。これは流体力学的な取り扱いをするマクロなモデルではなく、車に働く力を考えてミクロなモデル化を行ない、実際の交通流を再現しようという目的で研究されている。もっとも初期のころの追従モデルに関する仕事は Pipes のものである。⁷²⁾ Pipes は車の運動を現象論的に考え、それが満たすべき方程式を導いた。これを Pipes にしたがって考えよう。まず次元の追い越しがないような状況で、車の理想的な車間距離というものを考える。いま k 番目の車が速度 v_k で走っているとしよう。理想的な車間距離はその速度で走っている時にある時間 T で車が進める距離と車が止まっているとき運転手が自然に取る車間距離 b の和で表される。つまり k 番目の車の位置を x_k とし、その前の車の位置を x_{k-1} 、車の大きさを L_k とすると

$$x_{k-1} - x_k = b + T v_k + L_k \quad (2.14)$$

である。この時間微分を取れば、車の運動を記述する微分方程式が得られ、

$$\dot{v}_k = \frac{1}{T} (v_{k-1} - v_k) \quad (2.15)$$

が車の運動を記述する方程式である。これは物理的な運動方程式

$$m \frac{d^2 x_k}{dt^2} = \lambda \left(\frac{dx_{k-1}}{dt} - \frac{dx_k}{dt} \right) \quad (2.16)$$

と同等である。これを車の数だけ連立させて車の運動方程式が得られる。Pipes はこのモデルで一列に並んだ車が走り出したり、止まる様子を解析している。また、同じようなモデル化は Reuschel によっても行われている。⁷⁴⁾ Pipes の方程式 (2.16) の安定性を調べよう。 $x_k = f_k e^{i\omega t}$ を解として代入するとつぎの式が得られる。

$$\frac{i\omega m}{\lambda} f_k = f_{k-1} - f_k \quad (2.17)$$

一番先頭の車の振幅 f_0 を 1 とすると、 k 番目の車の振幅 f_k とその大きさはつぎのようになる。

$$f_k = \left(1 + \frac{i\omega m}{\lambda} \right)^{-k} \quad (2.18)$$

$$|f_k| = \left(1 + \frac{\omega^2 m^2}{\lambda^2} \right)^{-\frac{k}{2}} \quad (2.19)$$

これからどのモードに対しても振幅はつねに1以下になるので、系はどのようなときも安定である。このためにそれぞれの車がとる戦略で感受率 λ をどんどん大きくするというものが可能になる。しかし実際の交通流では、車は前の車の非常にわずかな速度の変化に対して反応して速度を変えるという戦略をとっているのではない。このような非現実的な振る舞いに制限を付けるために、運転手の加速時の時間的な遅れをとり入れたモデルが Chandler らによって提案された。¹⁰⁾ これは Pipes のものに時間的遅れを導入した次のような方程式が基本となる。

$$m \frac{d^2 x_k(t)}{dt^2} = \lambda \left(\frac{dx_{k-1}(t-\Delta)}{dt} - \frac{dx_k(t-\Delta)}{dt} \right) \quad (2.20)$$

同じようにこのモデルの安定性を考えるために $x_k = f_k e^{i\omega t}$ を式 (2.20) に代入しよう。そして先頭の車の振幅 f_0 を1とすれば、 k 番目の車の振幅 f_k の大きさは

$$|f_k| = \left(1 + \frac{\omega^2 m^2}{\lambda^2} - \frac{2\omega m}{\lambda} \sin \Delta\omega \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (2.21)$$

である。これから $\frac{m\omega}{\lambda} > 2 \sin \Delta\omega$ の時安定であることがわかる。この安定になるための条件が感受率 λ に制限をあたえモデルの非現実的な振る舞いを押さえる。

これらのモデルはラプラス変換によって解くことができる。¹¹⁾ ここでは解を求めることはやめてラプラス変換をもちいて解の性質を考えよう。Pipes のモデルより Chandler のモデルの方が一般的なのでこちを考える。まず、ラプラス変換 \mathcal{L} とその逆変換 \mathcal{L}^{-1} を次で定義する。

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty e^{-s\tau} d\tau \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}^{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{s\tau} ds \quad (2.23)$$

式 (2.20) で変数変換 $t = \Delta\tau$ をおこない、 $c = \Delta\lambda/m$ とおく。また初期条件としてすべての車に対して $t \leq 0$ の時 $x_k(t) = x_k(0)$, $\dot{x}_k(t) = u$ をとる。このとき $z_k(t) = x_k(t) - ut - x_k(0)$ という変数に移ると方程式 (2.20) はつぎのようになる。

$$\frac{d^2 z_k(\tau)}{d\tau^2} = \left(\frac{dz_{k-1}(\tau-1)}{d\tau} - \frac{dz_k(\tau-1)}{d\tau} \right) \quad (2.24)$$

また、初期条件はすべての k にたいして $\tau \leq 0$ のとき $z_k(\tau) = 0$, $\dot{z}_k(\tau) = 0$ である。これにラプラス変換を行えばつぎの方程式が得られる。

$$s^2 \mathcal{L}[z_k(\tau)] - sz_k(0) - \dot{z}_k(0) = c \left((z_{k-1}(-1) + se^{-s} \mathcal{L}[z_{k-1}] + \mathcal{L}[z_{k-1}(\tau)]) - (z_k(-1) + se^{-s} \mathcal{L}[z_k] + \mathcal{L}[z_k(\tau)]) \right) \quad (2.25)$$

そして初期条件を代入して、得られた k に関する漸化式をとくと

$$Z_k(s) = \left[c(c + se^s)^{-1} \right]^k Z_0(s) \quad (2.26)$$

が得られる。ただし $z_k(\tau)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[z_k(\tau)]$ を $Z_k(s)$ とした。これから k 番目の車の位置はつぎのようにかける。

$$x_k(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\left[c(c + se^s)^{-1} \right]^k Z_0(s) \right] + ut + x_k(0) \quad (2.27)$$

これは形式的な解であるが、この解の形式から追従モデルには追従される車の存在が必要であることがわかる。この追従される車が存在しなければならないということが追従モデルの大きな特徴である。

この二つのモデルは、ともに速度の変化が相対速度にしかよらないモデルであった。このために例えば車間距離が1km離れていても前の車が少し速度を変更すればその後ろの車が加速、減速をするというおかしな振舞いをする。実際の交通流ではこんなことはおきない。このような点を改良したのがKometaniら⁴⁴⁾やGazisらのモデル²³⁾でありNewellのモデル⁶⁷⁾である。KometaniらのモデルはChandlerらの追従モデルに前の車の速度の項をつけたしたようなモデルである。

Gazisらのモデルはつぎのような連立方程式で記述される。²³⁾

$$\frac{d^2 x_k(t+\Delta)}{dt^2} = \lambda(x_k, x_{k-1}) \left(\frac{dx_{k-1}(t)}{dt} - \frac{dx_k(t)}{dt} \right) \quad (2.28)$$

$$\text{ただし } \lambda(x_k, x_{k-1}) = \frac{a \dot{x}_k^m(t+\Delta)}{(x_{k-1}(t) - x_k(t))^l} \quad (2.29)$$

このようにGazisらは感受率を相対速度と相対距離に依存するようにして、現実的な振舞いを再現しようとした。このモデルは実は定常流に対しては厳密に積分することができて、定常流での平均速度 u とその平均車間 s をもちいれば、その解は

$$f_m(u) = c f_l(s) + c' \quad (2.30)$$

となる。 c, c' は定数であり、

$$f_p(x) = x^{1-p} \quad \text{for } p \neq 1 \quad (2.31)$$

$$= \ln x \quad \text{for } p = 1 \quad (2.32)$$

という関数 $f_p(x)$ をもちいた。これから l, m を決めれば基本図を計算することができる。ここではこの基本図の外形を示さないが、式 (2.32) から交通流率はある一つの関数で表されることがわかる。またこの特別な場合として $m=0, l=1$ の場合を考えるとこの解はマクロなモデルであるGreenbergのモデルから得られた解と一致する。²²⁾ Gazisらのこのモデルは現在でも観測データをフィッティングするのに良くもちいられている。

また同時期にNewellもこのようなおかしな振舞いを改良したモデルを提案している。⁶⁷⁾ これは車間距離から速度が決まるという基本的な精神は同じであるが、ある程度車間が大きくなると速度は一定の値に近づくとところがPipesやChandlerのモデルとは違う。このモデルでは j 番めの車の速度 $v_j(t)$ が次のような非線形な関係で表される。

$$v_j(t) = V_j - V_j \exp(-\lambda_j V_j^{-1} [x_{j-1}(t-\Delta) - x_j(t-\Delta) - d_j]) \quad (2.33)$$

V_j は車間距離が十分に大きいときの速度であり、 λ_j, d_j はパラメーターである。また加速の時間的遅れを Δ と書いた。これは微分をすればわかるように、Candlerのモデルで感受率 λ を車別に

$$\lambda_j \exp(-\lambda_j V_j^{-1} (x_{j-1}(t-\Delta) - x_j(t-\Delta) - d_j)) \quad (2.34)$$

とかえた追従モデルである。Newellはこの方程式をもちいて追従挙動やショックウェーブについて調べている。

GazisやNewellらのモデルぐらいまでが古典的な追従モデルである。これ以降は追従モデルの基本的な精神はあまり変わっておらず、すこしづつ状況に合わせた変更が行なわれている。⁴¹⁾

最近、この追従モデルの新しいタイプのものが坂東らによって提案された。³⁾ これは車一台一台を連立微分方程式として取り扱うのは従来のモデルと同じである。ただ追従挙動が実際の交通流に対する観測や実験結果を元にして非線形な関数でモデル化されている。このような非線形な関数をもちいたモデル化はGazisらやNewellによっても行なわれているがそれらは本質的に速度が車間距離や相対速度で決まるとい

うモデルで本質的には一階の微分方程式であった。坂東らが行なったのは、加速度が車間距離と現在の速度の非線形な関数で記述されるというモデル化で、これは時間に関する二階の微分方程式である。このために以前からモデルに導入されていた加速に関する時間遅れの効果を手でいれなくてもよいと坂東らは主張している。

このモデルは次のような微分方程式を連立させたもので記述されている。

$$\ddot{x}_k(t) = \lambda \{V(x_{k+1}(t) - x_k(t)) - \dot{x}_k(t)\} \quad (2.35)$$

$$\text{ただし } V(x) = \tanh(x-2) + \tanh 2 \quad (2.36)$$

この方程式の定常流に対する解はすぐに計算することができる。系を周期的な長さ L の道路としてその中に車が N 台あるとすると定常流に対しては

$$x_{k+1}(t) - x_k(t) = \frac{L}{N} \quad (2.37)$$

であり、加速度は0であるから解として

$$x_k(t) = aV\left(\frac{L}{N}\right)t + \frac{L}{N}k \quad (2.38)$$

がえられる。ここでは初期配置は等間隔にならんでいとした。これからの揺らぎを $y_k(t)$ とし、これが小さいと仮定してその一次の範囲では運動方程式は

$$\ddot{y}_k(t) = aV'\left(\frac{L}{N}\right)(y_{k+1}(t) - y_k(t)) - a\dot{y}_k(t) \quad (2.39)$$

となる。これに安定性の解析を行なおう。そのため $y_k(t) = f_k e^{i\omega t}$ を代入し、整理すれば

$$f_k = \left[\frac{aV'(L/N)}{aV'(L/N) - \omega^2 + i\omega a} \right] f_{k+1} \quad (2.40)$$

がえられる。この係数の絶対値が1より小さいとき安定である。係数の絶対値を計算し安定な条件を計算すると、

$$\frac{\omega^2}{a^2} - 2\frac{V'(L/N)}{a} + 1 > 0 \quad (2.41)$$

が安定条件である。 $\omega \rightarrow 0$ のときを考えると

$$1 > 2\frac{V'(L/N)}{a} \quad (2.42)$$

のとき安定である。系の密度 ρ は N/L で定義されるので安定な条件は

$$1 > 2\frac{V'(1/\rho)}{a} \quad (2.43)$$

である。これは重要な結果である。この式は安定性が車の密度によって変化することを示している。具体的な $V(x)$ の形を代入すれば a の値が1より大きい時には密度が大きくなってくると等間隔で一定速度で動いているような交通流は揺らぎに対して不安定になることがわかる。この不安定化がおこったあとには定常であった交通流に渋滞流と自由流の粗密波が発生することが数値的な計算から確かめられている。また追従挙動も計算されていて、相空間でリミットサイクルを描くことがわかっている。³⁾

このように追従モデルでは車の追従挙動を単一の運動方程式で記述しようとする。そしてその結果得られた基本図などはたとえば Gazis らのモデルでは単一の関数で表されている。だが実際の交通流の観測では基本図を単一の関数で表すことができないことが知られており、実際の基本図では渋滞状態と非渋滞状

態は不連続につながっているという研究もある。^{9, 20, 21, 45, 46)} また車は低密度では前の車を見て走っているわけではなく、単一の追従挙動で記述できると考えるもの少し変である。また実際にモデルで交通流を研究する際に、シミュレーションを行なおうとしてもこれらの追従モデルではすぐに車同士が衝突してしまう。このために、追従モデルの研究で行なわれているシミュレーションは一定間隔、一定速度で走らせた時、先頭の車の揺らぎがどのように後ろの車に伝わっていくかとか、その安定性をしらべたものが多く、車の個性を反映したランダムネスの効果などを調べることは難しい。このような事情から追従モデルはミクロな立場からのモデルとしては歴史もあるが逆に現在の計算機シミュレーションを行ないにくいモデルであるといえる。

2.2.2 セルオートマトンモデル

ここでは、セルオートマトン^{83, 84)}をもちいた交通のモデルを考えよう。セルオートマトンとは数学や情報科学でよくもちいられる抽象的なオブジェクトであり、これは有限の離散内部状態を持つセルの集合と、その状態の離散的な時間発展ルールで構成される。各々のセルの状態の更新は、周囲のセルの状態と自分自身の状態を入力として離散時間の時間発展ルールにしたがい、すべてのセルで同時に行なわれる。このようなセルオートマトンを物理学に応用するときは、しばしばセルを格子点とみなし、その格子点の物理的状态を離散状態に対応させて物理的な時間発展をセルの時間発展ルールで記述する。

最近、このようなセルオートマトンをもちいたモデルで非常によく現実の交通流を再現しているモデルが Nagel らによって提案され調べられている。^{62, 63, 64, 77)} このモデルは多状態多近傍のセルオートマトンとみなすことができ、プロトタイプモデルは一次元の格子点上で記述され、格子の状態はその車の速度 v と車が存在しないことを表す \emptyset で表される。この状態更新のルールはつぎのようなルールで記述される。

加速 もし車の速度 v が最大速度 v_{max} より小さかったら、かつ今の速度 v で進む距離に 1 格子点分を加えた距離に他の車がいなかったら、速度を $v+1$ にする。

減速 車が格子点 i にいてその前の車が格子点 $i+j$ にいるとき、もし $j \leq v$ なら格子点 i にいる車の速度を $j-1$ にする。

ランダムブレーキ 確率 p で車の速度が 0 でないとき速度を 1 小さくする。

車の運動 速度 v の車はその位置を v 進める。

Nagel らはこのルールでモデルのシミュレーションを閉じた系や開いた系で行なっている。Nagel らが行なったシミュレーションの結果の一部を図 2.2 と図 2.3 に示す。これらは実際に観測されているものを非常に良く再現しているように見える。また Nagel らはこの基本図の計算から最大の交通流率の値とその位置が系の大きさによって変化することを見つけている。これは周期的な系に対する結果である。また開いた系に対して、ランダムな状態更新をおこない、Asymmetric Simple-Exclusion Process (ASEP) の厳密解^{14, 15, 78)}との関係を調べている。

これら以外にも自己組織化臨界現象との関連も調べている。⁶³⁾ その研究では上のプロトタイプモデルではなく、プロトタイプモデルからランダムな減速を取り除いた閉じた系のモデルでシミュレーションを行なっている。このモデルでは定常状態に達することがわかっており、定常状態では系は車の配置をその速度を保ったまま見かけ上シフトしているように見えるが、実際は車の速度が変化しているような時間発展を示す。Nagel らはランダムな初期配置、ランダムな初期速度からこのような定常状態への緩和時間をしらべており、それがあある密度で系の大きさとともに発散していることを発見している。また定常状態に達している状態に車の速度を一つだけ小さくするような擾乱を入れた時の定常状態に戻る時間も同じように系の大きさとともに発散していくことを発見している。これはそのような振舞いをする系の状態が特殊なものであることから Nagel らは Bak らの self-organized criticality^{1, 2)} に属するものであるとってい

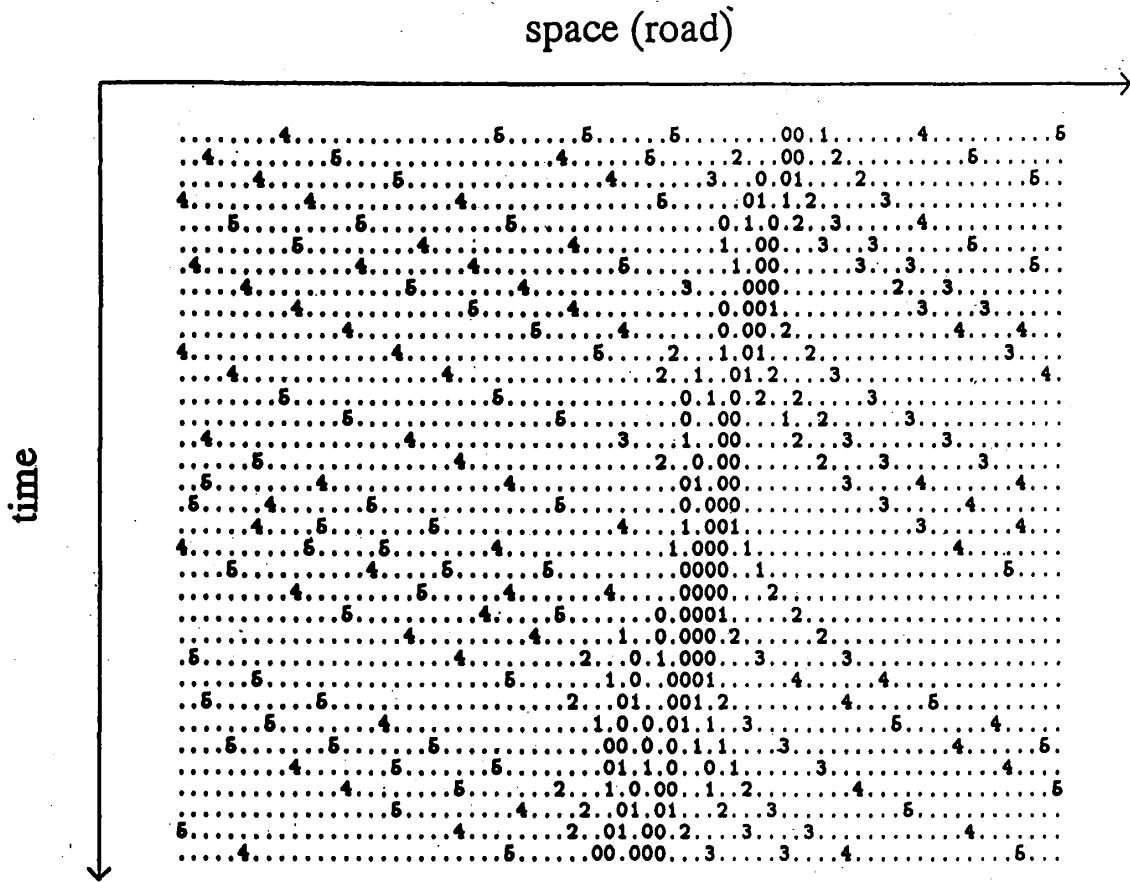


図 2.2: Nagel らのセルオートマトンによるトラジェクトリのシミュレーションの結果。車の密度は 0.1 で、. は車がないサイトを示している。また数字は車が持っている速度である。

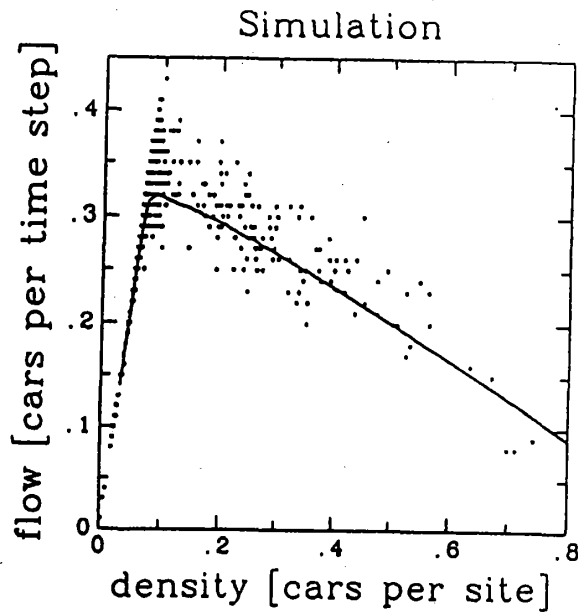


図 2.3: Nagel らのセルオートマトンモデルによる基本図の計算結果。系の大きさ 10^4 で、点は 100 時間の平均、線は 10^6 時間の平均を示す。

る。ただし今の系では密度を臨界点上にしておく必要があり、パラメーターの調整をする必要のない厳密な意味での self-organized criticality とは違う。

また最近プロトタイプモデルをもちいて “edge of chaos⁴⁹⁾” との関連も調べている。⁶⁴⁾ そこでは、転移点付近での自発的な渋滞相の発生と消滅に関して渋滞相の life-time や、実際の交通流に関連した travel-time などが調べられている。これらの量が転移点の近くでべき乗則にしたがっていたり (life-time)、最大値をとっていたり (travel-time) する。だがこれらの量が特徴的な振舞いをする密度が一致していないことから、Nagel らはこれが本当の臨界現象ではないと結論している。そして、これは自発的に渋滞が発生する確率が 0 の極限で本当の臨界現象になるとしている。また、ランダムに車の速度を小さくする効果の系への影響の与え方が、転移点より下の密度ではなく、また転移点より大きいところでは影響は有限に残るが系の統計的性質は変えない。そしてちょうど転移点で有限に効果が残り得る。このような状況がちょうどセルオートマトンでいうところのクラス IV に対応していて、このモデルの転移点付近では Langton のいう “edge of chaos” であると Nagel らは結論している。

2.3 確率論的なアプローチ

歴史的には交通流に対する確率論的なアプローチは昔から行なわれており、主にもちいられていたのは待ち行列 (queue) をもちいた理論である。待ち行列とはその名のとおり、一人一人やってくる客に対して番号をふり、その客が窓口に着いた時間と窓口で待つ時間、窓口でサービスを受ける時間を確率論的に取り扱う理論である。これはその理論の性格上比較的混雑した交通流に対して適用され発展してきた。また、最近はこの待ち行列をネットワークにした系を交通流に応用した研究も行なわれている。⁷⁹⁾ このような研究は交通流のミクロな現象の理解という目的ではなく、例えば都市交通網や高速道路ネットワークなどのマクロな交通流の理解を目的として行なわれているのでここではこれ以上取り扱わない。

また、交通流に関するモデルで確率的な取り扱いに関連して Boltzmann 方程式をもちいたアプローチもある。これは Prigogine によって始められ、⁷³⁾ ミクロなモデルとマクロなモデルの間をつなぐ取り扱いである。基本となるのは分布関数 $f(x, v, t)$ である。例えば、 $f(x, v, t) dx dv$ は道路の小さな領域 dx に速度が dv の幅で時刻 t に存在する車の数を表す。これによって車の密度 $k(x, t)$ と平均速度 $\bar{v}(x, t)$ 、また交通流率 $q(x, t)$ は

$$k(x, t) = \int_0^{\infty} f(x, v, t) dv \quad q(x, t) \equiv k(x, t) \bar{v}(x, t) = \int_0^{\infty} v f(x, v, t) dv \quad (2.44)$$

とかかれる。Prigogine はこの分布関数の時間に関する全微分が速度の緩和と車同士の相互作用を表す衝突で表されるとした。分布関数の全微分は $df/dt = \partial f/\partial t + v \partial f/\partial x$ であるから満たすべき方程式は次のようにかける。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel.} + \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll.} \quad (2.45)$$

ここで右辺第一項は速度の緩和過程を表し、第二項は衝突項を表す。

右辺の緩和項から考えよう。Prigogine は緩和項に対して次のような形を仮定した。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{rel.} = -\frac{f - f_0}{T} \quad (2.46)$$

f_0 は車の密度が小さい極限での分布、つまり自由に走れるときの速度の分布を表す。したがってこの項は理想的な速度へ緩和時間 T で指数関数的に分布関数が緩和することを表す。緩和時間 T にはいろいろな機構が寄与する。たとえば、車が理想的な分布である位置から理想的な分布の別の位置に移るのに必要な時間 T_1 や、追い越しでの緩和時間 T_2 である。この追い越しの緩和時間はもし車が追い抜かなければ ∞

で、常に追い抜くならその緩和時間は 0 である。追い抜く確率 p をもちいればこの緩和時間 T_2 はつぎのようにかける。

$$T_2 = \tau \frac{1-p}{p} \quad (2.47)$$

τ は $p = 1/2$ での緩和時間である。速度の緩和の項に現れる緩和時間はいろいろな緩和時間の中でももっとも大きいものに支配され、Prigogine は T_2 の方を緩和時間としてもちいた。⁷³⁾ これは道路で車が自分の好みの速度に落ちつく方が、追い越しの緩和よりも速い状況を考えていることになり、快適な道路状況にあることを表す。したがって緩和項としてはつぎのようなものもちいる。

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{rel.} = -\frac{(f-f_0)p}{\tau(1-p)} \quad (2.48)$$

緩和項は 1 台の車がどのように緩和するかという項で、まだ車同士の相互作用の項は入っていない。車同士の相互作用を衝突項として取り入れよう。車が近づいてきても追い抜いてしまえば車同士の相互作用は無視できる。車が追い抜かずにいれば相互作用の効果が無視できない。この効果を考えよう。速度 v_i をもつ車に対してこの項は衝突する確率 p を使ってつぎのようにかける。

$$\left(\frac{\partial f(x, v_i, t)}{\partial t}\right)_{coll.} = \sum_j \left(\Gamma_{ij}^{(+)} - \Gamma_{ij}^{(-)}\right) (1-p) \quad (2.49)$$

$\Gamma_{ij}^{(+)} dv dx dt$ は時空領域 $(x, x+dx) \otimes (t, t+dt)$ の分布関数で速度が (v_i, v_i+dv) の区間の車が速度 v_j を持つ車と衝突をする事により増えた分を表し、 $\Gamma_{ij}^{(-)} dv dx dt$ は減った分を表す。

$\Gamma_{ij}^{(-)}$ を考えよう。これは速度 v_i を持つ車がおそい車に追いついて速度を下げるために減る効果を表す項である。追いつくのは相対速度 $v_i - v_j$ が 0 以上の時である。時間間隔が dt であるからこの衝突に関する車は、速度 v_j で走っている車の後ろ $(v_i - v_j)dt$ の区間にいる車である。 v_i を固定して v_j を動かせば結局

$$\int_0^{v_i} f(x, v_j, t)(v_i - v_j) dt dv_j \quad (2.50)$$

の割合で車が衝突に関与する。したがって

$$\Gamma_{ij}^{(-)} dv_i dx dt = f(x, v_i, t) dx dv_i dt \int_0^{v_i} f(x, v_j, t)(v_i - v_j) dt dv_j \quad (2.51)$$

とかける。

おなじように $\Gamma_{ij}^{(+)}$ を考えよう。これははやい車が速度 v_i を持つ車に追いついて増える効果を表す。前とおなじように考えると、衝突に関与する車の割合は

$$\int_{v_i}^{\infty} f(x, v_j, t)(v_j - v_i) dt dv_j \quad (2.52)$$

であり、このため

$$\Gamma_{ij}^{(+)} dv_i dx dt = f(x, v_i, t) dx dv_i dt \int_{v_i}^{\infty} f(x, v_j, t)(v_j - v_i) dt dv_j \quad (2.53)$$

となる。これらをつかって衝突項は

$$\left(\frac{\partial f(x, v_i, t)}{\partial t}\right)_{coll.} = f(x, v_i, t) (\bar{v}(x, t) - v_i) k(x, t)(1-p) \quad (2.54)$$

とかける。結局、分布関数 $f(x, v, t)$ が満たすべき方程式としてつぎの方程式が得られる。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{(f - f_0)p}{\tau(1-p)} + f(\bar{v}(x, t) - v)k(x, t)(1-p) \quad (2.55)$$

この方程式が Prigogine が初めて行った交通流にたいする統計的なアプローチの基本となる式である。

この定常解はすぐに求めることができる。これは左辺を 0 とするとえられ、

$$f(x, v, t) = \frac{f_0(x, v, t)}{1 - \left[\frac{k(x, t)\tau(1-p)^2}{p} \right] (\bar{v}(x, t) - v)} \quad (2.56)$$

となる。

この解からもわかるように Boltzmann 方程式をもちいたアプローチには理想とする速度分布というものが入ってくる。これはマクロなモデルで考えたような平衡に達したときの平均速度の関数形を仮定したときよりは、ずっとミクロな領域での関数形の仮定である。だがこれも式 (2.56) を見ればわかるように、直接、分布関数に影響をあたえ、この分布関数から計算した基本図にも大きく影響することがわかる。しかし実際の交通流では車の理想的な速度の分布が直接基本図というマクロな量に反映されているとは考えにくい。最近では希望速度を使わないという改良が行われているモデルもあり、定常解からの安定性が調べられている。³²⁾ だがこのモデルでも最終的にはマクロな量の関数形の仮定がされている。このような事情から確率論的なアプローチも交通流に現れる現象を再現するという様なモデルにはなっておらず、マクロな量が決まっている時の現象の解析に使われる。

第 3 章

連続空間、離散時間におけるモデル

この章では、結合写像格子という概念をもちいた交通流の新しいモデル化と、そのモデルをもちいた交通流に対する研究の成果を報告する。

3.1 結合写像をもちいたモデル化

3.1.1 一台の車の運動のモデル化

ここでは結合写像格子の概念をもちいた、より現実的な一次元の交通流のモデル化を考えよう。結合写像格子の概念は車空間上の格子を考えることにより導入する。実空間での道路のトポロジーとして、サーキットを模した一次元の周期的な道路を考え、車の追い越しがないと仮定する。このとき車空間での格子のトポロジーは一次元の周期的な格子になる。この格子点に乗っている物理量としては、その格子に対応する車の速度と位置を選ぼう。まず、ここで考えるのは車が一台だけの状況である。この車が一台だけの運動を記述するということは、結合写像格子の概念では単純なパラレルダイナミクスの一つの格子点上の最小な物理現象を記述するということに対応する。

実際の道路で車が一台しか走っていないときの状況を考えてみよう。各々の車には運転手の個性というものがあり、これが実際の走行にも反映されている。いちばん顕著に現れるのは、各々の車の運転手がどのような速度で走りたいか、ということであろう。この運転手が走りたいと思っている速度を希望速度と呼ぼう。車が道路に一台しかなく他の車の影響が及ばないときは、運転手は自分が運転している車の速度をその希望速度に近づけようとするだろう。そして、希望速度に車の速度が近づくと運転手はその速度を維持しようとしながら運転を続ける。しかし、人間の制御によってその速度が維持されるのであり道路の状況も一様でないから、速度は常に一定とはならず希望速度の周りで揺らぐであろう。

このような一台の車の運動を、時刻 t での速度 v^t から単位時間後の次の速度 v^{t+1} を決める速度の写像 $F(v^t)$ として実現しよう。車の位置はその速度を現在の位置に加えることにすれば、つまり単位時間当たり進んだ距離を速度と定義すれば速度の写像だけが独立である。モデルを簡単にするために、現在の速度を希望速度に近づける時の加速、減速を等加速、等減速であると仮定する。こういう状況の速度の写像はたとえばつぎのような写像 $F(v^t)$ で実現できる。

$$\begin{aligned} v^{t+1} &= F(v^t) \\ &= \gamma v^t + \beta \tanh\left(\frac{v^F - v^t}{\delta}\right) + \epsilon \end{aligned} \quad (3.1)$$

この写像では希望速度を v^F として、 $\beta, \gamma, \delta, \epsilon$ というパラメーターを含んでいる。一般に結合写像格子の概念をもちいたモデル化では、物理現象の基本となるダイナミクスを表す写像の決め方は一意ではなく、同

じような運動を示す写像はほかにもいろいろつくることできる。しかし、このモデル化ではこの写像を自由走行をしている車の速度の写像としてもちいることにする。今後、この速度の写像を自由走行の写像と呼ぶことにする。

この写像の性質を考えよう。いま、パラメーター γ を $\gamma = 1$ ととり、パラメーター β を $\beta \neq 0$ とする。そして、現在の速度 v^i が希望速度 v^F から十分離れているとき、自由走行の写像 $F(v^i)$ は、次のようにかける。

$$v^{i+1} \sim v^i + \beta \text{sign}(v^F - v^i) + \epsilon \quad (3.2)$$

$\text{sign}(x)$ は符号関数であり、 x が正の時は 1、負の時は -1 である。これからわかるように自由走行の写像 $F(v^F)$ は、現在の速度 v^i が希望速度 v^F から十分離れているとき、単位時間当たりの加速度が、 $\beta + \epsilon$ 、減速度が、 $-\beta + \epsilon$ である。これからパラメーター $\beta, \epsilon, (\beta > \epsilon)$ が等加速、等減速の大きさを決めていことがわかる。またこの写像はパラメーターを適当にとることにより、速度が希望速度の周りに引き込まれるようにできる。このために希望速度から離れているときの速度の変化が等加速で、いったん希望速度のあたりに速度がくるとその周りで揺らぐという自由走行での車の運動がこの写像をもちいて実現できる。

パラメーター γ を $\gamma = 1$ ととり、パラメーター β を $\beta \neq 0$ としたときの揺らぎは周期的になり、人間が運転しているために揺らぐという効果をモデルに導入するという目的にはあまりよくないように思える。そのため、ここでは速度の写像に希望速度の周りで揺らぎをなにか規則的ではない揺らぎとして取り入れたい。これを実現するにはランダムなノイズを加えるというような方法も考えられるが、一番簡単なのは速度が離散時間の写像として与えられているので非周期的なゆらぎを決定論的カオスとして取り入れることである。いま、パラメーター γ を少し 1 からずらし、パラメーター β をやはり $\beta \neq 0$ ととってみよう。この結果、希望速度の周りに引き込まれた速度の揺らぎがカオス的になる。自由走行の写像の外形と揺らぎの様子を周期的なものとかオス的なものの二つを図 3.1 に示す。このとき、パラメーターはカオス的な振る舞いをするものに対しては、 $\gamma = 1.001, \beta = 0.6, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 、希望速度 v^F は 3.0 とした。周期的な振る舞いをするものはこのパラメータのうち γ だけを 1 とした。この図では、写像の曲線がだいた希望速度のあたりで $v = F(v)$ の直線と交わっている。そして初期速度が 0.1 から出発した後、希望速度の周りで速度が揺らいでいるのがわかる。パラメーター γ が 1 のものは希望速度の周りで揺らぎが周期的であるのがみてとれる。これとは対照的に、パラメーター γ が 1 から少しずれているときは、希望速度の周りで揺らぎがカオス的にゆらいでいる様子がみられる。このようにして運転手による制御の非周期的な揺らぎを決定論的カオスを通してモデルに取り入れることにする。

いまのパラメーターをもちいて車一台の運動がどのようになるかプロットしたのが図 3.2 であり、そのときの速度の揺らぎをプロットしたのが図 3.3 である。図 3.2 は初期速度は 0.1 で希望速度は 3.0 の車の時空間での軌跡である。パラメーターは、 $\beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ をもちい、系の大きさは 500 で 500 時間初期緩和させてからの 9 時間の軌跡をプロットした。この図には決定論的カオスによる微妙な揺らぎがみえる。この揺らぎを拡大した図にあたるのが次の図 3.3 である。時空間での軌跡の図に現れていた微妙な揺らぎが決定論的カオスが起源になっていることがよくわかる。

いままで構成してきたのがこのモデルでの一台の車の運動の基本となる写像である。結合写像格子の言葉で言えばこれはパラレルダイナミクスを構成する写像の一つが決まったことになる。次の小節では、結合写像格子の格子点の間を結ぶダイナミクスについて考えよう。

3.1.2 車が他数集まった時のモデル化

車が多数集まってきたときの運動を考えよう。車が多数集まってきたら、もはや運動は一台の車の自由走行の写像だけで記述することはできなくなる。これは一台の車の運動が他の車によって影響を受けるようになるからである。このとき車が衝突をしないように車同士の相互作用が起きる。実際の交通流ではそ

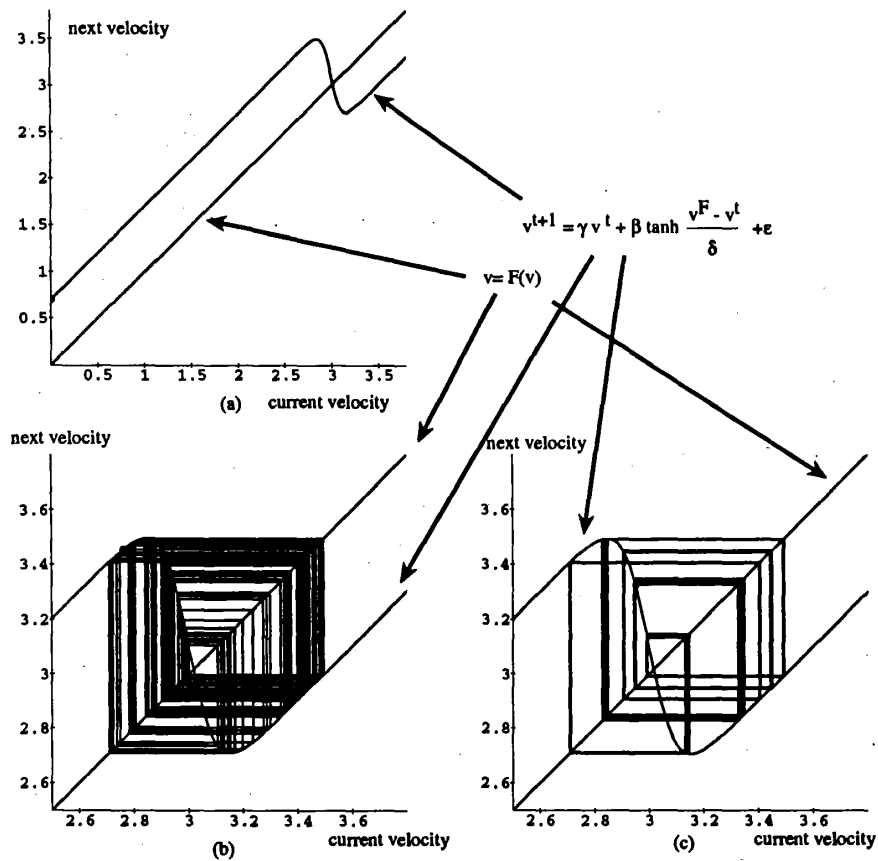


図 3.1: 自由走行の写像 $F(v^t)$ の第一リターンマップ。初期の速度を 0.1 としたときのリターンマップ。パラメーターの値は次の通り。(a),(b) カオス的な写像。 $\gamma = 1.001, \beta = 0.6, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 。(c) 周期的な写像。 $\gamma = 1.0, \beta = 0.6, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 。(b),(c) は初期の緩和 100 時間をすてて 200 時間分プロットした。希望速度は 3.0 であり、だいたい希望速度のあたりで $v = F(v)$ の直線と交わっている。

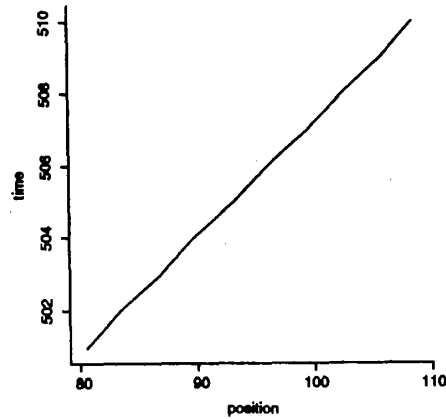


図 3.2: 自由走行写像を用いた一台の車の時空間での軌跡。初期速度は 0.1 で希望速度は 3.0 の車である。パラメーターは、 $\beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ である。系の大きさは 500 で 500 時間初期緩和させてからの 9 時間の軌跡をプロットした。決定論的カオスによる微妙な揺らぎがみえる。

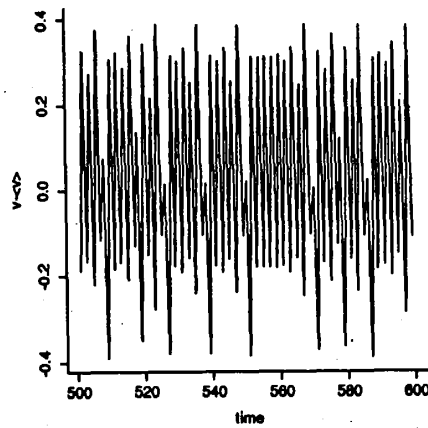


図 3.3: 自由走行写像を用いた一台の車の速度揺らぎの時系列。初期速度は 0.1 で希望速度は 3.0 の車である。パラメーターは、 $\beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ である。500 時間初期緩和させてからの 100 時間の時系列をプロットした。決定論的カオスによる揺らぎがみえる。

それぞれの車は前にいる車の位置や速度、後ろの車の位置や速度、自分自身の車の速度を見て次の速度を調整して決めている。いまモデルを簡単にするために、車同士の相互作用が前の車の位置にしかよらないとしよう。したがって、車間距離で車の速度が決まるということになる。車間距離が十分大きいときはそれぞれの車は自由に走るであろう。また車間距離が非常に小さいときは、衝突を避けるために急ブレーキを踏まなくてはならないであろう。このような状況を一台の車の運動をモデル化したときと同じように速度の写像として構成しよう。いまは車間距離から速度を決める写像を構成することになる。

さて相互作用を考慮した現在の速度と車間距離から次の時刻での速度を決める写像を構成しよう。速度 v_i^t の車が時刻 t に位置 x_i^t にいて、その前の車が位置 x_{i+1}^t にいる状況を考えよう。このとき車間距離 Δx_i^t は車の大きさ l を考慮して、次のように定義する。

$$\Delta x_i^t = x_{i+1}^t - x_i^t - l \quad (3.3)$$

まず車間距離が非常に小さいときの急ブレーキを考えよう。いま単位時間あたり進む距離が速度であったから、車間距離 Δx_i^t が現在の速度 v_i^t より小さいときは次の時刻には衝突する可能性がある。したがってこの状況では急ブレーキをふむことにする。すなわち、

$$v_i^{t+1} = \Delta x_i^t \quad (3.4)$$

とする。

次に車間距離が十分離れているわけでもないが衝突するほどでもない状況を考えよう。この車間距離の境界をいまの速度の α 倍とすると、いまの状況は車間距離と速度の大小関係で書けば、 $v_i^t < \Delta x_i^t < \alpha v_i^t$ のときに対応する。このとき自由走行の写像と急ブレーキをつなぐようなものを速度の写像としてもちいるのが妥当である。この写像も一意でないが、いまは車間距離と次の速度の空間で自由走行の写像が返す値と急ブレーキが返す値を直線でつないだようなものを考えると、次のようにかける。

$$\begin{aligned} v_i^{t+1} &= G(\Delta x_i^t, v_i^t; v_i^F) \\ &= \frac{F(v_i^t; v_i^F) - v_i^t}{(\alpha - 1)v_i^t} (\Delta x_i^t - v_i^t) + v_i^t \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで $F(v_i^t; v_i^F)$ は自由走行の写像 $F(v^t)$ と同じものであるが、希望速度が車によって違うことを考え $F(v_i^t; v_i^F)$ と書いた。これが自由走行の写像と急ブレーキをつなぐものであることは、すぐにわかる。車間距離として $\Delta x_i^t = v_i^t$ を代入すると、この写像は v_i^t すなわち Δx_i^t を返すのでこれは急ブレーキと同じである。また $\Delta x_i^t = \alpha v_i^t$ を代入すると、この写像は $F(v_i^t; v_i^F)$ を返すので、これは自由走行の写像と同じである。この写像から帰ってくる値はいまの速度と比較して大きくなっていたり、小さくなっていたりするが自由走行の写像が返す値よりは小さいので、この写像 $G(\Delta x_i^t, v_i^t; v_i^F)$ のことを減速写像と呼ぶことにする。

車間距離が十分大きいときは、前の車の影響をうけなくて自由に走っている車の運動と同じである。つまり、 $\Delta x_i^t > \alpha v_i^t$ のときは、速度の写像として自由走行の写像 $F(v_i^t; v_i^F)$ をもちいる。

これらの別々に構成した写像を一つにまとめると完全な現在の速度と前の車との車間距離からつぎの時刻での速度を決める写像が得られる。この速度の写像 $Map(v_i^t, \Delta x_i^t; v_i^F)$ は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} v_i^{t+1} &= Map(v_i^t, \Delta x_i^t; v_i^F) \\ &= F(v_i^t; v_i^F) \text{ if } (\Delta x_i^t \geq \alpha v_i^t) + G(\Delta x_i^t, v_i^t; v_i^F) \text{ if } (\Delta x_i^t < \alpha v_i^t) \text{ if } (\Delta x_i^t \geq v_i^t) \\ &\quad + \Delta x_i^t \text{ if } (\Delta x_i^t < v_i^t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

ここで、 $\text{if}(x)$ は x が真の時、1 であり偽の時、0 の値をとる関数である。また $G(\Delta x_i^t, v_i^t; v_i^F)$ はいま構成した減速写像であり、 Δx_i^t は車間距離である。この写像の外形を図 3.4 に示す。このときもちいたパラ

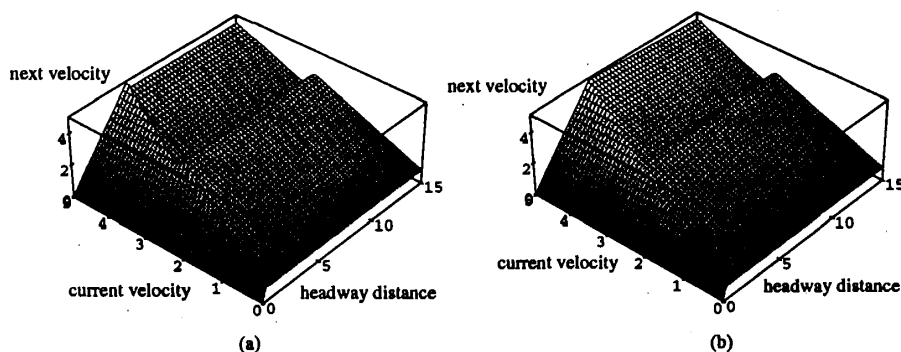


図 3.4: 完全な速度の写像の外形。この写像はいまの速度と車間距離を入力として次の時刻での速度の値を返す。パラメータの値はつぎの通り。(a) $\alpha = 1.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ (b) $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 希望速度は $v^F = 3.0$ とした。

メーターは (b) は $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ であり、(a) は減速写像を使わない場合、つまり $\alpha = 1$ の時である。希望速度は $v^F = 3.0$ とした。(a) と (b) を比較してわかるように、減速写像をもちいている方が自由走行の写像と急ブレーキの写像がなめらかにつながっている。

いま構成した写像 $Map(v_i^t, \Delta x_i^t; v_i^F)$ が結合写像格子の平行ダイナミクスの一つの格子点上での時間発展を決める。この写像は隣の格子点とは車間距離を通じで結合している。車間距離と現在の速度からつぎの速度を決める写像 $Map(v_i^t, \Delta x_i^t; v_i^F)$ をもちいていまのモデルでの結合写像格子の概念を図 3.5 に示しておく。いまのモデルでは結合写像格子の格子点が車空間での各車にあたる。それぞれの車は前にある車と車間距離を通じて結合している。この結合は一方向のみであり車空間での格子のトポロジーは周期的であるから、これは結合写像の言葉では closed flow 系と呼ばれるものに対応している。

3.1.3 パラメーターの決定

ここでモデルに含まれるパラメーターの大きさを見積もろう。モデルの長さのスケールを車の長さを単位としてはかることにする、つまり車の長さ l を 1 ととる。またシミュレーションの 1 ステップを時間の単位とする。この大きさを実際の交通流のスケールと結びつけよう。車の大きさは単純に 5[m] とする。これは車の長さとしては大きいと感じるかも知れないが、これは実際の車の長さで最小の車間をふくめた最小の車頭間隔を表していると考えことにする。シミュレーションの時間スケールも単純に 1[sec] とする。このとき、希望速度や一部のパラメーター $\alpha, \beta, \delta, \epsilon$ などを決めることができる。

まず希望速度を考えよう。一台の車が自由に走れるときどのような速度で走りたいかということは、運転手の個性や道路の法定速度による。そのため希望速度はモデルの中では決めることはできない。したがって適当に希望速度を 15[m/sec] と決めよう。これは時速 54km であり実際の交通流と比較してもおかしくない値である。これは、モデルのパラメーターとしては $v^F = 3.0$ であることに対応する。

つぎに自由走行の写像からパラメーター β, δ, ϵ などを決めよう。自由走行の写像は

$$\begin{aligned} v^{t+1} &= F(v^t) \\ &= \gamma v^t + \beta \tanh\left(\frac{v^F - v^t}{\delta}\right) + \epsilon \end{aligned} \quad (3.7)$$

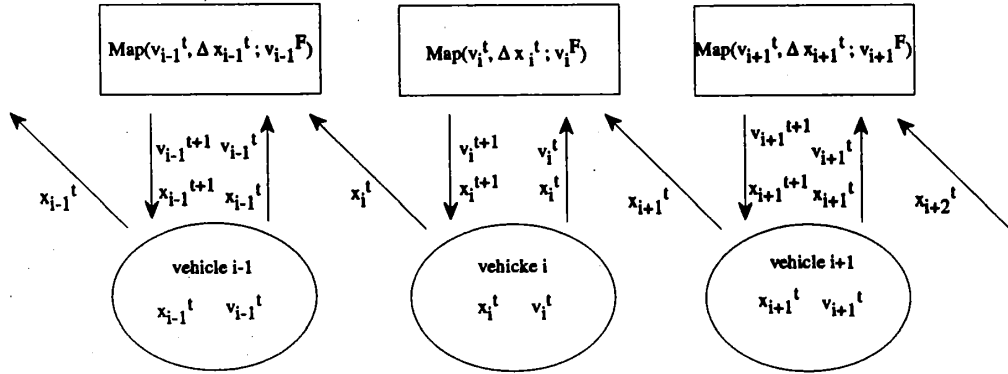


図 3.5: 結合写像格子の格子点が交通流モデルでは一台一台の車に当たる。それぞれの車は前にある車と車間距離を通じて結合している。この結合は一方のみであるため結合写像格子としては closed flow の結合写像格子と呼ばれる。

であった。この式を変形して単位時間あたりの速度の変化、つまり加速度を計算すると、

$$v^{t+1} - v^t = (\gamma - 1)v^t + \beta \tanh\left(\frac{v^F - v^t}{\delta}\right) + \epsilon \quad (3.8)$$

となる。パラメーター γ は、1.001 に固定してあるからこれは近似的に

$$v^{t+1} - v^t \sim \beta \tanh\left(\frac{v^F - v^t}{\delta}\right) + \epsilon \quad (3.9)$$

となる。よって $v^t \gg v^F$ のときは減速が起こりそのときの加速度は $\epsilon - \beta$ であり、 $v^t \ll v^F$ のときは加速度 $\epsilon + \beta$ で加速する。このモデルの値を実際の交通流の値にするには、これに $5[\text{m}/\text{sec}^2]$ をかければよい。いままで用いてきたパラメーター $\beta = 0.6, \epsilon = 0.1$ を代入してみると、

- 加速時 $3.5 \text{ m}/\text{sec}^2$
- 減速時 $2.5 \text{ m}/\text{sec}^2$

となる。実際の交通流では減速の時の方が急ブレーキを踏むなどして加速度が大きいのかもしれない。しかしここでの減速とは希望速度よりも速く走っている時の減速であり、加速とは車が止まっている時からの加速であるので、このように加速時のほうが値が大きくなるのは実際の状況によくあっている。この加速度で車が走った時、止まっている状態から 400m を走り抜けるまで 15 秒ぐらいかかる計算になる。この値は町で見かける乗用車程度なので、パラメーター $\beta = 0.6, \epsilon = 0.1$ は妥当である。したがってパラメーター $\beta = 0.6, \epsilon = 0.1$ をもちいることにしよう。この自由走行の写像から速度の揺らぎの幅を計算しよう。図 3.1 (b) からわかるように速度の揺らぎの幅は自由走行の写像の曲線の極値の差で決まる。これを計算すると、速度の揺らぎ幅 Δv はつぎのようになる。

$$\Delta v = 2\beta \tanh \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\beta}{\delta\gamma}} - 2\gamma\delta \operatorname{arccosh} \sqrt{\frac{\beta}{\delta\gamma}} \quad (3.10)$$

これに、 $\beta = 0.6, \gamma = 1.001$ を代入すると、速度の揺らぎの幅と δ の関係式がもとめられる。パラメーター $\delta = 0.1$ を使うことにすれば、速度の揺らぎの幅は 0.786 となる。これは実際の値では、時速 14km 程度に

なる。これは大きすぎるかもしれないが、これは実際の揺らぎの幅の最大値を与えているだけであるので、揺らぎの平均的な値はこれより小さい。

つぎにパラメーター α を決めよう。これは車が混んで走っている時の減速写像を使う目安を与える。これもモデルの範疇では決めることができない。したがって希望速度と関係付けることにし $\alpha = 4$ ととる。このとき運転手は希望速度 $3.0(15\text{m/sec})$ で走っているならば、60メートル先を見てこの範囲に車がいるかないかで、自由に走るか減速にはいるかを1秒ごとに決めていくことになる。

このようなことをふまえて、基本的につぎのようなパラメーターをもちいることにする。

- 希望速度 v^F の分布の平均 $3.0 \cdots 15[\text{m/sec}]$ (時速 54km)
- 減速を始める目安の距離 $\alpha = 4$ (現在の速度の4倍の距離から減速を始める)
- 加速度の大きさを決める $\beta = 0.6 \cdots$ 加速時 $3.5 [\text{m/sec}^2]$ 減速時 $2.5 [\text{m/sec}^2]$
- 加速度の大きさを決める $\epsilon = 0.1$
- 速度の揺らぎをカオス的にする $\gamma = 1.001$
- 速度の最大揺らぎ幅を決める $\delta = 0.1 \cdots 3.9[\text{m/sec}]$ (時速 14km)

後の節ではモデルの詳細を調べるのにパラメーターを変更することもあるが、基本的な量である基本図や車の時空のトラジェクトリを見るときにはこの値を用いることにする。

3.2 シミュレーションによる基本的な量の計算

3.2.1 シミュレーション

ここではいま構成した速度の写像をもちいてシミュレーションをおこない、渋滞-非渋滞相転移や渋滞相の性質を明らかにする。モデルは追い越しのない一次元のサーキットを考えている。このため車空間の格子のトポロジーは一次元の周期的なものである。シミュレーションではこの一次元の周期的な格子でパラレルに状態更新を行うことにする。この手順を具体的に示そう。

1. まずすべての車に対して位置を測定する。そしてこの位置からそれぞれの車の前の車との車間距離を決定する。
2. この車間距離に応じて車を進める。このとき車間距離が現在の速度より大きいときは、その大きさをいまの位置の座標に加える。また車間距離が現在の速度より小さいときは、現在の速度で進めると衝突してしまう可能性があるのを避けるために進めるところまで進める。すなわちいま測定した車間距離を位置の座標に加える。
3. いま測定した車間距離と現在の速度、その車の希望速度を使いつぎの時刻での速度を写像から決定する。

この一連の過程をシミュレーションでの単位時間とする。この一連の過程は運転手が車間距離と現在の速度、自分の走りたい速度から1秒後の自分の速度を決めているというモデル化を行なっていることになる。

シミュレーションで測定するものを定義しよう。このモデルでは速度は単位時間当たり動いた距離で定義しているので、平均速度は単位時間当たり一台の車が動いた距離で定義する。これから全系の密度をもちいて交通流率を計算するのはいつもの通りである。また長さの単位を車の大きさにとっているので全系の大きさというときはその系に最大何台車が入るかということを示している。これからするシミュレーションでは初期の希望速度の分布として平均 3.0 、幅 2.0 の一様分布をもちいる。初期の車の配置はランダムにえらび、初期の速度は自分の希望速度と同じにとることにしよう。

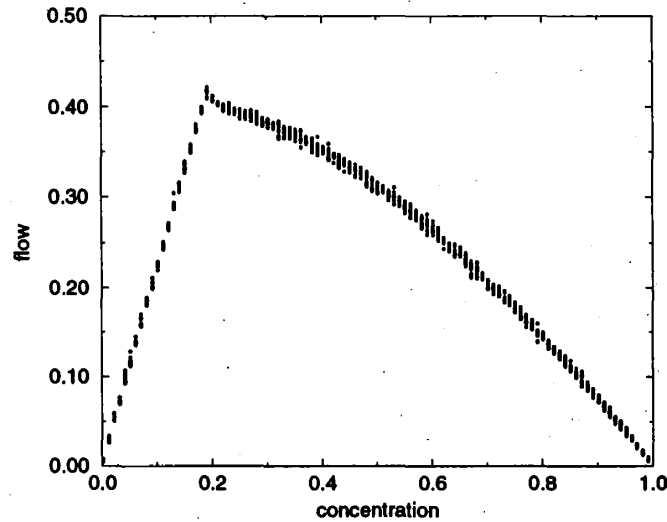


図 3.6: 結合写像をもちいた交通流モデルによる基本図。シミュレーションでもちいたパラメーターはつぎの通りである。 $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 希望速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。また、初期配置はランダムに選んだ。系の大きさは 500 である。1000 時間緩和させて 1000 時間計算した。プロットしているのは 10 サンプルの生のデータであり、同じ密度には 10 個の点が打っている。

3.2.2 基本図と時空間と相空間でのトラジェクトリ

基本図と時空間、相空間でのトラジェクトリを通じて渋滞-非渋滞相転移の性質や渋滞相そのものの性質を考えよう。まず密度に対する交通流率のプロットである基本図を図 3.6 に示す。この図は系の大きさが 500 のもので、初期緩和を 1000 時間行ってからの 1000 時間の計算である。希望速度と初期速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。また、初期配置はランダムに選んだ。パラメーターは前節で決めた $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ をもちいている。プロットしているのは初期配置の違う 10 サンプルについてのデータで、これを平均操作などを行わずにそのまま打っている。このプロットから低密度領域での交通流率が密度にたいして線形の振る舞いをしていて、その後車の密度が増えていくと鋭いピークがあり渋滞-非渋滞相転移が起きているのがわかる。この相転移点より高密度側では、交通流率は上に少し凸になりつつ減少している。また低密度ではサンプルのちがいによる交通流率のちがいはあまりないが、高密度ではサンプルによるちがいが大きくなっている。この原因は後で時空間におけるトラジェクトリをみると理解できる。また、グラフから低密度での交通流率 q の振舞いを読みとってみると、

$$q \sim \min(v_i^F) \rho \quad (3.11)$$

ということがわかる。 $\min(v_i^F)$ は希望速度 v_i^F の中でもっとも小さいものを表す。これは低密度では一番遅い車の後ろにその一番遅い車とほとんど同じ速度で走るクラスターが形成されているためである。これが低密度で交通流率がサンプルによってあまり変わらない原因となっている。この低密度におけるクラスターの形成も後で時空間におけるトラジェクトリにはっきりと現れている。

いま計算したのは閉じた系全体での平均速度と密度をもちいた基本図である。このような量は系全体での相転移などの現象を理解するには便利である。しかし、実際の観測で観測されているのは時間、空間ともに局所的なところでの密度と交通流率であるので、いま計算したような量を直接実際の交通流の観測

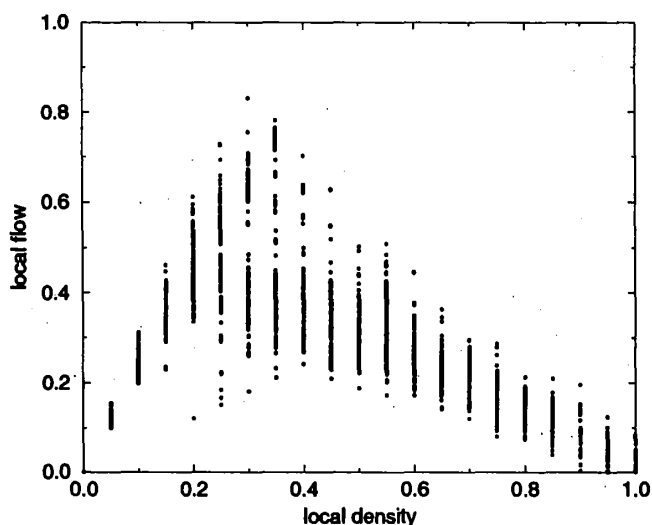


図 3.7: 結合写像格子をもちいたモデルでの局所的な基本図。シミュレーションでもちいたパラメータはつぎの通りである。 $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 希望速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。また、初期配置はランダムに選んだ。系の大きさは 500 である。1000 時間緩和させて、100 時間測定した。測定はある局所的な長さ 20 の空間部分を取り出して、そこでの密度と交通流率を毎時間ごとに計算した。それをそのままプロットし、全系の密度を変えてえられた結果を重ね合わせた。

データと結びつけるのは難しい。実際の交通流で観測されるような量をいまのモデルで計算してみよう。実際の交通流で観測されるような基本図をいまのモデルで計算するとなるとなにか別の方法を考える必要がある。実際の交通流で観測されているのは時間、空間ともに局所的であるので、モデルでも局所的に交通流率を計算することにしよう。そして全系の車の密度を 0 から 1 まで変えて、いまのモデルのような閉じた系でこの局所的な交通流率を計算し最後にその結果を重ね合わせることによって、実際の道路のような開いた系の状況を再現することにしよう。こうして計算した結果を図 3.7 にしめた。これは、系の大きさは 500 であり、1000 時間緩和させて、100 時間測定した結果である。測定はある局所的な長さ 20 の空間部分を取り出して、そこでの密度と交通流率を毎時間ごとに計算した。シミュレーションでは $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ というパラメータをもちいた。また希望速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。また、初期配置はランダムに選んだ。全系の密度を 0 から 1 まで変えて、閉じた系でこの局所的な交通流率を計算し最後にその結果を重ね合わせ開いた系の状況を再現した。この結果は漢字の「人」の字のようなかたちをしていて、低密度側で全系での基本図と同じような交通流率の線形な振舞いが見られる。この線形な振舞いをしているところに「人」の字の右側の線、高密度での交通流率、が刺さっているようなかんじである。このちょうど突き刺さっている部分が渋滞-非渋滞相転移の転移点付近の密度領域に対応しており、同じ密度領域でも渋滞したり自由に流れてたりする事があるということを示している。この密度領域についてはあとのトラジェクトリのところでも詳しく調べる。

このような状況は、実際の交通流の観測で知られているような基本図の振舞いと一致している。また第 1 章で述べたように Hall はこのような「人」型の基本図は観測時間が短く転移点付近のデータ数が少ないために観測されると主張している。これを確かめるために図 3.7 と同じ条件で測定時間を 5 倍にしたものを図 3.8 に示す。これをみればたしかに転移点付近のデータの数が多くなっており、基本図の形も「人」型から Hall の主張しているような連続ではあるが微分不可能なタイプに近づいているように見える。これを

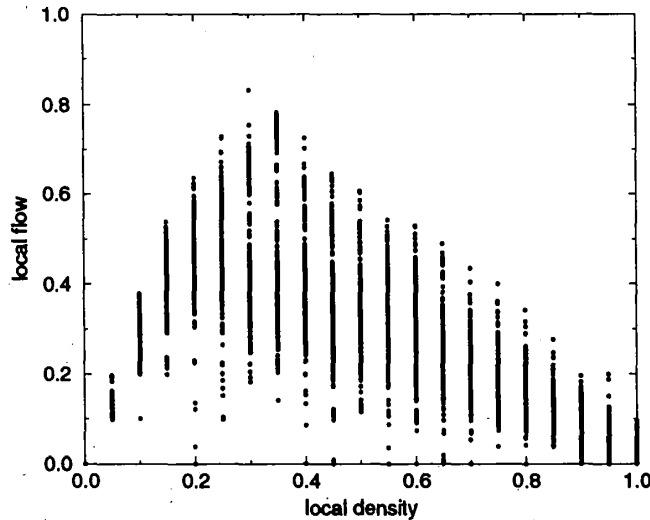


図 3.8: 結合写像格子をもちいたモデルでの局所的な基本図。図 3.7 のものと観測時間以外の条件は同じである。観測時間は図 3.7 の 5 倍にした。

確かめるために Hall が観測したデータに行なった解析をいま計算した基本図に対しても行なってみよう。Hall の解析は局所的な密度に対して得られていた局所的な交通流率の平均を計算するというものである。この結果を図 3.9 に示す。これは図 1.5 と同じのものであり、標準偏差の誤差をつけた。Hall らの解析と同じく転移点付近で揺らぎが大きくなっている。また基本図の形は Hall らが主張しているような連続で微分不可能なものに近い。

この基本図の不連続性は Hall らはカタストロフ理論をもちいて理解しようとしている。それは、基本図は密度と交通流率でプロットするのではなく、これに平均速度をあわせた 3 次元空間で理解する必要がある、その三次元のプロットは cusp catastrophe 多様体上に分布しているというものであった。いまのシミュレーションは密度、交通流率、全系の密度という三つをもちいて交通流の特性を計算しそれを密度と交通流率の平面に射影するという操作を行なった。その結果、実際に観測されているような基本図を再現することができた。そして Hall が行なったようにこれを密度、交通流率、平均速度というような三変数をもちいて三次元プロットを行なうことは可能である。だがいまのシミュレーションでは平均速度と交通流率はたがいに独立ではないためカタストロフ理論との関連ははっきりしない。ただ明らかなのは全系の密度という量で重ね合わせたことがこの局所的な基本図を再現できたことの原因である。実際、全系の密度をある値に固定し局所的な基本図を計算しても図 3.7 や図 3.8 の非常に限られた密度領域の交通流率しか計算できない。全系の密度を変えた結果を重ね合わせることによってはじめて全密度の領域にわたり交通流率が計算でき、特に転移点付近の揺らぎが大きいような状況は、このように全系の密度をかえて重ね合わせることによって自由流の交通流率と渋滞流の交通流率が同じ密度で存在できることから再現される。またこれは実際の交通流に対して、なにか別の新たな交通流の状態を示すような量が存在することを示唆している。この量は閉じた系では全系の密度として表されるが、開いた系で何に対応するのは明らかでない。

つぎにいまのモデルで時空間のトラジェクトリを調べよう。初期配置と密度をいろいろ変えながら計算する。やはりパラメータは $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ をつかい、希望速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。これらを図 3.10 と図 3.11 にしめす。図 3.10 は転移点から離れたところでのトラジェクトリの様子である。この領域では初期配置のちがいによるトラジェクトリの差はあまりみられない。

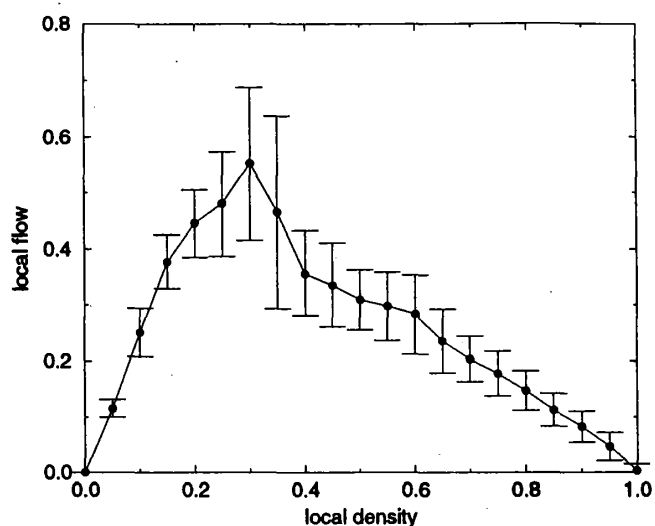


図 3.9: 観測時間の長い局所的な基本図で密度に対して交通流率の平均をとったもの。これは Hall らの解析と対応する。

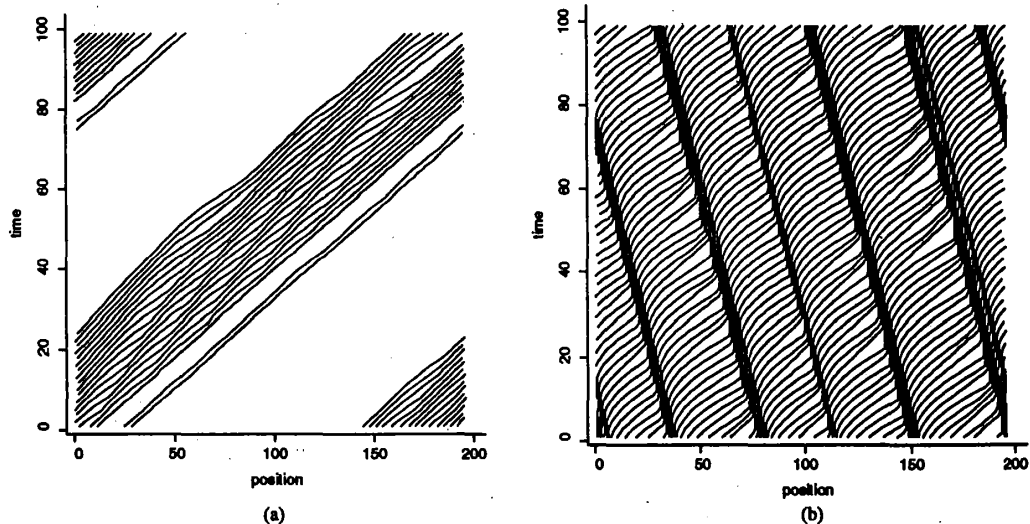


図 3.10: 渋滞-非渋滞相転移点から離れた密度領域での時空間におけるトラジェクトリ。パラメータは $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 、希望速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。初期配置をランダムにとってから適当に緩和してからの 100 時間のトラジェクトリである。系の大きさは 195 であり、車の数は、(a) は 20 台、密度では 0.1、(b) は 60 台、密度は 0.31 である。

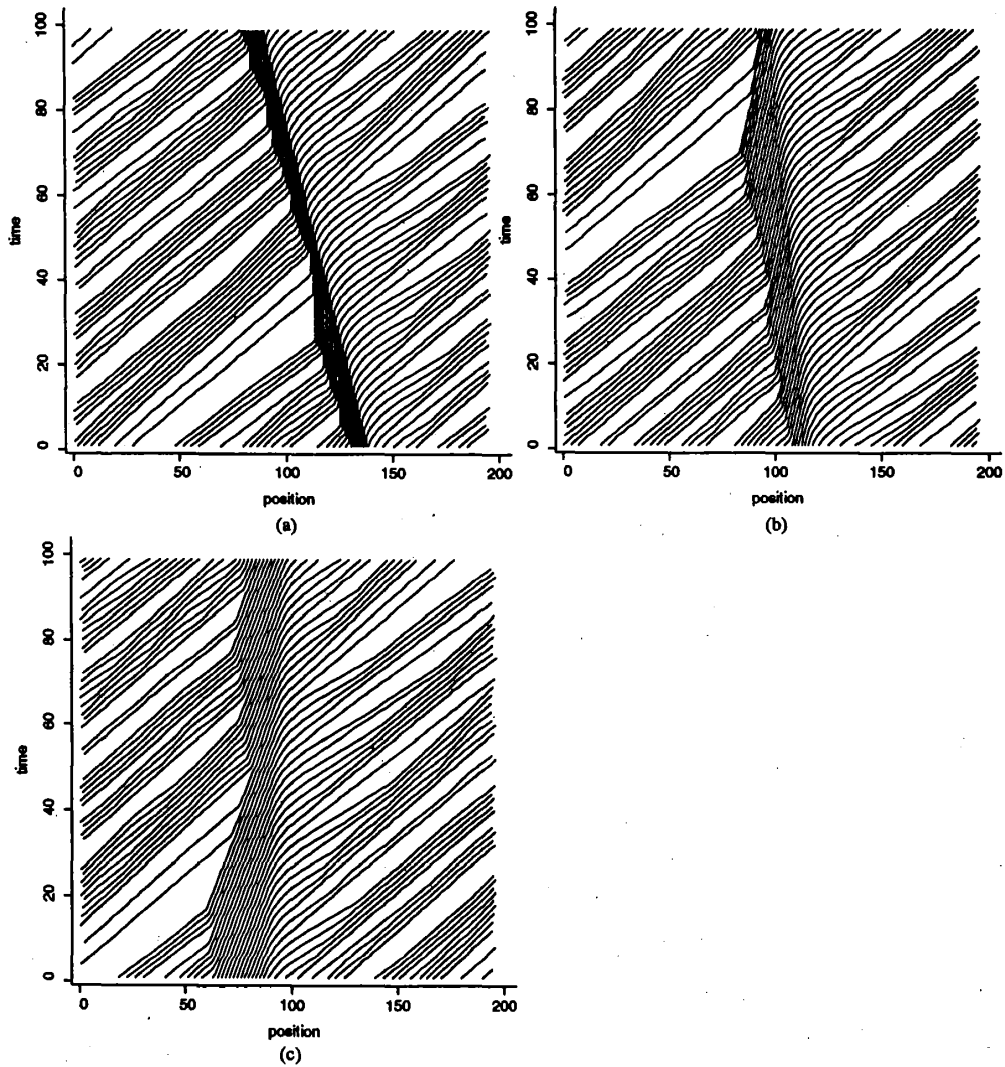


図 3.11: 渋滞-非渋滞相転移点付近の密度での時空間におけるトラジェクトリ。シミュレーションでもちいたパラメータは $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ 、希望速度は区間 $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。初期配置をランダムにとってから適当に緩和してからの 100 時間のトラジェクトリである。系の大きさは 195 であり、車の数は 42 台、密度では 0.22 である。(a)、(b)、(c) ともに同じ密度であり、初期状態のみが違う。

図 3.10 (a) は低密度での典型的なトラジェクトリである。ここでは遅い車の後ろに形成されているクラスターが見られる。このようなクラスターが形成されたときの平均速度はもっとも遅い車によってきめられているので基本図 3.6 の低密度でサンプル間の揺らぎが小さくなる。このクラスターの中で前の車の揺らぎが原因となって、ときどきショックウェーブが走っているのが見られる。このクラスターは一度できてしまえば安定に存在する。これと対照的に高密度でのトラジェクトリが図 3.10 (b) である。ここでは、車が完全にその内部で止まっているような渋滞がいくつか見られる。このような状況は高密度では典型的であり、初期配置のちがいは渋滞相の幅とその大きさ、存在する間隔に反映される。基本図 3.6 ではこの初期配置のちがいがサンプル間のばらつきが少し見られる。これもこのような渋滞ができてしまえば安定に存在する。

トラジェクトリでもっともおもしろいのが転移点付近のもので、これを図 3.11 にしめた。初期配置のちがいで図のような三種類に分類できるトラジェクトリが現れ、これらはすべて安定に存在する。(a) のような車が内部で止まっているような渋滞をハード渋滞と呼ぶことにする。また、(b)、(c) に見られるような車が止まっているわけではないがまわりの車よりも遅くうごいている領域も一種の渋滞であると考えられるのでこれをソフト渋滞と呼ぶ。ソフト渋滞は正の群速度を持って動くものと、負の群速度を持って動くものとに分類できる。(b) は負の群速度をもつソフト渋滞であり、(c) は正の群速度をもつソフト渋滞である。このように転移点付近で渋滞相の群速度が異なる渋滞がそれぞれ安定に存在できるということが局所的な基本図で転移点付近ではいろいろな状況の交通流が存在していたということの原因となっていると考えられる。

渋滞相の群速度を考えよう。ハード渋滞の速度はすぐにわかる。この渋滞相の中では車はいつも止まっていて、そのために渋滞相から抜け出す車は常に速度 0 から走り出す。このとき使われる速度の写像は速度 0 であるから常に自由走行の写像となり、この写像の $v \sim 0$ 付近の振る舞いが、ハード渋滞の群速度を決める。これがどのようにハード渋滞の群速度を決めているか考えるために、いま使っているパラメーターで希望速度 3.0 の自由走行の写像の初期値 0 にたいする時系列を計算してみよう。これはつぎのようになる。

$$0 \rightarrow 0.7 \rightarrow 1.4 \rightarrow 2.1 \dots \quad (3.12)$$

渋滞相の内部では車は車間距離 0 で車が詰まっていて車の大きさは 1 である。このため一台前の車が渋滞から抜け出そうと加速しようとしてもその速度は 0.7 でしかないの、距離は 0.7 しか進まない。したがってその後ろの車はつぎの時刻では走り出すことができず、そのつぎの時刻で走り出すということになる。これがハード渋滞相の群速度をある値にきめてしまい、いまの場合では $1/2$ である。このハード渋滞の群速度が渋滞相の群速度の中ではもっとも遅い。ソフト渋滞の群速度はこれより速くなり、最大速度まで連続に値をとることができる。どのようなタイプの渋滞相でも渋滞相の中での車間距離と速度で群速度が決まる。

このように、転移点付近で群速度の違う渋滞がそれぞれ安定に存在し、これらの間は初期配置の違いしか差がない。これは、低密度でクラスター相に自己組織化していた交通流が、車の密度が増えてきたために、ランダムネスに対し不安定になり渋滞相の群速度で特徴づけられる新たな相へ相転移をおこしたとすることができる。だがこのタイプの相が存在できる密度領域はいまのパラメーターでは大変狭く、この相は高密度領域に入るとハード渋滞がいくつも存在するような相へ相転移を起こす。またこのいろいろな群速度を持つ渋滞相が安定に存在する密度領域があるということが局所的な基本図の転移点付近の様子や、全系の基本図の転移点付近の様子に反映されている。

さて、つぎに一台の車の相空間でのトラジェクトリをしらべよう。いまの場合、相空間は車間距離とそれから決まった速度で張られているとする。特徴的な三つの密度領域でこの相空間でのトラジェクトリを計算した典型的なものを図 3.12 にしめす。これらはすべて系の大きさが 500 であり、500 時間緩和させてからの 4000 時間のプロットである。全体の車の中でサンプルにした車は希望速度が 3.0 という平均の値を

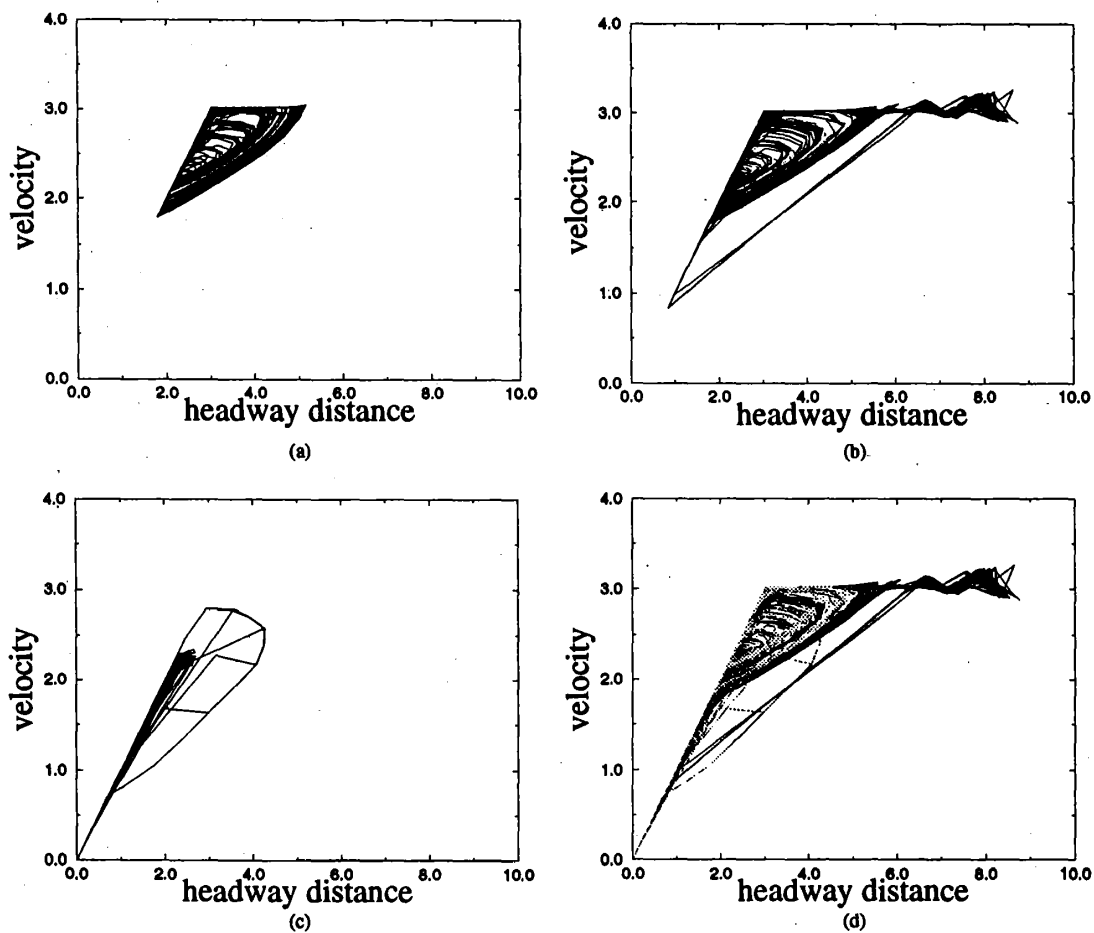


図 3.12: 車間距離と速度の空間でのトラジェクトリ。系の大きさは 500 であり、パラメーターはいつもの通りである。それぞれ 500 時間緩和させ、その後の 4000 時間のプロットである。サンプルにした車は希望速度 3.0 を持っている。(a) は密度 0.1 であり、(b) は密度 0.2、(c) は密度 0.3 である。(d) はこれらの結果をすべて重ねたものである。

持っている車である。それぞれのプロットは密度が違い、(a) は密度 0.1、(b) は密度 0.2、(c) は密度 0.3 である。また (d) はこれらすべてを重ね合わせたものでそれぞれ相空間のどのあたりを運動しているかわかる。この図からすぐにわかるのが相空間では車の軌跡がまわっていることである。これら相空間でのトラジェクトリは、(a)、(b)、(c) とも基本的には時計のまわる向きと反対の方向にまわっている。まず (a) を詳しく見てみよう。(a) は低密度での相空間での振舞いである。このときトラジェクトリにはクラスターが存在していて希望速度が 3.0 の車はちょうどこのクラスターの内部を走っている車に対応する。ここでクラスターの内部を走っているために、車は減速写像と急ブレーキを使って走っており、トラジェクトリの左に見えている境界が急ブレーキに対応する。さらにトラジェクトリの上に見える境界は減速写像の傾きが 0 になるところと対応していて、これは自由走行写像の固定点にあたる。自由走行の写像の固定点がトラジェクトリの境界になる理由は次のようにわかる。車がクラスターの中で加速してきて速度が希望速度に近くなると、加速にもちいている減速写像の性質から加速度がどんどん小さくなる。そしてそれ以上加速できなくなり、あとは減速する一方になる。この加速度が 0 になるのがちょうど自由走行の写像の固定点にあたり、そのためこの固定点がトラジェクトリの境界に対応する。(b) はちょうど転移点付近での相空間のトラジェクトリである。同じように左の境界は急ブレーキに対応していて、上の境界は自由走行の写像の固定点に対応する。この図では新しく右下にも境界が見える。この境界は渋滞相から抜け出すときの運動を相空間で表している。これは減速写像による加速であることが別のシミュレーションからわかっている。そしてこの境界と減速写像の傾きが 0 になる極限の境界とが交わるあたりには、速度の揺らぎが見られこれは渋滞を抜け出した後、クラスターが形成されるまでの揺らぎに対応する。この境界の中で (a) のようなトラジェクトリが見えているのは渋滞相を抜け出してから、しばらくして次の渋滞に入るまでにクラスターが形成されるからである。(c) は高密度での相空間のトラジェクトリである。ここでは渋滞相のなかでは車の速度は 0 なのでトラジェクトリも原点を通っている。高密度では車がつまり過ぎているために車の個性が効かなくなりトラジェクトリも同じところを通っている。

このように相空間のトラジェクトリに渋滞相の性質が顕著に現れている。これは第 1 章で示した実験の結果を良く再現している。ただ渋滞流と自由流の明確な違いはこの時空間のトラジェクトリには現れていない。これは閉じた系の定常状態で計算しているためである。しいて言うならば図 3.12 (b) にすこし自由流とみなすことができる部分が現れている。この部分は渋滞相から抜け出した車がクラスターを形成するまでのわずかな間に現れる部分である。これ以外には、加速時の方が減速する時よりも車間距離を大きくとる傾向がこのシミュレーションの結果にも見られる。

また、この相空間でのトラジェクトリを見てわかるように、低密度のものと同転移点付近のものの一部でストレンジアトラクタが見られる。これは、交通流がカオス的であることを示している。しかし、いまのモデルでは初期配置のランダムネスや希望速度の分布、速度の写像自体のカオス挙動などランダムネスがいろいろ入っているためカオスになっているのであって、モデル自身がランダムネスをなくしたらカオスになるという保証はなく、実際カオス的にならない。しかし、実際の交通流ではこのようなランダムネスが非常に多くあり、このような状況でカオス的な振る舞いが起きていることは十分に考えられる。

3.3 モデルの詳細な研究

3.3.1 パラメーターによるちがい

ここでパラメーターをいろいろ変えたときのモデルの振舞いがどのように変わるかを、全系で計算した基本図で調べよう。パラメーターが実際の交通流でどのような値をとっているかは前々節で調べたが、ここではその値をわすれてモデルの性質を調べることにする。ここでは特に減速写像をもちいる目安となるパラメーター α と、加速度の大きさを決める β 、速度の平均の三つをかえてその効果をそれぞれ調べる。これらの転移点付近での基本図の振舞いを図 3.13 にしめす。これらは系のサイズは 1000 で緩和時間 1000 経過

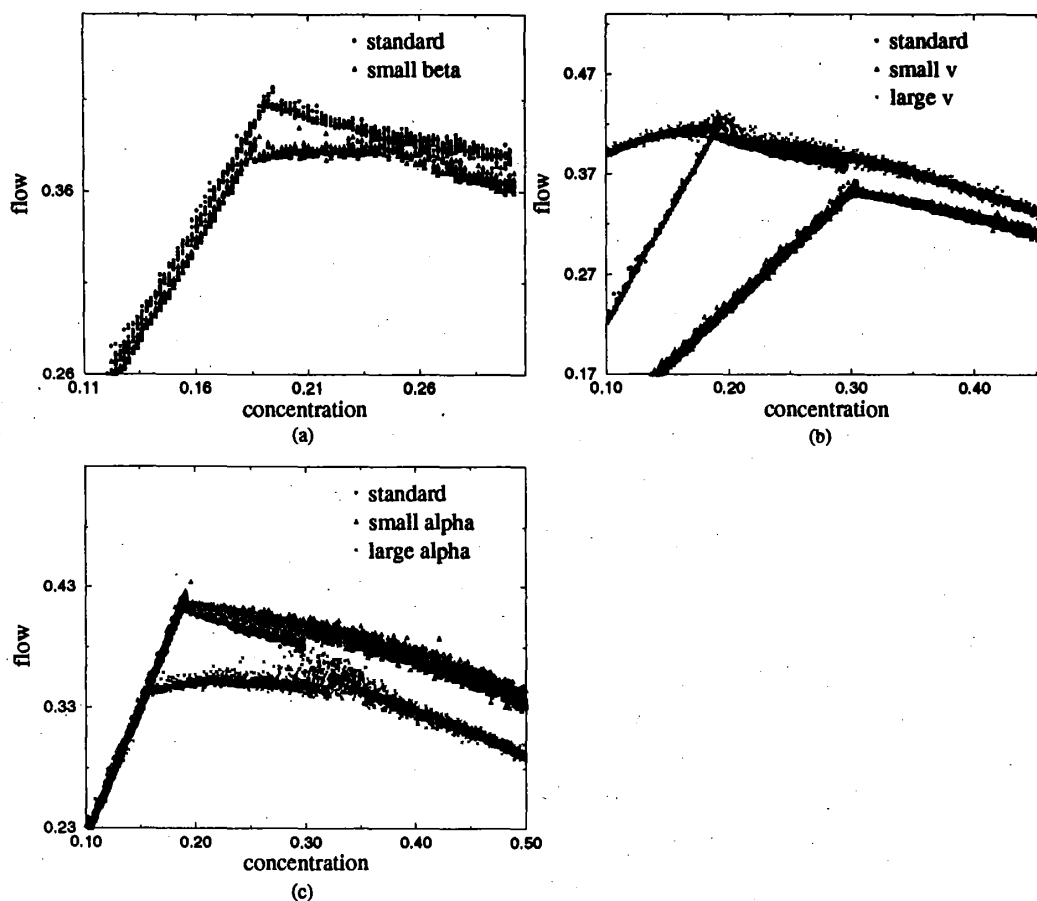


図 3.13: パラメーターを変えたときの全系の基本図のちがひ。系のサイズは 1000 で緩和時間 1000 経過した後の 1000 時間の測定である。10 サンプル測定しそのデータをそのままプロットした。基本となるパラメーターは $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ で、希望速度は $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。(a) はこれから $\beta = 0.4$ にしたものとの比較である。(b) は希望速度の分布を $[1.0, 3.0]$ と $[4.0, 6.0]$ とに変えたものである。図中では平均速度の大小で記述している。(c) は減速写像を使う目安を与える α を変えた。基準は $\alpha = 4.0$ であるが、それぞれ $\alpha = 2.0, 8.0$ に変えた。

した後の 1000 時間の測定である。基本となるパラメーターは $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ で、希望速度は $[2.0, 4.0]$ に一様に分布している。(a) はこれから加速度の大きさを与える β を小さくした $\beta = 0.4$ との比較である。(b) は希望速度の分布を $[1.0, 3.0]$ と $[4.0, 6.0]$ とに変えたものである。図中では平均速度の大小で記述している。(c) は減速写像を使う目安を与える α を変えたもので、基準の $\alpha = 4.0$ から、それぞれ $\alpha = 2.0, 8.0$ にした。

まず (a) を見てみよう。これは加速度の大きさを決定するパラメーター β を変えたものである。 β を小さくしたものは転移点付近のピークがなまっている。これはトラジェクトリで観測されたいろいろな群速度を持つ渋滞相が存在できる密度領域が大きくなったことを意味しており、実際このパラメーターでトラジェクトリを観察すれば、この密度領域でいろいろな群速度を持つトラジェクトリがみられる。(b) は平均の速度を変えたものであり、転移点より低密度での交通流率の傾きが変わっている。また平均速度を大きくしたものは低密度での振る舞いが線形でなくなっている。これはこの密度領域で線形でないだけで、プロットした密度よりも低密度では線形であることが別の計算からわかっている。この線形でない領域は (a) でみたような転移点付近のいろいろな群速度を持つ渋滞相が安定に存在しうる領域である。これは平均速度が大きくなるということは相対的には加速度が小さくなることと同じ効果を引き起こしているため β を小さくしたのと同じ状況である。(c) は減速写像をもちいる目安の距離を与えるパラメーターをかえたものである。パラメーター α を小さくしたものは、あまり変化がなく高密度側でわずかに交通流率が大きくなっている。だがパラメーター α を大きくしたものは転移点付近のピークがなまっており、これは転移点付近のいろいろな群速度を持つ渋滞相が安定に存在しうる領域が拡大されたものである。

このパラメーターを変化させることでわかったのは、加速度、減速度が小さくなったり、減速に入る車間距離が広くなったりしたら、転移点付近でのいろいろな群速度が存在する領域が大きくなるということである。これは加速度、減速度が小さくなったり、減速に入る車間距離が広くなったりして系が変化に対応できることが容易になればなるほど、転移点付近の特別な振る舞いをする相がひろくなることを示している。またこれは逆に転移点付近の特別な相は系が変化に対応できるために存在できるということを示している。

3.3.2 初期速度、初期配置にランダムネスがない系

ここでは初期配置や初期速度にランダムネスがまったく存在しない理想的な系でシミュレーションを行い、モデルが持っている基本的な性質を調べよう。実際の交通流ではこのような状況は測度 0 で起こり得ないのであるが、モデルの基本的な性質はこちらの方がよくわかる。いままでのシミュレーションではモデルにはいろいろなランダムネスが含まれていた。たとえば初期配置のランダムネスや希望速度の分布、初期速度のばらつきなどである。ここではまず初期配置のランダムネスをなくそう。これは系の大きさを車の数で均等にわり、それを初期の車間距離とすれば初期配置のランダムネスはなくなる。希望速度の分布もランダムネスをなくすようにある一つの値、または二つの値をとることにしよう。車の初期速度はすべて希望速度の平均とする。このように初期条件を設定すれば、いまの場合ランダムネスとして含まれるのは自由走行の写像のカオス揺らぎだけである。このような状況下でシミュレーションしたのがつぎの図 3.14、3.15 の二つである。図 3.14 はランダムネスのない系での基本図であり、系の大きさは 500、初期緩和 1000 時間を行った後 1000 時間の計算結果である。パラメーターはつぎの通りである。 $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ それぞれのプロットは希望速度がちがひ、希望速度を二つかいているのは希望速度が偶数番目の車が 2.0、奇数番目の車が 4.0 を表している。図 3.15 は平均速度でありそれ以外の条件は基本図とおなじである。

まず基本図から見ていこう。低密度側では、交通流率はほぼ希望速度に比例して増加する。これは車が自由に走れることの反映である。そして途中でピークがありこれをすぎた後、線形に交通流率が落ちているのがわかる。また、希望速度を 2 種類とったものは予想される通り低密度では希望速度が遅い方に支配されていることがグラフから見て取れる。よく見ると低密度でピークの前に相転移が一度あることが基本

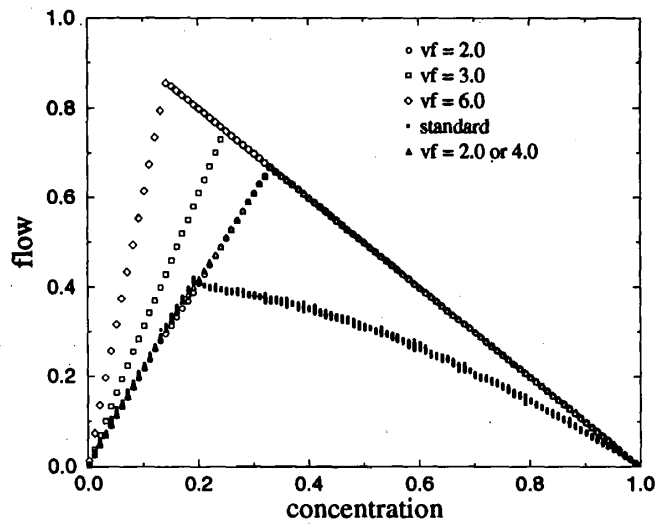


図 3.14: ランダムネスのない系での基本図。系の大きさは 500、初期緩和 1000 時間を行った後 1000 時間計算した。シミュレーションでもちいたパラメーターはつぎの通りである。 $\alpha = 4.0, \beta = 0.6, \gamma = 1.001, \delta = 0.1, \epsilon = 0.1$ グラフはそれぞれ希望速度がちがう。初期速度を二つかいているのは希望速度が偶数番目の車が 2.0、奇数番目の車が 4.0 を表している。比較のためにランダムネスが入ったまままでのものも 10 サンプル計算し重ねて示している。

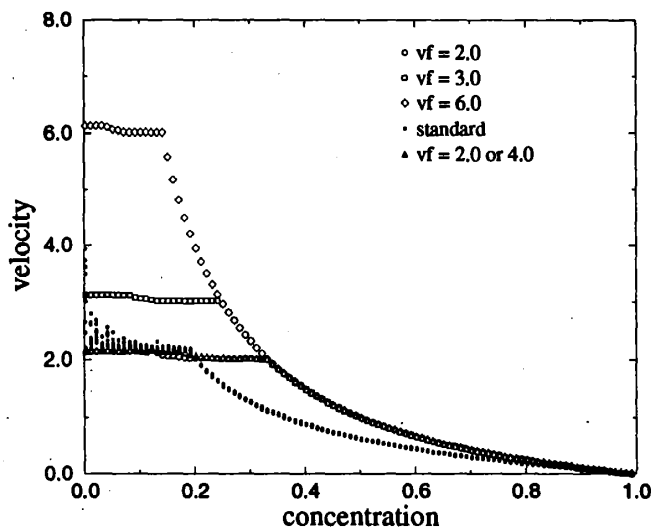


図 3.15: ランダムネスのない系での平均速度。系の大きさは 500、初期緩和 1000 時間を行った後 1000 時間計算した。パラメーターは図 3.14 とおなじである。それぞれ希望速度が違う。二つかいているのは希望速度が偶数番目の車が 2.0、奇数番目の車が 4.0 を表している。比較のためにランダムネスが入ったまままでのものも 10 サンプル計算し重ねて示している。

図からわかる。この相転移は平均速度のプロットでは顕著にわかる。たとえば $v^F = 6.0$ のものでは、非常に小さい密度では平均速度がある値で一定で、それより密度が増えるとまた別の値で一定になる。そして渋滞-非渋滞相転移を起こし平均速度が小さくなっていく。低密度での相転移の原因は速度を決める写像が変わるために起こる相転移であり、自由走行の写像と減速写像で速度の平均の値が少しだけ違うために起きる。この相転移について考えよう。自由走行の写像では厳密には希望速度まわりの揺らぎの平均は希望速度に一致せず、いまのパラメーターでは、それは希望速度や自由走行の写像の固定点よりは大きくなっている。これを $\langle v \rangle$ としよう。この速度と希望速度 v^F と自由走行の写像の固定点 v_* はいまのパラメーターではつぎのような関係がある。

$$\langle v \rangle > v_* > v^F \quad (3.13)$$

密度がきわめて小さいところでは、車は自由走行の写像をもちいて走っていて、このときの平均速度は $\langle v \rangle$ である。これが減速写像にうつるのは、明らかに車間距離が速度の4倍のとき(いまのパラメーター $\alpha = 4.0$ のとき)であるから、転移点の密度 ρ_l はつぎの式で決まる。

$$4\langle v \rangle = \Delta x = \frac{1}{\rho_l} - 1 \quad (3.14)$$

これを解けば

$$\rho_l = \frac{1}{4\langle v \rangle + 1} \quad (3.15)$$

となり、たとえば $v^F = 6.0$ では、 $\langle v \rangle = 6.128$ であるから転移点の密度 ρ_l は 0.0392 と求めることができる。この値は実際、図 3.15 から読みとれる値と一致している。渋滞-非渋滞相転移の転移点を求めよう。おなじような考え方をすれば、つぎの相転移点は減速写像から急ブレーキに移る点として与えられる。この転移点の密度 ρ_h はつぎの関係式を満たす。

$$v = \Delta x = \frac{1}{\rho_h} - 1 \quad (3.16)$$

したがって

$$\rho_h = \frac{1}{v + 1} \quad (3.17)$$

となる。ただし v は減速写像での固定点である。減速写像の固定点は任意の車間がとりえる時は自由写像の固定点である。したがって

$$\rho_h = \frac{1}{v_* + 1} \quad (3.18)$$

である。これは $v^F = 6.0$ のときには $v_* = 6.018$ 程度なので $\rho_h = 0.142$ が転移点となる。これは図から読みとれる値と一致している。また、転移点より高密度では車は急ブレーキを使いながら走るの密度 ρ のときの平均速度 v は車間距離に車の大きさを考慮した

$$v = \frac{1}{\rho} - 1 \quad (3.19)$$

で与えられる。希望速度が2種類あり偶数番目と奇数番目の車で大小が交互に入れ替わっているものは、低密度では遅い車の後ろに速い車が追いついている二台だけのクラスターをつくっていることを考慮しておなじように考えれば理解できる。

結局ランダムネスのない系では、いまのパラメーターのときは平均速度を全密度領域にわたり求めることができる。系に速度のばらつきや初期配置のランダムネスが入ってくると、そのばらつきの中でもっと

も速度が遅い車ばかりから構成されるランダムネスのない系と比較して、ランダムネスのある系では渋滞-非渋滞相転移の転移点が低密度側にシフトし、さらに最大の交通流率も小さくなる。これはいまのモデルの性質ではあるが、実際の交通流についてもこのようなことが起きていると考えられる。現在使用されているような車を使用しているかぎり、排除体積の効果と前の車を見て反応するタイムラグの効果で、渋滞をなくすことは不可能である。ただ可能なのは渋滞を起こすことを遅らせることである。これは個々の車の個性を消し、道路を走る車間を一定にするようなことでランダムネスを減らせば可能である。

3.4 まとめ

この章では、結合写像格子の概念をもちいた新しい交通流のモデルを構成した。同じような連続空間、離散時間の交通流のモデルは以前にも Nagel と Herrmann によって彼らのセルオートマトンモデルの拡張として行われていて、自己組織化臨界現象との関連で調べられている。⁶³⁾ ここでは彼らのモデルとは違い、一台の車の運動をモデル化しそれらが多数集まったときの非自明なダイナミクスということを考え、一台の運動を結合させモデル化をおこなった。このとき交通流の物理的本質として速度の揺らぎや車の個性のちがいというものが重要であると考えこの効果も取り入れた。このようなモデル化の方法はいわゆる複雑系のモデルの構成として最近盛んに行われるようになってきたものである。そしてこの結果として Nagel と Herrmann のモデルや従来から行われている追従モデルなどのモデルより、さらに現実的なモデルの構成に成功した。

特に注目して調べたのが、交通の実際の観測でもよく調べられている基本図や時空間でのトラジェクトリなどである。基本図の解析では全系の基本図は交通流の全体の性質である渋滞-非渋滞相転移などを解析するには都合がいいが、実際の交通流の観測結果の再現には向かない。実際の交通流の観測に対しては閉じた系のシミュレーションではなく開いた系を考える必要があり、これは閉じた系のシミュレーションの結果の重ね合わせで実現できる。このような考えをもちいて実際に観測されているデータに対応する局所的な基本図という量を計算した。これは実際の交通流の観測結果と非常によく性質が似ていて、渋滞-非渋滞相転移点付近では閉じた系での高密度相の性質と低密度相の性質の両方の寄与が重要であることがわかった。これは実際の観測で言われている、転移点付近での交通流の不連続性というものに対するシミュレーションの立場からの裏付けを示しており、このように非常に観測結果を良く再現しているモデルはいままで存在しなかった。またこの結果は交通流の全体の状態を記述するような新たなパラメーターが存在している可能性を示唆している。交通流のトラジェクトリでは低密度でのクラスタリングや、そのクラスタにショックウェーブが走る様子を示した。また、渋滞-非渋滞相転移の転移点付近のトラジェクトリには、いろいろな群速度を持つ渋滞相が安定に存在することがわかった。完全に止まってしまう渋滞相はもちろん渋滞相の中で車が動いているような渋滞相も再現した。また、一般的に知られている渋滞相の群速度は負であるという事実に合う渋滞相を再現した。これ以外にも実際の観測では知られていない前に進む渋滞相が存在する可能性も示した。

これ以外にも渋滞-非渋滞相転移や、相空間でのトラジェクトリ、ランダムネスがない系でのモデルの振る舞いなどを調べた。渋滞-非渋滞相転移ではいろいろな群速度を持つ渋滞相があることを示した。このようないろんな群速度を持つ渋滞相が存在できるのはモデルが車の速度変化に対して柔軟に対応できる性質が元になっている。これは車の速度変化がより柔軟に対応できるような状況のパラメーターを変えて作り出し、その状況でシミュレーションを行った結果、いろいろな群速度を持つ渋滞相が存在できる密度領域が広がったことから示唆される。また、相空間のトラジェクトリにはカオス的なストレンジアトラクタが存在する。これは交通流がカオス的であることを示している。しかし、これはランダムネスが全くない系では存在せず、初期配置のランダムネスや希望速度の分布によってカオス的になっていると考えられる。だが、実際の交通流ではこのようなランダムネスが非常に多くあり、このような状況でカオス的になって

いるということは十分に考えられる。これ以外では初期配置や初期速度にランダムネスがまったく存在しない系を考え、シミュレーションした。ここでは速度の写像が三つあることを反映した相転移を二つ見つけた。また、ランダムネスがない系とある系を比較するとランダムネスがある系の方が、転移点が低密度側にシフトする。この結果は今構成したモデルに対する結果であるが、実際の交通流でもこのようなことが起こっていると考えられる。現在使用されているような車を使っている限りは、排除体積の効果と、タイムラグの効果から必ず高密度では渋滞がおきる。だが今の結果からいえることは渋滞の発生を遅らせることは交通流のランダムネスをできるだけ減らすことで可能である。

いまモデルを結合写像格子の概念を用いて構成したが、ここで構成したモデルが唯一であるわけではない。今構成したモデルは速度を与える写像を実際の現象を良く再現するように、いってみればきとうに作ったものである。だが、このようなモデルの構成の方法は今の交通流のような現象に対しては大変有効である。よりよい交通流のモデルを構成しようと思えば人間の実際の運転を記録しそのデータから速度の写像を数値的に構成すればよく、それをもちいてシミュレーションすれば、よりよく実際の交通流を再現することが可能である。このようなモデルの構成は従来のモデルの構成方法では難しかったため、従来のモデルで避けられなかった欠点をいろいろ避けることが可能になっている。例えば伝統的な追従モデルに対してはシミュレーションで起きる車同士の衝突が完全に避けられている。また、この衝突が避けられていることから、初期配置や速度のランダムネスの効果を調べることができる。交通流が伝統的な運動方程式やハミルトニアンで記述することができないといっているわけではないが、たとえば交通流のような問題では伝統的な方法よりもいま使った方法が有効であることがこの研究で明らかになったと思う。

第4章

まとめ

4.1 まとめ

この研究では、計算物理学的また統計力学的な手法をもちい一次元の交通流に対しモデルを構成しその研究を行ってきた。その時に、

「非線形な局所的相互作用を行なう簡単な要素が集まったときの非自明な集団のダイナミクス」

ということをキーワードとして考えた。ここで実際の交通流を再現するために新しいモデルを結合写像の概念をもちいて構成した。結合写像の方法をもちいるために今のモデルは連続空間、離散時間で記述される。このような構成的なモデルの構築は複雑な振舞いをする系に対して近年良く行なわれるようになってきている方法である。この新しい概念をもちいたモデルを構成しシミュレーションを行なった結果、実際の交通流で見られるようないろいろな群速度を持った渋滞相と、基本図における不連続性を再現した。この実際の観測と一致するような不連続性の再現は従来からあるモデルではできなかったものである。またこの新しいモデルはいままでのモデルでは難しかった交通流における運転手の個性の効果や初期配置などのランダムネスの効果調べることができる。そしてその効果を調べた結果、運転手の個性のようなランダムネスは交通流の渋滞の発生を早めることが示され、その結果として最大の交通流率が低くなることがわかった。この結果は現代の道路に発生する渋滞を緩和する方法を示唆している。モデルの結果がそのまま実際の道路に適用できるかどうかはわからないが、シミュレーションの結果は、道路に存在しているランダムネスを減らせば渋滞の発生を送らせることができることを示している。したがってこのように実際の交通流でも、車間距離や運転速度のランダムネスを減らすことができれば渋滞は緩和できる。またこれ以外にも、ランダムネスのない系でも車の排除体積の効果と前の車に対する反応時間の遅れから必ず高密度では渋滞が発生することがシミュレーションから示されている。この結果を実際の交通流に適用すると、渋滞をなくすことは不可能であることがわかる。したがって、渋滞をなくそうと思えば、排除体積の効果がなく反応時間の遅れもないような交通システムを考えなければならない。このようなものは車を使っているだけでは実現は不可能である。

この研究では計算物理の手法や統計物理の手法をもちいて、セルオートマトンや結合写像格子をもちいて構成したモデルの研究を行ってきた。そのとき結合写像格子をもちいた研究では、交通流に発生している現象の研究に重点をおいて研究した。その結果、交通流に発生している現象でまだ十分に理解されていなかった基本図における不連続性という現象を実際の観測によくあうような形で再現できた。これは工学への応用を考える上でも重要な結果である。また、この不連続性は物理的に見てもたいへん興味を持たれる現象である。この不連続性が現れる点は渋滞-非渋滞相転移の転移点にあっており、広い意味での自己組織化臨界現象やいわゆる「カオスの縁」に見られる現象があるかも知れない。今後研究すべき問題と

しては、交通流における $1/f$ ノイズの問題や交通流におけるカオスの振舞いの問題がある。交通のカオスの振舞いに対しては、今構成したモデルでも車にあるランダムネスのためにカオス的な振舞いが見られているが、これは実際の交通流に存在するカオス的な振舞いを積極的に肯定するようなものではなくさらに研究を行なう必要がある。また $1/f$ ノイズに関しても、閉じた系のシミュレーションで調べるには難しく、なにか良い方法を考える必要がある。また、ここで構成したモデルは交通流以外にも粉体流に应用することができる。実際に粉体流に関しても粗密波が発生しその群速度が正になることが実験的に知られているため、¹³⁾ 今のモデルを修正し粉体に適用すれば新しい知見が得られるかも知れない。

謝辞

この研究を通じて数々の助言と議論をして下さった共同研究者の大阪大学理学部 菊池 誠氏、研究室のボス、阿久津 泰弘 氏、また時田 恵一郎氏、永尾 太郎氏、研究室のメンバーに感謝します。また交通流に関する研究でいろいろ助言して下さい、佐賀大学工学部、只木 進一氏、愛知大学、坂東昌子氏、長谷部 勝也氏、卒業研究をおくって下さった東京大学、河原 三紀郎氏に感謝します。最後にこの研究をはじめる直接のきっかけを与えて下さった大阪大学、山中卓氏に感謝します。この研究は日本科学協会の研究助成を一部受けています。

参考文献

- [1] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld: "Self-Organized Criticality: An Explanation of $1/f$ Noise" *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 381.
- [2] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld: "Self-organized criticality" *Phys. Rev.* **A38** (1988) 364.
- [3] M. Bando, K. Hasebe, A. Nakayama, A. Shibata and Y. Sugiyama: "Structure Stability of Congestion in Traffic Dynamics" *Japan J. Indust. Appl. Math.* **11** (1994) 203.
- [4] 例えば、M. N. Barber: "Finite-size Scaling" in *Phase Transition and Critical Phenomena Vol.8* (C. Domb and J. L. Lebowitz eds., Academic Press, London, 1983) p145.
- [5] O. Biham, A. A. Middleton and D. Levine: "Self-organization and dynamical transition in traffic-flow models" *Phys. Rev.* **A46** (1992) 6124.
- [6] J. M. Burgers: *The Nonlinear Diffusion Equation* (Riedel, Boston, 1974).
- [7] E. Ryerson Case and Kenneth M. Williams: "Queen Elizabeth Way Freeway Surveillance and Control System Demonstration Project" *Transp. Res. Rec.* **682** (1978) 84.

- [8] J. M. del Castillo, P. Pintado, and F. G. Benítez: "A Formation for the Reaction Time Traffic Flow Models" in *Transportation and Traffic Theory*, C. F. Daganzo ed. (Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1993) p387.
- [9] Avishai Ceder: "A Deterministic Traffic Flow Model for the Two-regime Approach" *Transp. Res. Rec.* **567** (1976) 16.
- [10] R. E. Chandler, R. Herman, and E. W. Montroll: "Traffic Dynamics: Studies in Car Following" *Oper. Res.* **6** (1958) 163.
- [11] Tse-Sun Chow: "Operational Analysis of a Traffic-Dynamics Problem" *Oper. Res.* **6** (1958) 827.
- [12] J. A. Cuesta, F. C. Martínez, J. M. Molera and A. Sánchez: "Phase transitions in two-dimensional traffic-flow model" *Phys. Rev.* **E48** (1993) R4175.
- [13] 例えば J. O. Cutress and R. F. Pulfer: "X-Ray Investigations of Flowing Powders" *Powder Technol.* **1** (1967) 213.
- [14] B. Derrida, E. Domany and D. Mukamel: "An Exact Solution of a One-Dimensional Asymmetric Exclusion Model with Open Boundaries" *J. Stat. Phys.* **69** (1992) 667.
- [15] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim and V. Pasquier: "Exact solution of a 1D asymmetric exclusion model using a matrix formulation" *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** (1993) 1493.
- [16] 例えば S. Dietrich: "Wetting Phenomena" in *Phase Transition and Critical Phenomena Vol. 12* (C. Domb and J. L. Lebowitz eds., Academic Press, London, 1988) p1.
- [17] Dimitrios S. Dendrinos: "Urban Traffic Flows and Fourier Transforms" *Geographical Analysis* **25** (1994) 261.
- [18] Dimitrios S. Dendrinos: "Operating Speeds and Volume to Capacity Ratios: the Observed Relationship and the Fold Catastrophe" *Transpn. Res.* **12** (1978) 191.
- [19] John E. Disbro and Michael Frame: "Traffic Flow Theory and Chaotic Behavior" *Transpn. Res. Rec.* **1225** (1990) 109.
- [20] Said M. Easa: "Selectiong Two-Regime Traffic-Flow Model" *Transp. Res. Rec.* **869** (1983)
- [21] L. C. Edie: "Car-Following and Steady-State Theory for Noncongested Traffic" *Oper. Res.* **9** (1961) 66.
- [22] D. C. Gazis, R. Herman, and R. B. Potts: "Car-following theory of steady-state traffic flow" *Oper. Res.* **7** (1959) 499.
- [23] D. C. Gazis, R. Herman and R. W. Rothery: "Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow" *Oper. Res.* **9** (1961) 545.
- [24] M. Gell-Mann: *The Quark and the Jaguar adventures in the simple and the complex* (W. H. Freeman and Company, New York, 1994)
- [25] H. Greenberg: "An analysis of traffic flow" *Oper. Res.* **7** (1959) 79.

- [26] Fred L. Hall, Brian L. Allen, and Margot A. Gunter: "Empirical Analysis of Freeway Flow-Density relationships" *Transpn. Res. A* **20A** (1986) 197.
- [27] Fred L. Hall: "An Interpretation of Speed-Flow-Concentration Relationships Using Catastrophe Theory" *Transpn. Res. A* **21A** (1987) 191.
- [28] 例えば 早川 尚男、西森 拓、佐々 真一、田口 善弘: "粉体の物理とパターン形成" *日本物理学会誌* **49** (1994) 18. とその中の参考文献
- [29] R. Herman, E. W. Montroll, R. B. Potts and R. W. Rothery: "Traffic dynamics: Analysis of stability in car following" *Oper. Res.* **7** (1959) 86.
- [30] 例えば J. Hertz, A. Krogh and R. G. Palmer: *Introduction to the Theory of Neural Computation. A Lecture Notes Volume in the Santa Fe Institute Studies in the Science of Complexity* (Addison-Wesley, Redwood City, 1991) とその中の参考文献
- [31] 藤田 大二 編: "交通現象と交通容量" (技術書院、東京、1986)
- [32] 深田善樹: "位相空間の分布関数を用いた交通流表現" セルオートマトンモデルによる交通流のシミュレーションシンポジウム (1994)、講演概要集
- [33] N. Inui, A. Y. Tretyakov and H. Takayasu: "Universality of 1-Dimensional Reaction Models" *Fractals* **1** (1993) 480.
- [34] S. A. Janowsky and J. L. Lebowitz: "Finite-size effects and shock fluctuations in the asymmetric simple-exclusion process" *Phys.Rev.* **A45** (1992) 618.
- [35] S. A. Janowsky and J. L. Lebowitz: "Exact Results for the Asymmetric Simple Exclusion Process with Blockage" *J. Stat. Phys.* **77** (1994) 35.
- [36] D. Jarrett and Z. Xiaoyan: "The Dynamic Behavior of Road Traffic Flow: Stability or Chaos?" in *Applications of Fractals and Chaos* (A. J. Crilly, R. A. Earnshaw and H. Jones ed., Springer-Verlag, Berlin, 1993)
- [37] K. Kaneko: "Period-Doubling of Kink-Antikink Patterns, Quasiperiodicity in Antiferro-Like Structures and Spatial Intermittency in Coupled Logistic Lattice" *Prog. Theor. Phys.* **72** (1984) 480; "Spatiotemporal Intermittency in Coupled Map Lattice" *Prog. Theor. Phys.* **74** (1985) 1033.
- [38] K. Kaneko: "Overview of coupled map lattices" *CHAOS* **2** (1992) 279.
- [39] 例えば K. Kaneko ed.: *Theory and Application of Coupled Map Lattices* (Wiley, New York, 1993) とその中の参考文献
- [40] Mehran Kardar, Giorgio Parisi, and Yi-Cheng Zhang: "Dynamical Scaling of Growing Interfaces" *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986) 889.
- [41] 例えば 河原 三紀郎: "衝突回避を考慮した車両追従モデル" 私信 (東京大学工学部計数工学科第3講座卒業研究) 1994. とそのなかのモデルのレビュー.
- [42] B. S. Kerner and P. Konhäuser: "Cluster effect in initially homogeneous traffic flow" *Phys. Rev.* **E48** (1993) R2335.

- [43] B. S. Kerner and P. Konhäuser: "Structure and parameters of clusters in traffic flow" *Phys. Rev.* **E50** (1994) 54.
- [44] E. Kometani and T. Sasaki: "A safety index for traffic with linear spacing" *Oper. Res.* **7** (1959) 704.
- [45] 越正毅、岩崎征人、大蔵泉、西宮良一: "渋滞時の交通流現象に関する研究" 土木学会論文報告選集、第306号、1981年2月、59。
- [46] M. Koshi, M. Iwasaki, and I. Ohkura: "Some Findings and an Overview on Vehicular Flow Characteristics" in *Proceedings of the 8th International Symposium on Transportation and Traffic Flow Theory*, V. F. Hurdle and G. N. Stewart eds. (University of Toronto Press, Toronto, 1983) p403.
- [47] J. Krug and H. Spohn: "Universality classes for deterministic surface growth" *Phys. Rev.* **A38** (1988) 4271.
- [48] Reinhart D. Kühne and Richard Beckschulte: "Non-linearity Stochastics of Unstable Traffic Flow" in *Transportation and Traffic Theory*, C. F. Daganzo ed. (Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam, 1993) p367.
- [49] 例えば Christopher G. Langton: "Life at the Edge of Chaos" in *Artificial Life II A Proceedings Volume in the Santa Fe Institute Studies in the Science of Complexity* Christopher G. Langton, Charles Taylor, J. Doyné Farmer, and Steen Rasmussen eds. (Addison-Wesley, Redwood City, 1992) p41.
- [50] M. Leibig: "Pattern-formation characteristics of interacting kinematic waves" *Phys. Rev.* **E49** (1994) 184.
- [51] W. Leutzbach: *Introduction to the Theory of Traffic Flow* (Springer-Verlag, Berlin, 1988).
- [52] Thomas M. Liggett: "Ergodic theorems for the asymmetric simple exclusion process" *Trans. Amer. Math. Soc.* **213** (1975) 237.
- [53] Thomas M. Liggett: "Ergodic theorems for the asymmetric simple exclusion process II" *Ann. Prob.* **5** (1977) 795.
- [54] Thomas M. Liggett: *Interacting Particle Systems* (Springer-Verlag, New York, 1985)
- [55] M. J. Lighthill and G. B. Whitham: "On kinematic waves I. Flood movement in long rivers" *Proc. Roy. Soc. A* **229** (1955) 281.
- [56] M. J. Lighthill and G. B. Whitham: "On kinematic waves II. A theory of traffic flow on long crowded roads" *Proc. Roy. Soc. A* **229** (1955) 317.
- [57] T. Musha and H. Higuti: "The $1/f$ Fluctuation of a Traffic Current on an Expressway" *Jpn. J. Appl. Phys.* **15** (1976) 1271.
- [58] T. Musha and H. Higuti: "Traffic Current Fluctuation and the Burgers Equation" *Jpn. J. Appl. Phys.* **17** (1978) 811.

- [59] T. Nagatani: "Jamming transition in the traffic-flow model with two-level crossing" *Phys. Rev. E* **48** (1993) 3290.
- [60] T. Nagatani: "Traffic Jams and Shock Formation in Stochastic Traffic-Flow Model of a Two-Lane Roadway" *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 52.
- [61] T. Nagatani: "Effect of Jam-Avoiding Turn on Jamming Transition in Two-Dimensional Traffic Flow Model" *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 1228.
- [62] K. Nagel and M. Schreckenberg: "A cellular automaton model for freeway traffic" *J. Phys. I France* **2** (1992) 2221.
- [63] K. Nagel and H. J. Herrmann: "Deterministic models for traffic jams" *Physica A* **199** (1993) 254.
- [64] K. Nagel and S. Rasmussen: "Traffic at the edge of chaos" in *Artificial Life IV*, Rodney A. Brooks and Pattie Mase eds. (MIT press, Cambridge, 1994) p222.
- [65] Francis Navin and Fred L. Hall: "Understanding Traffic Flow At and Near Capacity" *ITE Journal*, August, (1989) 31.
- [66] Francis Navin: "Traffic Congestion Catastrophes" *Transportation Planning Technology* **11** (1986) 19.
- [67] G. F. Newell: "Nonlinear Effects in the Dynamics of Car Following" *Oper. Res.* **9** (1961) 209.
- [68] G. F. Newell: "Theories of instability in dense highway traffic" *J. Oper. Res. Japan* **5** (1963) 9.
- [69] H. Nozawa: "A neural network model as a globally coupled map and applications based on chaos" *CHAOS* **2** (1992) 377.
- [70] Harold J. Payne: "Models of Freeway Traffic and Control" *Simulation Council Proceedings* **1** (1971) 51.
- [71] Harold J. Payne: "Discontinuity in Equilibrium Freeway Traffic Flow" *Transpn. Res. Rec.* **941** (1985) 140.
- [72] L. A. Pipes: "An Operational Analysis of Traffic Dynamics" *J. Appl. Phys.* **24** (1953) 274.
- [73] I. Prigogine and F. C. Andrews: "A Boltzmann-like approach for traffic flow" *Oper. Res.* **8** (1960) 789.
- [74] A. Reuschel: *Zeits. d. Oestreich. Ing. u. Arch. Vereines* **95** (1950) 59 and 73; *Oesterreich. Ing. Archiv.* **4** (1950) 193
- [75] Paul I. Richards: "Shock Waves on the Highway" *Oper. Res.* **4** (1956) 42.
- [76] 例えば P. Ruján: "Cellular Automata and Statistical Mechanical Model" *J. Stat. Phys.* **49** (1987) 139.
- [77] M. Schreckenberg, A. Schadschneider, K. Nagel, and N. Ito: "Discrete stochastic models for traffic flow" preprint, cond-mat/9412045 (accepted for publication in *Phys.Rev.E*)

- [78] G. Schütz: "Generalized Bethe Ansatz Solution of a One-Dimensional Asymmetric Exclusion Process on a Ring with Blockage" *J. Stat. Phys.* **71** (1993) 471.
- [79] H. P. Simão and W. B. Powell: "Numerical Methods for Simulating Transient, Stochastic Queueing Networks - I: Methodology" *Trans. Sci.* **26** (1992) 296.
- [80] S. Tadaki and M. Kikuchi: "Jam phases in a two-dimensional cellular-automaton model of traffic flow" *Phys. Rev.* **E50** (1994) 4564.
- [81] M. Takayasu and H. Takayasu: "1/f noise in a traffic model" *Fractals* **1** (1993) 860.
- [82] 例えば、R. Thom 著 彌永 昌吉、宇敷 重広 訳: 構造安定性と形態形成、(岩波書店、東京、1980)
- [83] S. Wolfram: "Statistical Mechanics of Cellular Automata" *Rev. Mod. Phys.* **55** (1983) 601.
- [84] 例えば S. Wolfram: *Theory and Applications of Cellular Automata* (World Scientific, Singapore, 1986)
- [85] S. Yukawa, M. Kikuchi and S. Tadaki: "Dynamical Phase Transition in One Dimensional Traffic Flow Model with Blockage" *J. Phys. Soc. Jpn.* **63** (1994) 3609.
- [86] S. Yukawa and M. Kikuchi: "Coupled-Map Modeling of One-Dimensional Traffic Flow" to appear in *J. Phys. Soc. Jpn.* **64** (1995) 35.

参考文献、

Harold J. Payne: "Models of Freeway Traffic and Control" *Simulation Council Proceedings* **1** (1971) 51.

A. Reuschel: *Zeits. d. Oestreich. Ing. u. Arch. Vereines* **95** (1950) 59 and 73; *Oesterreich. Ing. Archiv.* **4** (1950) 193

の二つは私が調べたところ国内では入手不可能なので未読である。