2次元動的破壊の安定性

中西 秀 (Keio Univ.)[1]
J.S. Langer(ITP, UCSB)
E.S.C. Ching(CUHK)

2次元モードI亀裂の動的安定性を調べるために、亀裂線上のストレス分布を計算した。用いたのは、亀裂先端部に凝集力を入れた連続体モデルである。その結果、亀裂線上 ($y = 0$) での$\sigma_{xx}(x, y = 0)/\sigma_{yy}(x, y = 0)$ の値は x によらず進展速度 vのみの関数で、いつも1よりも大きいことが示された。

1 背景

最近、直線亀裂の進行が動的に不安定になるのではないかという証拠が、実験 [1, 2] やシミュレーション [3, 4] によって見つかっている。理論的な解析としては、Yoffe[5] が速度 vで進行している亀裂先端のストレスの発散部分を計算し、ストレスの周方向の成分の最大角が、$v \approx v_R$(v_R:Rayleigh 速度) 以上で進行方向に対して 60^oにシフトすることを指摘した。また、Cotterell と Rice[6] は準静的直線亀裂の安定性を、亀裂先端でのσ_{xx}の正則部分 T:

$$\sigma_{xx}(x, y = 0) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi|x|}} + T + O(|x|^{1/2})$$

用いて議論した。亀裂はモード II の応力拡大係数 K_{II}がゼロになる方向に進行すると仮定して、$T >$のときに直線亀裂の進行が不安定になるという結果を得た。

しかしながら、これらの研究は亀裂のダイナミクスを扱っておらず、また、ストレスが亀裂先端で発散するモデルを用いているので、実際の亀裂の進展との関係は不明確である。そこで我々は、実際の亀裂のダイナミクスを直接調べる第一歩として、凝集力をいれたストレスの発散の無いようなモデルで、亀裂面でのストレスを計算した。

2 2次元弾性体

用いたモデルは、2次元弾性体の変位ベクトル$\vec{u}(x, y)$は、変位ポテンシャル$\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$を用いて

$$u_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \qquad u_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

のように表される。ストレスは、同様にポテンシャルの2階微分を用いて

$$\begin{aligned}
\Sigma_{xx} \equiv \frac{\sigma_{xx}}{2\mu} &= \left(\frac{\kappa}{2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}; \\
\Sigma_{yy} \equiv \frac{\sigma_{yy}}{2\mu} &= \left(\frac{\kappa}{2} - 1\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\kappa}{2}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}; \\
\Sigma_{xy} \equiv \frac{\sigma_{xy}}{2\mu} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2},
\end{aligned}$$

[1]present address: Department of Physics, Kyushu University

と表される。ここで、μはずれ弾性係数で、κは縦音波と横音波の音速の比の2乗。

ここで、亀裂を生じさせるための外部ストレスを加えると、変位ポテンシャルは、

$$\begin{aligned}\Phi(x,y,t) &= \frac{1}{2}\left(\varepsilon_\infty^{(1)}x^2+\varepsilon_\infty^{(2)}y^2\right)+\phi(x,y,t),\\ \Psi(x,y,t) &= \psi(x,y,t).\end{aligned}$$

ここで、$\epsilon_\infty^{(1)}$と$\epsilon_\infty^{(2)}$ を含む項は外部ストレス

$$\Sigma_\infty^{xx}\equiv\left(\frac{\kappa}{2}\right)\epsilon_\infty^{(1)}+\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)\epsilon_\infty^{(2)},\qquad \Sigma_\infty^{yy}\equiv\left(\frac{\kappa}{2}-1\right)\epsilon_\infty^{(1)}+\left(\frac{\kappa}{2}\right)\epsilon_\infty^{(2)}$$

を表す。すると、関数ϕとψは、波動方程式

$$\ddot{\phi}=\kappa\nabla^2\phi;\qquad \ddot{\psi}=\nabla^2\psi.$$

を満たす。ここで、横波の音速を1とスケールした。

亀裂は、x軸に沿って$-x$方向に速さvで進行していると仮定し、亀裂先端を原点に固定した亀裂と共に動く座標系で考える。すると、定常解は

$$\beta_l^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0;\qquad \beta_t^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0;\quad \text{ただし}\quad \beta_l^2\equiv1-\frac{v^2}{\kappa};\quad \beta_t^2\equiv1-v^2$$

を満たし、その一般解は

$$\phi^{[\pm]}(x,y)=\int\frac{dk}{2\pi}\,\hat{\phi}^{[\pm]}(k)\,e^{\mp\beta_l|k|y+ikx},\qquad \psi^{[\pm]}(x,y)=\int\frac{dk}{2\pi}\,\hat{\psi}^{[\pm]}(k)\,e^{\mp\beta_t|k|y+ikx}$$

と表される。ここで[±]の添字は、解がそれぞれ上半面及び下半面に対応することを示す。

3 ストレス場

問題の対称性より、

$$\begin{aligned}U_S(x) &\equiv \frac{1}{2}\left(u_x^{[+]}(x,0)-u_x^{[-]}(x,0)\right)=0;\\ \delta\Sigma_{yy}(x) &\equiv \frac{1}{2}\left(\Sigma_{yy}^{[+]}(x,0)-\Sigma_{yy}^{[-]}(x,0)\right)=0;\\ \Sigma_{xy}(x,0) &= 0\end{aligned}$$

となることがわかるが、これより

$$\hat{\phi}_S(k)\equiv\frac{1}{2}\left[\hat{\phi}^{[+]}(k)-\hat{\phi}^{[-]}(k)\right]=0;\qquad \hat{\psi}_S(k)\equiv\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}^{[+]}(k)+\hat{\psi}^{[-]}(k)\right]=0$$

を示すことが出来る。

一方、

$$\hat{\phi}_N(k)\equiv\frac{1}{2}\left[\hat{\phi}^{[+]}(k)+\hat{\phi}^{[-]}(k)\right];\qquad \hat{\psi}_N(k)\equiv\frac{1}{2}\left[\hat{\psi}^{[+]}(k)-\hat{\psi}^{[-]}(k)\right]$$

によって定義される量は、亀裂の開口変位

$$U_N(x)\equiv\frac{1}{2}\left[u_y^{[+]}(x,0)-u_y^{[-]}(x,0)\right]$$

の Fourier 変換によって

$$\hat{\phi}_N(k) = \frac{\beta_0^2}{\beta_l}\frac{2}{v^2}\frac{1}{|k|}\hat{U}_N(k); \qquad \hat{\psi}_N(k) = \frac{2i}{v^2}\frac{1}{k}\hat{U}_N(k)$$

のように表される。

これらの結果を用いると、亀裂面でのストレスの Fourier 変換は

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_{xx}(k, y=0) &= \Sigma_\infty^{xx}2\pi\delta(k) + \left\{\left[-\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \left(\frac{\kappa}{2}-1\right)\beta_l^2\right]\frac{\beta_0^2}{\beta_l} + \beta_t\right\}\frac{2}{v^2}|k|\hat{U}_N(k)\\ \hat{\Sigma}_{yy}(k, y=0) &= \Sigma_\infty^{yy}2\pi\delta(k) + \left\{\left[-\left(\frac{\kappa}{2}-1\right) + \left(\frac{\kappa}{2}\right)\beta_l^2\right]\frac{\beta_0^2}{\beta_l} - \beta_t\right\}\frac{2}{v^2}|k|\hat{U}_N(k)\end{aligned}$$

のように求めることが出来る。これより直ちに、亀裂線上 $(x=0)$ でのこれらのストレスの比は

$$\begin{aligned}\frac{\Sigma_{xx}(x, y=0) - \Sigma_\infty^{xx}}{\Sigma_{yy}(x, y=0) - \Sigma_\infty^{yy}} &= \frac{\left[-\left(\frac{\kappa}{2}\right) + \left(\frac{\kappa}{2}-1\right)\beta_l^2\right]\frac{\beta_0^2}{\beta_l} + \beta_t}{\left[-\left(\frac{\kappa}{2}-1\right) + \left(\frac{\kappa}{2}\right)\beta_l^2\right]\frac{\beta_0^2}{\beta_l} - \beta_t}\\ &\approx 1 + \frac{\kappa^2+1}{2\kappa(\kappa-1)}v^2 \qquad (v \ll 1)\end{aligned}$$

のように求められる。

これは、$v=0$ で 1 となる単調増大関数で、Rayleigh 速度で発散する。亀裂先端付近では、Σ_{yy} は限界ストレス程度の大きさになっているので Σ_∞ は無視できるから、これは $\Sigma_{xx} > \Sigma_{yy}$ となっていることを示している。

この結果は $v > 0$ で直線亀裂がいつも不安定であることを強く示唆する。

参考文献

[1] J. Fineberg, S.P. Gross, M. Marder, and H.L. Swinney, Phys. Rev. Lett. **67**, 457, (1991); Phys. Rev. B **45**, 5146 (1992).

[2] S.P. Gross, J. Fineberg, M. Marder, W.D. McCormick, and H. Swinney, Phys. Rev. Lett. **71**, 3162 (1993).

[3] F. Abraham, D. Brodbeck, R.A. Rafey, and W.E. Rudge, Phys. Rev. Lett. **74** 272 (1994). See also B.L. Holian and R. Ravelo, Phys. Rev. B **51**, 275 (1995).

[4] M. Marder and X. Liu, Phys. Rev. Lett. **71**, 2417 (1993).

[5] E. Yoffe, Phil. Mag. **42**, 739 (1951).

[6] B. Cotterell and J.R. Rice, Int. J. Fracture **16**, 155 (1980).