情報消去と熱散逸
ーFokker-Planck 方程式からの導出ー

図書館情報大学　鎮目浩輔
〒305つくば市春日1ー2　図書館情報大学図書館情報学部
E-mail: shizume@ulis.ac.jp

要旨

Landauerはメモリに記憶された1ビットの情報の消去を行うと必ず$k_BT\ln 2$程度以上の熱散逸が起こることを主張した。しかしその正否に関してはなお議論が行われている。本研究ではメモリの基本的な物理的モデルにおいて、情報消去に伴う熱散逸の下限を定量的に調べる。このモデルは動的なポテンシャルのもとでブラウン運動を行う粒子を含む系であり、Langevin 方程式により記述される。そしてその粒子が受けるランダム力が白色ガウス的であり、従って粒子の確率分布の時間発展がFokker-Planck 方程式に従うならば、1ビットの情報消去に伴う熱散逸の平均の下限は正確に$k_BT\ln 2$になることを証明する。

§1. Introduction

1961年、Landauerは計算機の効率の物理的な限界について議論し、特に1ビットの情報の消去には少なくとも $k_BT\ln 2$程度以上の熱散逸が伴うことを主張した[Landauer 1961]。まず彼は、基本的な場合として1と0の二つの値を取りうるメモリを取り上げ、このメモリに対する情報消去を次で定義した：

・メモリにある決まった値（ここでは1とする）を書き込むこと。ただしこの際、メモリが元々保持していた値の痕跡を系のどこにも残してはならない。

この操作をLandauerにならい、Restore To One (RTO)と呼ぶことにする。定義から、RTO後はメモリの値は1に確定しており、それ以前に保持していた値を知ることは不可能になる。注意すべきは、「元々保持していた値の痕跡を系のどこにも残してはならない」である。例えばメモリの値を何らかの手段で観測し、もし0ならば1に変え、1ならば何もしない、という操作はRTOではない。なぜなら観測して得られた情報が観測者の脳に残ってしまうからである。

具体的に考えるために、メモリの基本的な物理的モデルを導入する。このモデルは、減衰をもち双安定状態と単安定状態の間を行き来する時間依存性を持つポテンシャルと、その中でブラウン運動をする粒子から構成される（図1）。ポテンシャルが双安定状態の場合には粒子は左右どちらかのポテンシャル最小点の周りに留まるので（双安定状態でのポテンシャル障壁は温度より十分高いとする）、粒子が右にあるときにはメモリの値は1であると定義し、左のときは0と定義すればこの系は1ビットの情報を保持するメモリとみなすことができる。

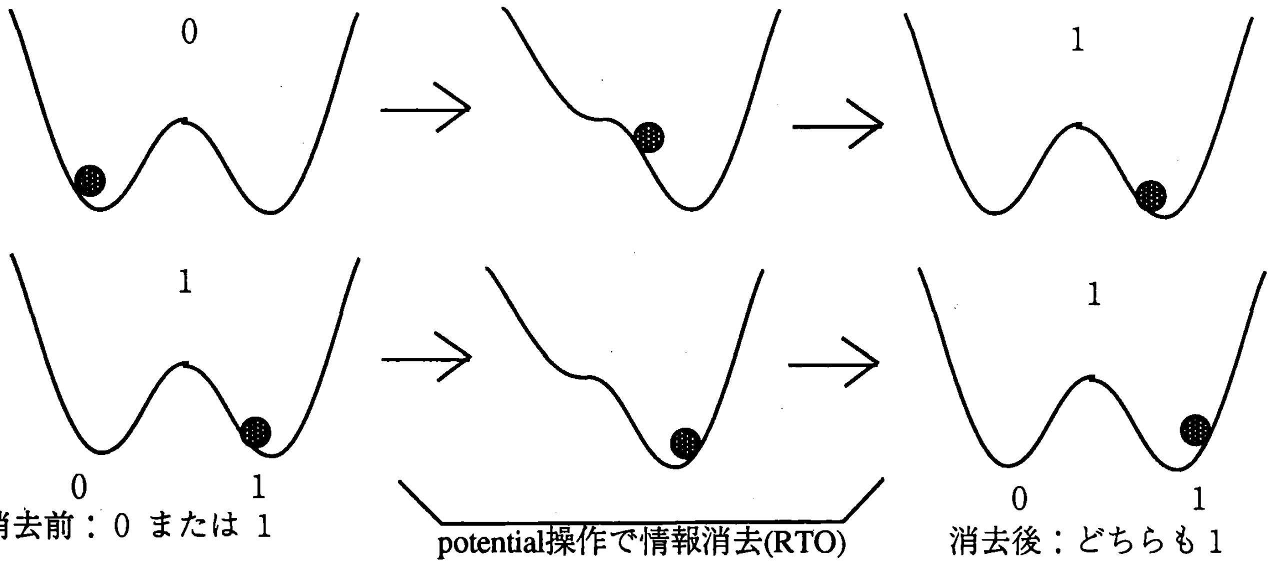

図1　メモリのモデルと情報消去過程

この場合にRTOを達成するには、図1のように、ポテンシャルを適当に操作して粒子を右側に「落とし」、その後また双安定状態に戻せばよい。ただしこの場合、最初に粒子が右にあっても左にあっても同じポテンシャル操作をしなければならない。つまり粒子がどこにあるかは「見ないで」ポテンシャルを動かし、粒子が最初にどこにいたにせよ、最後には右にいるようにしむけなければならない。上で述べたように、まず粒子の位置を調べ、位置に応じて適当にポテンシャルを動かすという方法だと、調べた粒子の位置情報がどこかに残り、それをまた消去するはめになってしまうからである。なお上記から明らかなように、ここでいう情報の消去は情報が「分からなくなる」こと、つまりメモリの値が熱揺動などにより不明になることとは意味が異なる。

Landauerは上記のように情報消去をRTOとして定義した後、次の主張をした：

RTOには$k_BT\ln 2$ 程度以上の熱散逸が必ず伴う。

つまりどのような物理系を用いてメモリを実現しようと、そのメモリに対してRTOを行うと必ず$k_BT\ln 2$ 以上の発熱が起きるということである。ただしメモリの初期値は0の場合と1の場合が半々という前提がつく。上記のモデルの場合にこの主張が意味することは、ポテンシャルを動かして粒子を右に「落とす」際に、どのようにポテンシャルを動かそうと摩擦による発熱が必ず$k_BT\ln 2$以上になるということである。Landauerが示した根拠は次の通りである：一つのメモリにRTOを何回も繰り返す場合を考える。RTO前のメモリの状態は1を表す状態の場合と0を表す状態の場合の両方がある。従って、1を表すメモリと0を表すメモリを同じ個数含むアンサンブルを考えて、そこのメモリ全てにある同じ操作を施し、値を全部1にする場合を考えればよい。この操作はアンサンブルのエントロピーを減らす。従って第2法則からその分のエントロピーが環境で増え、その際に発熱が生じるはず。メモリ一つ当たりの発熱量の平均は

$k_BT\ln 2$以上になる。

この主張は情報量と熱力学を結びつける基礎とみなされ、Maxwell's demonの解決[Bennet 1981][Leff, 1990]、無発熱計算機の提案[Bennet 1973][Fredkin 1982]、Algorithmic entropyの提案[Zurek 1989]など「情報処理の熱力学」と呼ばれる研究を触発した。

しかしその一方、Landauerが示した上記の根拠は一般性がありもっともらしくはあるものの、具体性や厳密さに欠けるという指摘がされた[Berger 1990]。特に興味深い反論は、Goto等によるもので（§２で紹介）、彼らはQFP (Quantum Flux Parametron)を用いて具体的な反例を挙げた[Goto1989] [Goto 1991][Yoshida 1992]。その後LaundauerとGotoの間で議論が行われたが[Landauer 1993][Goto 1993]、はっきりした結論はでていない。その原因の一つに、具体的なモデルでの定量的な議論がなされていないことがあると考えられる。また、Landauerの主張を情報と熱力学の関係を与える基礎として用いるためにも、より堅固な根拠が与えられることが望ましい。

そこで本論文では、メモリのモデルとして上記の基本的なモデル、つまり動的なポテンシャル中のブラウン運動粒子を取り上げ、粒子が受ける熱的ランダム力が白色ガウス的雑音の場合に、１ビットの情報消去に伴う熱散逸が厳密に$k_BT\ln 2$以上になることを示す（§３）。さらにその結果を用いてGoto等の反論について議論する（§４）。§５はまとめである。

§２．Goto等による反論 [Goto, 1989][Goto, 1991]

Goto等はLandauerの主張に対し、次の反論を行った：Quantum Flux Parametron (QFP)を用いれば、操作を十分ゆっくり行うことにより、情報消去に伴う熱散逸をいくらでも小さくできる。従って、情報消去に伴う熱散逸の下限は存在しない。

QFPとはJosephson Junction(JJ)を用いた超伝導回路で、磁束を用いて情報の保持、伝送を行う[Goto 1986, 1991][Harada 1987][Hioe 1991]。ひとつのQFPにはinput flux Φ_sとexcitation clocking flux Φ_aが入力され、それらによりoutput flux Φが制御される。その振舞いはRSJモデルに基づいた次の微分方程式により記述される：

$$2C\frac{d^2\Phi}{dt^2}+2\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}+\frac{\partial V}{\partial\Phi}=-I_R \tag{2.1}$$

ただし $$V=-2E_J\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right)\cos\left(\frac{2\pi\Phi_a}{\Phi_0}\right)+\frac{(\Phi-\Phi_s)^2}{2L_L} \tag{2.2}$$

$\Phi_0=h/(2e)$, I_R：抵抗から来るJohnson noise、$E_J\equiv\Phi_0 I_J/(2\pi)$、

I_J：Josephson critical current、C, R, L_L：定数。 (2.3)

式(2.1)はLangevin方程式と数学的に同じ形式をとる。従ってΦは「ランダム力」I_Rを受けな

がら「ポテンシャル」Vの中をブラウン運動する粒子の座標とみなせる。Vの形は Φ_sと Φ_aで制御され、その結果Φが制御されることになる。重要なのはポテンシャルVの形であり、$2\pi\Phi_a/\Phi_0=\pi$ とすると双安定状態、Φ_a=0とすると、単安定状態となる。このことを利用すると、§１のモデルのように、双安定状態で情報を保持、単安定状態で消去することができる。このためQFPはまさに§１のモデルを実現化しうる素子とみなすこともでき、物理的観点からも非常に興味深い。

Goto等はQFPにより散逸をいくらでも減らせるという主張の根拠として次を挙げた： QFPでポテンシャルを双安定状態から単安定状態に変化させ情報消去を行うが、その際にロジックコピーの使用により、output flux Φの障壁を越えての移動を押さえ、Φを常にポテンシャルの最小点にいさせることができる（ロジックコピーとは、複数のＱＦＰを直列につなぐ場合に、出力側の値により入力側の値が影響されないようにするための技法。本論文では１つのＱＦＰのみを扱うので、考慮しない）。そして熱生成のもとになるのは$\dot{\Phi}/R$の項だけなので、障壁を越えての移動がなければ、熱生成率（１クロックサイクルあたりの発熱量）Pは

$$P\equiv\int\frac{\dot{\Phi}^2}{R}dt=H_0f_c \qquad (2.4)$$

で与えられる。ここでf_cはクロック周波数であり、積分は１サイクルにわたって行われる。よってf_cを小さくすればPはいくらでも小さくできる。

しかし、Goto等の議論には次の問題があると考えられる。まず$P=H_0f_c$の正当性である。$f_c\to 0$の極限を考えると、単位時間当たりの発熱は有限値（平衡値）になる。一方、周期$1/f_c$は無限大になるので、単純に考えると$f_c\to 0$でPはむしろ無限大になる。従って、(2.4)は少なくとも単純には成り立たないはず。また別種の問題として、情報消去の議論でPを散逸の定義としてよいかということがある。これらについては§４で議論する。

§３．Fokker-Planck eq.に従う系での熱散逸の下限

QFPは上述のとおり、§1で導入したメモリのモデルを実現したものとみなすこともできる。また、このモデルは基本的であり、Landauerの主張を定量的に調べるための第一歩として取り上げるのに適切と考えられる。そこで、ここではこのモデルで特にランダム力が白色ガウス雑音の場合を考え、その場合には情報消去に必要な散逸の下限が厳密に

$$k_BT\times\text{消された情報量} \qquad (3.1)$$

になることを証明する。以下では煩雑さをさけるため、k_B=1の単位系を用いる。証明の方針は次の通りである：ランダム力が白色ガウス雑音なら粒子の確率分布関数はFokker-Planck eq.(FPE)に従う。そこでFPE に従う系ではポテンシャルに時間依存性がある場合でも「第２法

則」、つまり

$$dQ \le TdS \tag{3.2}$$

の確率過程版が厳密に成り立つことを導出する。そして導出した(3.2)を情報消去の過程に適用する。いわばLandauerの議論を、(3.2)を用いて基礎付けすることになる。なおよく知られているようにポテンシャルが静的な場合、FPEの解はH定理を満たす[Risken 1989]。この場合にH定理を利用して「第2法則」を導出することはHasegawa等により行われている[Hasegawa 1980]。次に示す証明の特色はポテンシャルが陽に時間依存性を持ち、従ってH定理が成り立たない場合を扱うことである。

3．1　Fokker-Planck eq.　に従う系での「第2法則」　$dQ \le TdS$

このモデルのブラウン粒子の座標をxとすると、xは次のLangevin eq.に従う：

$$m\ddot{x} + m\gamma\dot{x} = -\frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + F_R(t) \tag{3.3}$$

ただし$V(x, t)$は時間依存性を持つポテンシャル。また$F_R(t)$は白色ガウス的ランダム力で、

$$\langle F_R(t)F_R(t')\rangle = 2m\gamma T\delta(t-t') \tag{3.4}$$

を満たすとする。この場合、時刻tに粒子の位置、速度がそれぞれ$x \sim x+dx,\ u \sim u+du$に入る確率を$f(x,u,t)dxdu$とすると、分布関数$f(x,u,t)$は次のFPEに従う（例えば[Risken 1989]）：

$$\frac{\partial}{\partial t}f(x,u,t) = [-\{\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial u}(-\gamma u - \frac{1}{m}\frac{\partial V(x,t)}{\partial x})\} + \frac{\gamma T}{m}\frac{\partial^2}{\partial u^2}]f(x,u,t)。 \tag{3.5}$$

(3.5)から「第2法則」を導く。つまり粒子が熱浴から単位時間に受けるエネルギーの平均値を$\dot{Q}$としたとき（ここでQに付けたドットは「単位時間当たり」を表し、時間微分ではない）、

$$\dot{Q} \le T\frac{dS}{dt} \tag{3.6}$$

が成り立つことを示す。ただしSは分布関数fに対応するShannon-von Newmannのエントロピー

$$S \equiv -\int_{-\infty}^{\infty} dxdu f \ln f \quad 。\tag{3.7}$$

まず、エネルギー保存則から

$$\dot{Q} = \frac{d<E>}{dt} - \dot{W}。 \tag{3.8}$$

ここで

$$E(x,u,t) \equiv \frac{mu^2}{2} + V(x,t)、 \tag{3.9}$$

$$< E > \equiv \int dxduf(x,u,t)E(x,u,t) \tag{3.10}$$

（以下、(3.10)と同様に<X>でXのアンサンブル平均を表す）。また$\dot{W}$は時間変化するポテンシャルが粒子に対して単位時間に行う仕事の平均値で、

$$\dot{W} = \ < \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} > \ = \int_{-\infty}^{\infty} dxduf(x,u,t) \frac{\partial V(x,t)}{\partial t} \tag{3.11}$$

で与えられる（実際、粒子と熱浴（環境）の合成系のハミルトニアンをHとすると、Hの中で陽に時間に依存する部分は$V(x,t)$のみ。従って、各力学変数を運動に沿った時間の関数とみなしてHを時間微分すると

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial t} \tag{3.12}$$

が得られ[Landau, 1969]、これが粒子＋熱浴のエネルギーの変化率、従ってポテンシャルが粒子＋熱浴に対して行う単位時間当たりの仕事でもある。しかし実際にはポテンシャルが結合しているのは粒子のみなので、仕事をされるのは粒子のみ。従ってこの量のアンサンブル平均$< \partial V(x,t)/\partial t >$が求める$\dot{W}$となる）。(3.8)〜(3.11)により$\dot{Q}$は次で与えられる：

$$\dot{Q} = \int_{-\infty}^{\infty} dxdu \frac{\partial f(x,u,t)}{\partial t} E(x,u,t) \tag{3.13}$$

ここでFPEを用いると次が得られる：

$$\dot{Q} = \gamma(T - < mu^2 >) \tag{3.14}$$

また、(3.7)とFPEから

$$\frac{dS}{dt} = \gamma\left(\frac{T}{m} < \left(\frac{\partial \ln f}{\partial u}\right)^2 > -1\right) \tag{3.15}$$

が得られる。よって、これら２つの式から

$$\dot{Q} - T\frac{dS}{dt} = \gamma(T - < mu^2 >) - T\gamma\left(\frac{T}{m} < \left(\frac{\partial \ln f}{\partial u}\right)^2 > -1\right)$$

$$= -\frac{\gamma}{m} < \left(T\frac{\partial \ln f}{\partial u} + mu\right)^2 > \leq 0 \tag{3.16}$$

（ここで　$< \frac{\partial \ln f}{\partial u} u > = \int_{-\infty}^{\infty} dxduf \frac{\partial \ln f}{\partial u} u = \int_{-\infty}^{\infty} dxdu \frac{\partial f}{\partial u} u = -\int_{-\infty}^{\infty} dxduf = -1$　を用いた）

以上で(3.6)は証明された。

不等式(3.6)を時刻t_1からt_2まで積分すると次が得られる：

$$Q(t_1,t_2) \le T\Delta S(t_1,t_2) \tag{3.17}$$

ただし、

$Q(t_1,t_2) \equiv \int_{t_1}^{t_2} \dot{Q}dt$：時刻$t_1$から$t_2$までの間に系に入ったエネルギー、

$\Delta S(t_1,t_2) \equiv S(t_2) - S(t_1)$。

特に$\Delta S(t_1,t_2) \le 0$の場合には次が成り立つ：

$$Q(t_1,t_2) \le 0、かつ |Q(t_1,t_2)| \ge T|\Delta S(t_1,t_2)|。 \tag{3.18}$$

これらの結果から分かることは次の通りである：FPEに従う系では、ポテンシャルが時間依存性を持ちH定理が成り立たない場合でも、エントロピーとしてShannon-von Newmann entropy Sを取ることにより熱力学と形式的に同じ議論ができる。特にSが減少する場合には、熱浴にエネルギーが熱として流れ出し、その大きさの平均の下限が$T|\Delta S(t_1,t_2)|$で与えられる。

3．2　情報消去に伴う散逸の下限

FPEで記述される系をメモリとして用いた場合、1ビットの情報消去には必ず$T\ln 2$以上の熱散逸が起きることを(3.18)を用いて証明する。まずこのメモリの値が0の場合の粒子の分布関数を$f_0(x,u)$、1の場合のものを$f_1(x,u)$とする。情報消去RTOはポテンシャルを適切に動かし、初期分布がf_0、f_1のいずれであったにせよ最終分布をf_1にすることにより行われる（図2）。

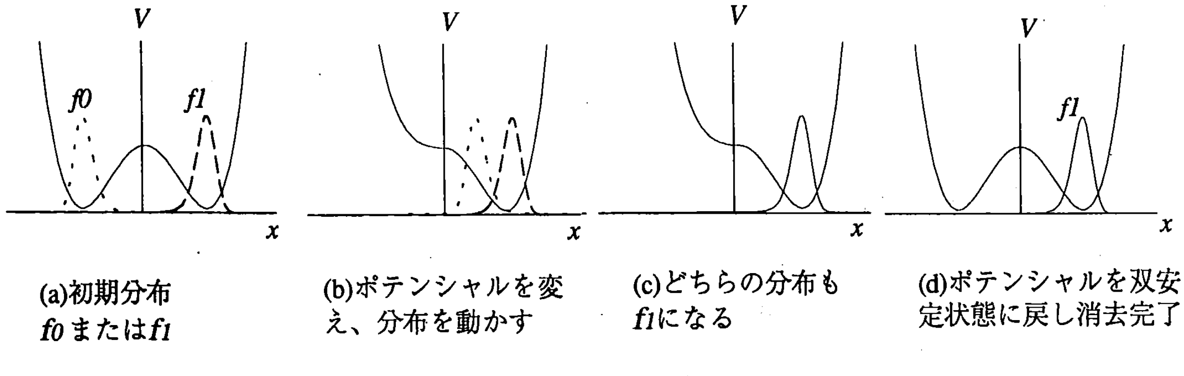

図2　情報消去過程における分布の変化

初期時刻t_iで値が0である確率をp_0、1である確率をp_1とすると、アンサンブル全体の、時刻t_iでの粒子の位相空間における分布関数は

$$f_{init} \equiv p_0 f_0 + p_1 f_1 \tag{3.19}$$

で与えられる（アンサンブルが含むメモリの個数をNとすると、Np_0個のメモリの値が0、

Np_1個の値が1なので、アンサンブル全体としての粒子の分布は$N(p_0f_0+p_1f_1)$になる）。よってエントロピーは

$$S_{init}=-\int dudxf_{init}\ln f_{init}=-\int dudx(p_0f_0+p_1f_1)\ln(p_0f_0+p_1f_1)。\qquad(3.20)$$

粒子の位置、または速度の測定によりメモリの値が0か1かを識別できるためにはf_0とf_1の重なりは無視できるほど小さいはず。従って

$$S_{init}\approx-\int dudx\{p_0f_0\ln(p_0f_0)+p_1f_1\ln(p_1f_1)\}$$
$$=-p_0\int dudxf_0\ln f_0-p_1\int dudxf_1\ln f_1-p_0\ln p_0-p_1\ln p_1$$

$$=p_0S[f_0]+p_1S[f_1]+S[\{p_0,p_1\}]、\qquad(3.21)$$

但し　$S[f]\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}dxduf\ln f$ ：分布fのエントロピー

$$S[\{p_1,\ldots,p_n\}]\equiv-\sum_{i=1..n}p_i\ln p_i \text{ ：分布}\{p_1,\ldots,p_n\}\text{のエントロピー}\qquad(3.22)$$

となる。(3.21)の最初の2項は、メモリの値が決まっていても粒子の位置に不確定が残ることに由来するエントロピー（の平均）、最後の項はメモリの値が不確定なことに由来するエントロピーと解釈できる。特に

$$S[f_0]=S[f_1]\qquad(3.23)$$

ならば、

$$S_{init}=S[f_1]+S[\{p_0,p_1\}]。\qquad(3.24)$$

一方、RTOを行った後ではエントロピーは

$$S_{final}=S[f_1]。\qquad(3.25)$$

従って$\Delta S(t_i,t_f)=-S[\{p_0,p_1\}]$となり、(3.18)から散逸されるエネルギーの下限は$TS[\{p_0,p_1\}]$となる。特に$p_0=p_1=1/2$の場合には下限は$T\ln 2$となる。以上でこの系ではLandauerの主張が厳密に成り立つことが示された。

上の議論で、(3.23)を前提としたが、これは実は本質的ではない。これまではメモリの値を消去するまでの熱的コストを調べたが、さらにその後新たに値をセットするところまでの熱的コストを考えると(3.23)なしで「自然」な結果を得られる。実際、メモリに消去前と同じ比率で0と1をセットしたとすると、その時のエントロピーは

$$S_{set}\equiv p_0S[f_0]+p_1S[f_1]\qquad(3.26)$$

（ここでは一つ一つのメモリの値はそれぞれ確定しているため、(3.21)と異なり$S[\{p_0,p_1\}]$は

現れない）。よって、消去をし、さらにまた値をセットするまでに必要な熱散逸の下限は(3.18)，(3.21)および(3.26)のみから（つまり、(3.23)なしで)

$$T(S_{init} - S_{set}) = TS[\{p_0, p_1\}] \tag{3.27}$$

となる。$p_0 = p_1 = 1/2$の場合には、再びLandaurの結果が得られる。

以上の議論はメモリのとりうる値が２つより多いM個の場合へも容易に一般化でき、散逸の下限の平均値は自然な予想通り

$$TS[\{p_k\}] = -T\sum_k p_k \ln p_k \tag{3.28}$$

となる。

§４．議論

１）QFPで散逸なしの情報消去が可能か？

§２で紹介したように、QFPの運動は出力フラックスを粒子の位置、雑音電流をランダム力に対応させることによりLangevin方程式で記述されるので、QFPを用いた情報消去過程に対しては§３の議論がそのまま適用できる。従ってＱＦＰの雑音電流が白色ガウス的である場合には、または言い換えるとQFPで使われるJosephson junctionの振舞がFPEで記述される場合にはQFPを用いても散逸なしの情報消去は不可能となる。

一方、[Risken 1989][Barone, 1982][Falco, 1974][Ben-Jacob 1983]などによるとJosephson junction はFPE による記述がよく行われ、ある$R, C, Ic,\ T$ の範囲では実験とも比較され、よく合うことが報告されている 。しかしFPEの記述と合わない振舞いをするJosephson junctionを用いることも考えられ、その場合には３章の議論を非白色ガウス雑音の場合に拡張できるかどうかが問題となる。これは今後の課題である。

２）散逸の定義について

§２で述べたようにGoto等は散逸を

$$P = \int \frac{\dot{\Phi}^2}{R} dt \tag{4.1}$$

により定義し、それが情報消去過程で$T\ln 2$より小さくなるかどうかを議論した。Landauerもこの定義に基づいて議論している[Landauer 1993]。§２のモデルではこの量は

$$\overline{P} = \int_{t_1}^{t_2} \gamma m u^2 dt \tag{4.2}$$

に対応する。しかし、この定義では抵抗の発熱だけで、逆に環境から抵抗に入るエネルギーを考慮していない。従って、§２でも触れたように例えば単なる熱平衡状態においても$\overline{P}$ の被積

分関数γmu^2は等分配則で決まる有限の値γTをとるため、$\overline{P}$は時間に比例して増加することになる。散逸した熱量はむしろ、発熱分から「吸熱」分を差し引いた値として定義すべきであり、それは§２の$Q(t_1,t_2)$（の符号を変えたもの）で与えられる。なお§２のモデルでは(3.14)から$\overline{P}$とQの関係は次式で与えられる：

$$\overline{P} = -Q(t_1,t_2) + \gamma T(t_2 - t_1)。 \tag{4.3}$$

平衡状態においてはポテンシャルは静的なのでQ=0、よって上述の通り$\overline{P}$は時間に比例して増大する。

§５．まとめ

白色ガウス型のランダム力を受ける粒子系をメモリと見なし、ポテンシャルを変化させることにより情報消去を行おうとすると、その際に必要な、散逸される仕事の平均値は

$$k_B \times 温度 \times 消去される情報量 \tag{5.1}$$

以上になることを Fokker-Planck eq. から厳密に導いた。QFPによる情報消去は、用いている Josephson junction の磁束の運動が Fokker-Planck eq. で記述される場合には上の範疇にはいり、従って発熱無限小での情報消去は不可能となる。そうでない場合には本研究の議論を非白色ガウス雑音の場合にも拡張できるかどうかが問題となる。これは今後の課題である。

謝辞

有益な議論をいただいた東北大学の岩井博士、佐々木助教授、高木助教授、早川博士、および山形大の 高橋博士　等に感謝いたします。

参照文献

[Barone] Barone,A. & Paterno,G. , *Physics and Applications of the Josephson Effect.* (John Wiley & Sons,1982).

[Ben-Jacobi 1983] Ben-Jacobi, E., Mottola, E. & Schoen, G. Phys.Rev.Let. **51** , 2064-2067 (1983 Nov.28).

[Bennet, 1973] Bennet, C.H., IBM J. Res. Dev. **17**, 525-32 (1973).

[Bennet, 1981] Bennet, C.H., Int. J. Theor. Phys. **21**, 905-40 (1981).

[Berger 1990] Berger, J., Int. J., Theor. Phys. **29** , 985 (1990).

[Falco, 1974] Falco,C. M., Parker,W. H., Trullinger,S. E., Phys.Rev. **B10** , 1865-1873 (1974).

[Fredkin 1982] Fredkin, E. & Toffoli, T. Int. J. Theor. Phys. **21**, 219-253 (1982).

[Goto,1986] Goto, E. & Loe, K.F., *DC FLUX PARAMETRON* (World Scientific, Singapore, 1986)

[Goto, 1989] Goto, E., Yoshida, N., Loe, K.F. & HIOE, W. in *Proceeding of 3rd. Int. Symp.Foundation of Quantum Mechanics*, 412-418 (1989)

[Goto, 1991] Goto, E., W.Hioe & M.Hosoya., Physica **C 185-189** , 385-390 (1991).

[Goto, 1993] Goto, E. & Yoshida, N. (1993). *Author's Comments on "Physical Limit to QFP Operations" and on Landauer's "Comments"* preprint

[Harada 1987]Harada,Y. Nanane,H., Miyamato,N., Kawabe,U, and Goto,E., IEEE Transactions on Magnetics **MAG-23**, 3801-3807 (1987).

[Hasegawa, 1980]Hasegawa, H., Nakagomi, T., Mabuchi, M. & Kondo, K. Jour. Stat.Phys. 23, 281-313 (1980).

[Hioe 1991] Hioe, W. & Goto, E., *Quantum Flux Parametron: A Single Quantum Flux Superconducting Logic Device* (World Scientific, Singapore, 1991).

[Landau 1969] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. Mechanics (Pergamon, Oxford, 1969).

[Landauer 1961] Landauer, R., IBM J. Res. Dev. **5**, 183-91 (1961).

[Landauer 1993] Landauer, Physica **C 208**, 205-207 (1993).

[Leff 1990] Leff, H.S. & Rex, A.F. *Maxwell's demon: Entropy, Information, Computing* (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1990).

[Risken 1989] Risken, H., *The Fokker-Planck Equation -Methods of Solution and Applications- 2nd.Ed.* (Springer-Velrag, 1989).

[Yoshida 1992] Yoshida, N., Goto, E., Loe, K.F. & Hioe, W. in *Advances in Quantum Flux Parametron Computer Design* (eds. Goto, E., Wada, Y. & Loe, K.F.) 148-155 (World Scientific, 1992).

[Zurek, 1989] Zurek, W.H., Phys. Rev. **A40**, 4731-51 (1989).