非平衡の量子力学の量子トンネリング
— 不安定系への応用 —

森川 雅博
お茶の水大学 理学部物理
〒112 東京都文京区
大塚 2-1-1
電子メール: hiro@phys.ocha.ac.jp

要旨

この論文では，ある条件のもとに量子力学を古典統計力学で近似し，それを用いて実時間で量子トンネル現象を調べる．初めに，外界と結合した量子力学系において散逸の果たす役割をみる；拡散項はエントロピーを常に増大させるが摩擦項は反対にエントロピーを減少させる．これから，漸近的にエントロピー変化が無いパラメターを選べる．すると同時に，エネルギーもまた変化しないことが解る．さらに，量子力学的２点相関関数（の実部）がうまく再現されることを示す．この系を Fokker-Planck 方程式で記述し，これを涌き出し-吸い込みの境界条件のもとに鞍点法で解く．まず環境系の結合しない量子力学の場合の簡単なモデルについて解いて，これをよく知られたインスタントンの方法の結果と比べる．さらに実際に散逸がある時に，摩擦項は遷移確率を減少させるが，拡散項はそれを増加させる事を議論していく．

1 導入

物理的系は根源的には量子力学で記述されるはずだが，その系に実際実現される様々な構造に対して古典論的な記述が成功する．このような量子-古典対応が物理の様々な場面で現れる．例えば，マクロ量子効果，量子カオス，散逸のある系での量子トンネル現象，宇宙の波動関数の古典化，宇宙の初期密度揺らぎの発生とその古典化など．これらに共通しているのは，量子論で記述される系がその時間発展とともに古典論によって記述してもいい状態に自発的に還元されていく事である．ただし，古典的といっても単に$\hbar \to 0$ あるい

は N(量子数) $\to \infty$ という操作を人為的にするというのではないし，例えそうしたところで古典化は必ずしも実現しない．物理系が自発的に量子相関を喪失し，古典的な記述を可能にするＣ数と看做し得る力学変数が発生することを記述しなければならないのである．

一方逆に，この古典-量子対応を使って，純粋な量子力学を古典的に表現することが有用なことがある．例えば，我々がこれから述べようとする量子トンネル現象である．純粋に量子力学の中だけで考えているうちは特に問題はない．量子トンネル確率を計算するインスタントンの方法が確立している．つまり，トンネル確率の表式に時間を虚数にして鞍点法を適用するのである．しかしひとたび系に散逸が入ったとき，議論は複雑である．

よくある議論はこうである [1]．まず，量子力学の枠組みから整合的に散逸を表現するために，閉じた全体系をトンネル現象を起こす着目系とそれと結合した環境系との２つに分ける．２つの系は双線形相互作用をしているとする．環境系は，熱平衡で適当なスペクトルを持った無限個の調和振動子からなるとする．まず環境系を積分して着目系の有効作用を求める．このままではトンネル確率を見積もるのは難しい．ところが時間を虚時間に解析接続してやると表式に鞍点が現れるのでこの周辺でだけ積分するという近似が使える．実際にこれを遂行すると，この鞍点での作用は環境系との結合によって増大し常にトンネル確率は減少する事になる．つまり摩擦はトンネル確率を減少させるというのである．

しかし一般に，環境系との結合の効果は摩擦だけではない．時間反転を破る摩擦効果の他に，量子相関を壊す拡散の効果，ハミルトニアンのパラメターを変える繰込みの効果などが存在する．それぞれの項は，a) 摩擦効果は着目系の運動を鈍らせ遷移確率を減少させる．b) 逆に，拡散効果は着目系に外界からランダムなエネルギーを注入して，遷移確率を増大させる．c) 繰込みの効果によって，着目系を特徴づけるパラメターが変わり，遷移確率は変化する．だから，上の様に a) のみを強調するのは不十分だ．

困った事に，これら b),c) の効果まで取り入れようとすると奇妙な事が起こる．時間をトンネル確率が収束するように解析接続すると，まず摩擦項が消えてしまう．そして拡散項は着目系の有効作用の中に，トンネル確率を減少させる符号で入ってくることになる．これは直観に全く反している．

この困難は意味不明な虚時間を導入する限り解決しないと思われる．だから初めから最後まで実時間で考えてみたくなる．この問題を考えるためにこの報告では，まず２節で量子-古典対応を一般に考えてみる．特に，古典化するとはどういう事かを明確に定義する．３節では，トンネル確率を計算する上で必要な条件の基に，量子力学系が古典統計力学系で近似できる事を示す．４節ではこれらの議論を，量子トンネル効果を実時間で解析する事に応用する．つまり量子力学的遷移振幅をいきなり考えるのではなく，対応する Fokker-Plank 方程式をトンネル遷移現象を表わす境界条件のもとで解いて，確率の定常的な流れを計算するのである．簡単なモデルで，我々の方法と虚時間（インスタントン）の方法の結果を比べる．５節はまとめと今後の課題である．

2 散逸系の時間発展と古典化の指標

“古典的な系”を定量的に議論するために，初めに散逸系の時間発展の方程式を局所近似のもとに現象論的に考えてみよう．着目系の密度行列$\rho(t)$の時間発展は，

$$\begin{aligned}\dot{\rho}(x,x';t) &= \Big[\frac{i}{2m}(\partial_x^2-\partial_{x'}^2)-i\frac{m}{2}\omega^2(x^2-x'^2)-i(v(x)-v(x'))\\ &\quad -\epsilon x_\Delta(\partial_x-\partial_{x'})-\Lambda x_\Delta^2\Big]\rho(x,x';t).\end{aligned} \tag{1}$$

と書ける．ここで，$\rho(x,x';t)\equiv\langle x|\rho(t)|x'\rangle$, $2x_C=x+x'$, そして$x_\Delta=x-x'$である．また，変数$v(x),m,\omega,\epsilon$, そしてΛ達はそれぞれ着目系のポテンシャル，質量，振動数，摩擦係数，そして拡散係数である．量ϵ, Λは通常正である．この表式はCaldeira-Leggat達の議論[2]から得られた表式に，非局所的積分核を高温極限などを取って局所化したものである．これは散逸を含んだ表式ではあるが全確率は保存する：$d\mathrm{Tr}\rho/dt=0$.

以下では主にガウス近似の密度行列を考える:

$$\rho(x,x',t)=\exp[-\alpha^2x_C^2+i\beta x_Cx_\Delta-\gamma^2x_\Delta^2+\lambda]. \tag{2}$$

ここで，α, β, γ, λは時間に依存した実数変数である．すると上の時間発展方程式(1)は

$$\begin{aligned}\frac{d\alpha^2}{dt} &= -\frac{2}{m}\beta\alpha^2\\ \frac{d\beta}{dt} &= \frac{4}{m}\alpha^2\gamma^2-\frac{1}{m}\beta^2-2\epsilon\beta-m\omega^2\\ \frac{d\gamma^2}{dt} &= -4\epsilon\gamma^2+\Lambda-\frac{2}{m}\beta\gamma^2,\end{aligned} \tag{3}$$

となる．ここで，λは規格化因子である．これを変数x_Cから新しい変数qにフーリエ変換すると，密度行列は

$$\rho(x_\Delta,q;t)=\exp[-A(t)x_\Delta^2-2B(t)x_\Delta q-C(t)q^2-D(t)] \tag{4}$$

となり，時間発展方程式(3)は

$$\begin{aligned}\dot{A} &= -4\epsilon A-2m\omega^2B+\Lambda,\\ \dot{B} &= m^{-1}A-2\epsilon B-m\omega^2C,\\ \dot{C} &= 2m^{-1}B,\\ \dot{D} &= 0\end{aligned} \tag{5}$$

かつて提案された様々な古典化の指標は，結局のところ次の２つにまとめる事ができる：a) 量子的相関の崩壊(= 量子デコヒーレンス)，それからb) 位相空間の中での正準変数の組の間の明確な関数関係(= 古典相関条件)．次のこれらを個別にみてみよう．

◆ 量子デコヒーレンス条件

環境系は着目系に対して常にランダムな摂動を与える．そしてこのランダムさの為に着目系が初めに持っていた量子力学的相関が次第に失われ行く．つまり次第に量子力学特有の相関が消えていき，直観的な古典力学的論理が使えるようになっていく．このように量子相関の喪失は着目系がどれだけ古典化しているかの良い指標になる．定量的には，着目系の密度行列ρに対して線形エントロピー$\delta_{QD} := \mathrm{Tr}\rho^2$とか統計的エントロピー$S := -\mathrm{Tr}\rho\ln\rho$が考えられる．指標$\delta_{QD}$は，純粋状態では，密度行列$\rho$が射影演算（$\rho^2 = \rho$）なので，1になる．一方，混合状態では1より小さくなり，極限では0に近づいていく．従ってこの指標の小さな値ほど古典化が進んでいる事になる．他方の統計的エントロピーSは純粋状態では1であるが，古典化するに連れて幾らでも増大する．これらの指標は正準変数の選択に依存しない不変な量である．方程式(1)で与えられる系に対して，

$$\begin{aligned} \delta_{QD} &= (AC - B^2)^{-1/2}/2, \\ S &= \frac{1}{2}\tilde{\omega}\coth(\tilde{\omega}/2) - \ln(2\sinh(\tilde{\omega}/2)), \end{aligned} \tag{6}$$

である．ここで$\tilde{\omega} = 2\ \mathrm{arccoth}(2/\delta_{QD})$である．これは，ポテンシャル項や質量項などには依らない．また，比$\Delta\delta_{QD}/\Delta S$が常に負であることは，2つの指標$\delta_{QD}$と$S$が整合的である事を表わす．

◆ 古典相関条件

古典化のもう1つの指標は，位相空間の中で系が描くトラジェクトリーがどれだけシャープかという事である．もちろん，系が古典的に記述される為には位相空間の中のトラジェクトリーがはっきり決まらなければならない．この古典化の条件は例えば，外力によって系がスクイーズド状態またはコヒーレント状態になっているときに実現する．またこの条件は一般にWKB近似が使える条件でもある．ただし，この指標は正準変数の選び方に強く依存する．ガウス型の密度行列(2)を，変数x_Δに関してフーリエ変換する事によって新しい変数pを持ったウィグナー関数ができる：

$$W(x_C, p, t) = \frac{\alpha}{\gamma}\exp\left[-\frac{(\beta x_C - p)^2}{4\gamma^2} - \alpha^2 x_C^2\right]. \tag{7}$$

これから問題になっている位相空間の中でのトラジェクトリーの鮮明さは，例えば変数pの分散とその平均との比$\delta_{CC} := 2\alpha\gamma/|\beta|$によって表現される事が解る．

密度行列の方程式(1)から，上で得られた古典化の指標に対する時間発展方程式が書ける．指標δ_{QD}については，

$$\dot{\delta}_{QD} = \epsilon\delta_{QD} - 2\Lambda\mathrm{Tr}(x^2\rho^2 - (\rho x)^2). \tag{8}$$

となる．これから，ϵに比例する摩擦項は古典化を阻害し，Λに比例する拡散項は古典化を促す．少なくともガウス型の状態に対しては指標Sで見ても同じ事が言える．実際，

$$\dot{S} = -\epsilon\tilde{\omega}\coth(\tilde{\omega}/2) + 2\tilde{\gamma}^2\Lambda \tag{9}$$

である．摩擦による第１項は負，拡散による第２項は正である．散逸系において摩擦がエントロピーを減少させるというのは直観に反する様に思えるかもしれない．しかし我々が普通に“散逸系においてエントロピーが増大する”と称しているのは拡散の効果である．系が平衡に落ち着いた時のエントロピーの平衡値は，摩擦項と拡散項のバランスで決まる有限の値なのである．この平衡値は通常の揺動散逸関係があればただ温度だけによって特徴づけられる．もし摩擦が存在しなければ，エントロピーは幾らでも増大しあらゆる構造は安定に存在し得なくなるだろう．

3　量子力学を古典統計力学で近似する事

前節２で散逸系の摩擦項はエントロピーを減少させる事をみた．つまり散逸系だからといって常に量子相関が壊れていくだけではないのである．この事実は，量子相関の存在によって特徴づけられる量子力学系を，古典統計力学で現象論的に近似できるのではないかという期待を抱かせる．これから実際そうできる事を順次みていこう．

量子力学を古典力学で表現しようとする試みは，色々な動機のもとに，沢山の論文がある．例えば文献 [3] を参照．直観的には，散逸系の揺動や摩擦は量子コヒーレンスを壊し１方的にエネルギーを散逸させるために，決定論的な量子力学と完全に相容れない物であると思われている．実際にはそうではない事をこれから我々は示して行こう．[1]

我々は，古典的着目系が量子的環境系に結合しているモデルを現象論的に考える．着目系自身は古典系だが，その環境系との結合が単純に双線形である場合は，環境系の量子的性質をそのまま着目系に遺伝させる事ができる．具体的には，１次元古典系 $x(t)$ が無限個の量子調和振動子と双線形結合している場合に，Caldeira -Leggett の形式 [2] を使えば，縮約された着目系の密度行列$\rho(x,x';t)$ に対する有効運動方程式が得られる．オーミックな環境系のスペクトルを考えて，積分核に関して局所近似[2]を取れば $x(t)$ に対する Fokker-Planck 方程式の摩擦項-拡散項はそれぞれ

$$\begin{aligned} \epsilon &= \hbar\eta/(2m), \\ \Lambda &= (\hbar\eta\omega/2)\coth(\hbar\omega/(2kT)) \end{aligned} \qquad (10)$$

となる．ここで，m, η, そして Tはそれぞれ系の質量，双線形結合の強さ，そして環境系の温度である．摩擦係数ϵは温度と無関係である．拡散係数Λは零温度極限で$\Lambda = \hbar\eta\omega/2$ となる．どちらもゼロ温度においても有限に留まる所に注目してほしい．

[1] このような試みが幾つかある．例えば宇宙初期のストカスティックインフレーションモデル [4] において，場の短波長成分を粗視化する事によって Fokker-Planck 方程式を導き，これから計算された相関関数が場の理論的に導かれた表式を正しく再現する．また，Streater[5] では，散逸系に量子雑音を付け加える事によって物理量の正しい正準交換関係を回復している．

[2] 後に実時間量子トンネル効果の議論で必要になるのは定常解である．従って解のゆっくり変動する漸近的挙動が解れば充分なので，積分核を局所化する近似が良い．

3.1 ガウス状態の場合

まず初めに，ガウス状態で相互作用ポテンシャルが無い簡単な場合を考えよう．方程式系 (3) に対して上に述べた零温度の摩擦拡散係数を用いれば，$\omega^2 > 0$ そして $\epsilon > 0$ である限り，δ_{QD} は 1 に漸近していく事が解る．エントロピー保存のためには摩擦 (ϵ) と拡散 (Λ) の間に特別な関係が要るのである．同じ極限のもとで，平均エネルギーも外力が無ければ同様に保存する：

$$\frac{d\langle \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\rangle}{dt} \to 0. \tag{11}$$

ϵとΛが上の関係を満たせば，摩擦によるエネルギー損失は拡散によエネルギー流入と完全にバランスするのである．

さらに，量子相関関数もこの古典統計力学系から正しく再現されるのである．方程式 (1) に対応する Langevin 方程式は

$$m\ddot{x} + m\omega^2 x + 2\epsilon m\dot{x} = \xi \tag{12}$$

となる．ここでランダム力の相関は $\langle\xi(t)\xi(t')\rangle_\xi = 2\Lambda\delta(t-t')$ によって与えられる．これから変数 $x(t)$ の相関関数が，$\epsilon \to 0$ の極限で，

$$\langle x(t)x(t')\rangle_\xi = \frac{\Lambda}{4m^2\epsilon\omega^2}\cos(\omega(t-t')). \tag{13}$$

となる事が解る．これはϵ と Λの間に上の関係があれば $\cos(\omega(t-t'))/(4m\omega)$ となる．これはまさしく量子力学での相関関数の対称部分である: $\mathrm{Re}\langle x(t)x(t')\rangle$. [3]またもう一つの古典化の指標であった$\delta_{CC}$に関しても，漸近的にほぼ 1 の大きさになることが示せる．だから，この指標で評価しても系が量子力学的に振舞う事がみてとれる．

このように，摩擦 ϵと拡散Λの間の特別な関係を設定すれば，量子デコヒーレンスや古典相関から見ても，エネルギー保存や相関関数から見ても，この古典統計力学系は漸近的に量子力学を良く近似する事が解る．

3.2 非ガウス的状態の場合

もっと一般に非ガウス的状態でも考えてみよう；どれだけ量子力学を古典統計力学で近似できるだろうか? 統計力学の変数 $x(t)$ に関する n 点相関関数を与える母関数は Langevin 方程式をそのランダム力に関して平均する事によって得られる:

$$\begin{aligned} Z(J) &= \int[dx_C]\int[d\xi]\exp[-\int dt(\xi^2/2\Lambda)] \\ &\quad \times\delta(m\ddot{x}_C + m\omega^2 x_C + 2\epsilon m\dot{x}_C - \xi + V'(x_C)) \\ &= \int[dx_C]\int[\frac{dx_\Delta}{2\pi}]\exp[i\int x_\Delta V'(-i\delta_J)] \\ &\quad \times\exp[i\int x_\Delta(m\partial_t^2 + m\omega^2 + 2\epsilon m\partial_t)x_C + iJx_C - \frac{\Lambda}{2}\int x_\Delta^2]. \end{aligned} \tag{14}$$

[3]今は変数 $x(t)$ が C 数なので，相関関数の反対称部分はもちろん再現できない．

この表式は，x_Δ, x_Cに関して積分してしまうと，

$$Z(J) = \exp[-i\int x_\Delta V'(-i\delta_J)]\exp[-\frac{\Lambda}{2}\int(SJ)^2]|_{x_\Delta\to SJ} \tag{15}$$

となる．ここで，$S=(m\partial_t^2+m\omega^2-2\epsilon m\partial_t)^{-1}$である．この母関数は対応する量子力学の相関関数に関する母関数によく似ている．実際，$\epsilon\to 0$ の極限では，以下の点を除いて同一である．a) 統計力学においてのプロパゲーターは量子力学のプロパゲーターの対称部分である: $Re\langle x(t)x(t')\rangle$． そして，b) 統計力学のすべての結節点は少なくとも 1 つの外場が結合している；つまり内点が存在しない．一方量子力学ではそのような制約は無い．b) の点に関しては量子-古典系の違いは 3 個又はそれ以上のループを含むグラフにおいて顕著になる．従って，我々が以降使おうと考えている準古典近似においては，この違いは重要ではないことになる．

4 量子トンネル現象への応用

さて，前節まで考察してきた，量子力学系を古典統計力学で近似する議論を量子トンネル現象の解明に応用してみよう．我々の方法では虚時間を用いる必要が無く，初めから終わりまで実時間で解析できるという特徴がある．この実時間で解析する方法の利点は 3 点あげられる: a) トンネル自由度に結合する環境系からもたらされる幾つかの散逸効果 (摩擦，拡散，繰込み) をそれぞれ独立に考察する事ができる．b) トンネル前後だけでなく，トンネルしている途中の系の物理的状態を考察する事ができる．c) トンネル時間が実験毎に違うだろうが，この時間の分散などを求められるだろう．そしてこれを実験と比較する事ができるだろう．ここでは，まず我々の方法が温度ゼロのときに既存のインスタントンの方法と整合的かどうかをまず確かめてみたい．

前節での近似では，量子力学系の量子揺らぎは Fokker-Planck 方程式の拡散項として表現されていた．だから，量子揺らぎによって系がポテンシャル障壁をトンネルするという現象は，古典統計力学の言葉でいえばランダム力に因ってポテンシャル障壁の上を乗り越えて遷移するという描像になる．この後者の問題は古くからの典型的な統計物理の問題であって既に完成した理論がある; 特に参考文献 [6]．我々は以下この良く整理された方法に従う．詳細はこの文献 [6] を参照．

統計力学変数の場$\varphi(\vec{x},t)$ とその分布関数 $W[\varphi(\vec{x}),p_\varphi(\vec{x});t]$ を考える．ハミルトニアンは，

$$H=\int d\vec{x}[\frac{1}{2}(p_\varphi^2+(\nabla\varphi)^2)+\frac{1}{2}\mu^2\varphi^2+V(\varphi)] \tag{16}$$

を考えよう．ただし，ポテンシャル Vは安定点に相当する大局的最小値と共に，準安定点に相当する局所的最小値を持つとする．次のようなベクトル記法を用いる:

$$\begin{pmatrix}\varphi(\vec{x})\\ p_\varphi(\vec{x})\end{pmatrix}\to\eta(\vec{x}),\ \begin{pmatrix}\delta/\delta\varphi(\vec{x})\\ \delta/\delta p_\varphi(\vec{x})\end{pmatrix}\to\delta/\delta\eta(\vec{x}). \tag{17}$$

すると Fokker-Planck 方程式は簡潔に

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\int d\vec{x}\frac{\delta J(\vec{x})}{\delta\eta(\vec{x})} \tag{18}$$

と書ける．ここで確率流

$$J(\vec{x}) = -\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} (\delta_\varphi H)W + \frac{\lambda}{2\epsilon}(\delta_\varphi W) \\ (\delta_p H)W + \frac{\lambda}{2\epsilon}(\delta_p W) \end{pmatrix} \tag{19}$$

を定義した．準安定状態からポテンシャル障壁を越えて安定状態に遷移する確率は通常次のような計算で求められる．定常的に遷移を起こしている Fokker-Planck 方程式の解は，準安定状態に涌き出し，安定状態のところに吸い込みがあるという境界条件のもとで求められる．確率流はほぼ確実に鞍点の配位$\bar{\eta}(\vec{x})$ を通過する．従って全遷移確率はこの確率流を鞍点の配位で積分してやればよい．まずこの Fokker-Planck 方程式の平衡解は

$$W_0[\varphi, p] = \exp[-\frac{2\epsilon}{\Lambda}H] \tag{20}$$

となる事に着目する．上の境界条件のもとで定常解を求めるために，いわゆる定数変化法を用いる．つまり，解が$\sigma\times$ (平衡解) という形を仮定する．そしてこの式を元の Fokker-Planck 方程式に入れて，σに対する運動方程式を鞍点$\bar{\eta}(\vec{x})$ の近傍で線形化して解く．これは，固有値問題として解けることが解る[4]．ここで１つだけ負の固有値が存在し，これはこの鞍点を通る最速降下経路に対応する．この方向への確率流を求めて積分すると全遷移確率は

$$I = \frac{|\kappa|}{2\pi}\left(\frac{2\pi}{|\lambda_1|}\frac{\Lambda}{2\epsilon}\right)^{1/2} Z_0^{-1}\exp[-\frac{2\epsilon}{\Lambda}\bar{H}]\prod_n{}'' \left(\frac{2\pi}{\lambda_n}\frac{\Lambda}{2\epsilon}\right)^{1/2} \tag{21}$$

と表わされる．ここで２重プライムは鞍点$\bar{\eta}$の回りでのハミルトニアンの正の固有値λ_nに関する和を表わす．また$\bar{H}$は鞍点で評価されたハミルトニアンである．最も重要な因子はやはり指数関数の肩である．この形から，次の事が明らかになる: a) Λで特徴づけられる拡散効果は遷移確率を大きくし, b) ϵで特徴づけられる摩擦効果は遷移確率を減少させ，そして c) ハミルトニアン$\bar{H}$の中の繰込み項も遷移確率を決定する重要な因子である．さて次にこの表式が通常の虚時間のインスタントンの方法と整合的かどうかを調べてみよう．まず完全な真空: 0 温度を考える．

4.1　１次元の系

簡単な１次元系から始める．ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H &= \frac{p^2}{2m} + V, \\ V &= \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{\lambda}{3!}x^3. \end{aligned} \tag{22}$$

で与えられる．大きさが $O(\hbar^3)$ 程度である$\lambda\partial_p^3$項を無視すると，Fokker-Planck 方程式は

$$\dot{W}[x,p;t] = \left[\frac{p}{m}\partial_x - V'(x)\partial_p + 2\epsilon\partial_p p + \Lambda\partial_p^2\right] W[x,p;t] \tag{23}$$

[4] この解はσの因子も平衡解の方も正定値，つまり全体に正定値である事がその具体的な形からわかる．従って確率分布関数として意味がある．

となる．準安定状態は $x=0$ に位置し，安定状態は $x\to+\infty$ にある．停留条件$\delta H=0$ によって決まる鞍点は$\bar{x}=2m\omega^2/\lambda$にある．もっとも，$\bar{x}$の回りに振動する停留解も存在するが，これは我々が求めようとしている解 Wが 定常であるという条件に合わないので捨てる．前節に現れたパラメターは，このモデルにおいては，

$$\begin{aligned}\kappa &= \epsilon-\sqrt{\epsilon^2+\omega^2}<0,\\ \lambda_1 &= -m\omega^2,\\ \lambda_2 &= 1/m,\\ \bar{H} &= \frac{2(m\omega^2)^3}{3\lambda^2}.\end{aligned}\tag{24}$$

などとなる．量子力学を再現するパラメターの条件 $2m\epsilon/\Lambda=2/\omega$を課して，弱い摩擦の極限$\epsilon\ll\omega$を考えると，遷移確率は

$$I=Z_0^{-1}\frac{\omega}{2}\exp[-\frac{4}{3}\frac{m^3\omega^5}{\lambda^2}]\tag{25}$$

となる．一方インスタントンの方法からは，虚時間での鞍点の作用で与えられる，指数関数の肩は$-(24/5)(m^3\omega^5/\lambda^2)$ となる．上の我々の方法と比べて，指数関数の肩の文字因子は一致している．その理由は多分以下のようである．振動数の逆数ω^{-1}は近似的に１つのインスタントンが虚時間軸に広かっているスケールを表わす．また実時間のハミルトニアンは虚時間のラグランジュアン密度である．だから，$2\bar{H}/\omega$ はユークリッド作用になる．しかしながら，指数関数の肩の数因子に関しては我々の数値はインスタントン法から得られたものより 5/18 だけ小さい．その理由は多分以下のようである．我々はポテンシャル $V(x)$ を鞍点の近傍で調和近似した．一方インスタントンの方法では，虚時間ではあるが，ポテンシャル全体の形が遷移確率に効く理論構造になっている． 従って，これらの差はポテンシャルの２次からのずれに依っていると考えられる．

4.2 $\lambda\phi^4$モデル

次に，スカラー場の理論における場合を考えてみる:

$$\begin{aligned}H &= \int d\vec{x}\left[\frac{1}{2}(\dot{\phi}^2+(\nabla\phi)^2)+V(\phi)\right]\\ V(\phi) &= \frac{\lambda}{8}(\phi^2-\frac{\mu^2}{\lambda})^2+\frac{\nu}{2a}(\phi-a).\end{aligned}\tag{26}$$

ここで，λ,μ,ν，そして $a(=\sqrt{\mu^2/\lambda})$ はそれぞれ結合定数，質量，２重谷ポテンシャル $V(\phi)$ にゆるやかな傾斜を与えるパラメター，そして谷の底での場の大きさである．我々の実時間の形式では鞍点は３次元実空間の中の薄い球対称泡 (条件$\mu^4\gg\lambda\nu$を課している) で，泡の内側で真の真空 (安定状態) 外側で偽の真空 (準安定状態) である．一方虚時間形式では鞍点は，４次元ユークリッド空間の中の球対称泡である．実時間形式で遷移確率に現れる指数関数の肩は

$$\exp[-\frac{2^5\pi}{\sqrt{3}\times3^4}\left(\frac{\mu^{12}}{\lambda^4\nu^3}\right)]\tag{27}$$

で与えられる．虚時間形式では，それは

$$\exp[-\frac{\pi^2}{6}\left(\frac{\mu^{12}}{\lambda^4\nu^3}\right)] \tag{28}$$

である．文字因子が一致する事は前と同じである．でもやはり数係数が合わない; 我々の数因子の方がインスタントン法のものよりほぼ1.64小さい．この不一致もやはり我々の方法がポテンシャルの全体ではなく，鞍点の近傍しか見ていない事に由来するものと思われる．

4.3 散逸の入った場合

今までは，我々の方法とインスタントンの方法を比較するために温度０の場合を計算してきたが，本来考察したかった散逸がある場合を簡単に見てみよう．第３節で使われた式(10) 及び，振動数のシフト [2]

$$\omega_R^2 = \omega^2 - \frac{2\Omega\eta}{\pi M} \tag{29}$$

を用いて遷移確率の指数関数部分を評価してみる．ここで，ω_Rは着目系の繰り込まれた振動数であり，Ω, ηはそれぞれ，環境系のスペクトルのカットオフ，スペクトルの強さである．温度が上昇すると拡散項が大きくなるために遷移確率は増大する．また，環境系と着目系との相互作用を強くすると，摩擦係数と拡散係数との比は不変だが，振動数が繰り込み効果で小さくなるのでやはり遷移確率は増大する．この単純な議論では，散逸が遷移確率を減少させる効果は見えないが，詳細は今後の課題とさせていただきたい．

5 まとめと発展

量子-古典対応を明らかにし，量子トンネル効果を調べるために実時間のままで議論できる方法を提唱した．まず量子-古典対応を明らかにするために，系が古典的に振る舞うという事を定量的に表現する２つの条件を考察した．つまり量子相関の崩壊及び古典相関の生成である．これに基づいて，漸近的に量子力学系を古典統計力学で近似できる事を示した．つまり，古典統計力学で系の分布関数を決める Fokker-Plank 方程式において，拡散項と摩擦項が $(\Lambda/\epsilon) = m\omega$という条件を満足すれば，漸近的にエントロピー-エネルギーが保存し，相関関数の対称部分を再現する事を示した．つまり，エントロピー-エネルギー収支に関して，摩擦-拡散項はお互いに逆の働きをするのである．これらのバランスでエントロピー-エネルギーの平衡値が決まってくる．これに基づいて，漸近的にはそして$\hbar$ の低次では量子力学を古典統計力学で近似できる事がわかった．

この事実に基づいて，量子トンネル効果を実時間で考察した．すると量子揺動はランダム力で置き換えられる．このランダム力が与えてしまうエネルギーやエントロピーを打ち消すのが同時に導入された摩擦項である．この事をもっと直観的に説明しよう．散乱問題などでエネルギーと時間の不確定性のために，中間状態に於いては必ずしもエネルギーが保存しない．エネルギーの保存が保証されるのは時間を無限大に取った極限である．このような仮想的な力学過程を Fokker-Plank 方程式で近似する事によって見える過程として取

り出して来て議論している事に相当するのである．ひとたびFokker-Plank方程式が得られれば，これをトンネルしているという境界条件のもとに解けば良い．Langerの方法によって，安定状態に涌き出し-準安定状態に吸い込みのある境界条件をおいてFokker-Plank方程式の定常解を鞍点法で求め，鞍点を通過する確率流を積分して全遷移確率を計算した．

この方法で得られた遷移確率は，虚時間のインスタントンの方法から得られたものと指数関数の肩の数係数を除いて一致する．数係数が一致しないのは，我々の方法の鞍点が，ポテンシャル全体の形状を見ていなくて単に鞍点近傍を見ているに過ぎないという近似の荒さに由来するものと思われる．この点，我々の方法の精密化が要求されるだろう．我々の表式から，拡散の効果は遷移確率を大きくし，摩擦の効果は小さくする．また繰り込みの効化も遷移確率に大きく影響する事がわかる．この事を定量的に調べていく事は我々の今後の目標の一つである．

量子トンネル現象に対応するFokker-Plank方程式の定常解が得られたわけだから，これから，遷移後-遷移中の系の状態を記述する事ができるだろう．虚時間の方法では，インスタントン解をその虚時間の中央で切り取りそこで時間を解析接続して実時間に直した解が，遷移後の系の状態として考えられて来た．我々の方法からこれを検討する事ができる．また，Fokker-Plank方程式のうまい非定常解が得られれば，より実際の量子トンネル現象を忠実に解析できるだろう．

我々の方法は確率過程量子化法に似ている．この方法は，仮想的な時間軸を４次元時空に付け加える．そして，この仮想的時間に関しての緩和過程を介して得られる漸近的な相関関数を求める事により量子力学的相関関数を求めようとする．我々の時間は現実の時間である点でこの確率過程量子化法と基本的に違うが，量子力学を表現する似た手法として確率過程量子化法は興味持たれる方法である．

参考文献

[1] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Annals of Physics, **149** 374 (1983).

[2] A. O. Caldeira and A. J. Leggett, Physica **121A** 587 (1983).

[3] J. -P. Vigier et al. in *Quantum Implications* Ed. by B. J. Hiley, Routledge & Kegan Paul, London 169 (1987).

[4] A. Starobinsky, in *Fundamental Interactions*, Ed. by V. N. Ponomarev (MGPI, Moscow) 55 (1983); A. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology*, Harwood Academic Publisher GmbH, Switzerland (1990).

[5] R. F. Streater, J. Phys. A. Math. Gen. **15** 1477 (1982).

[6] J. S. Langer, Ann. Phys. **41** , 108 (1967); **54** , 258 (1969).